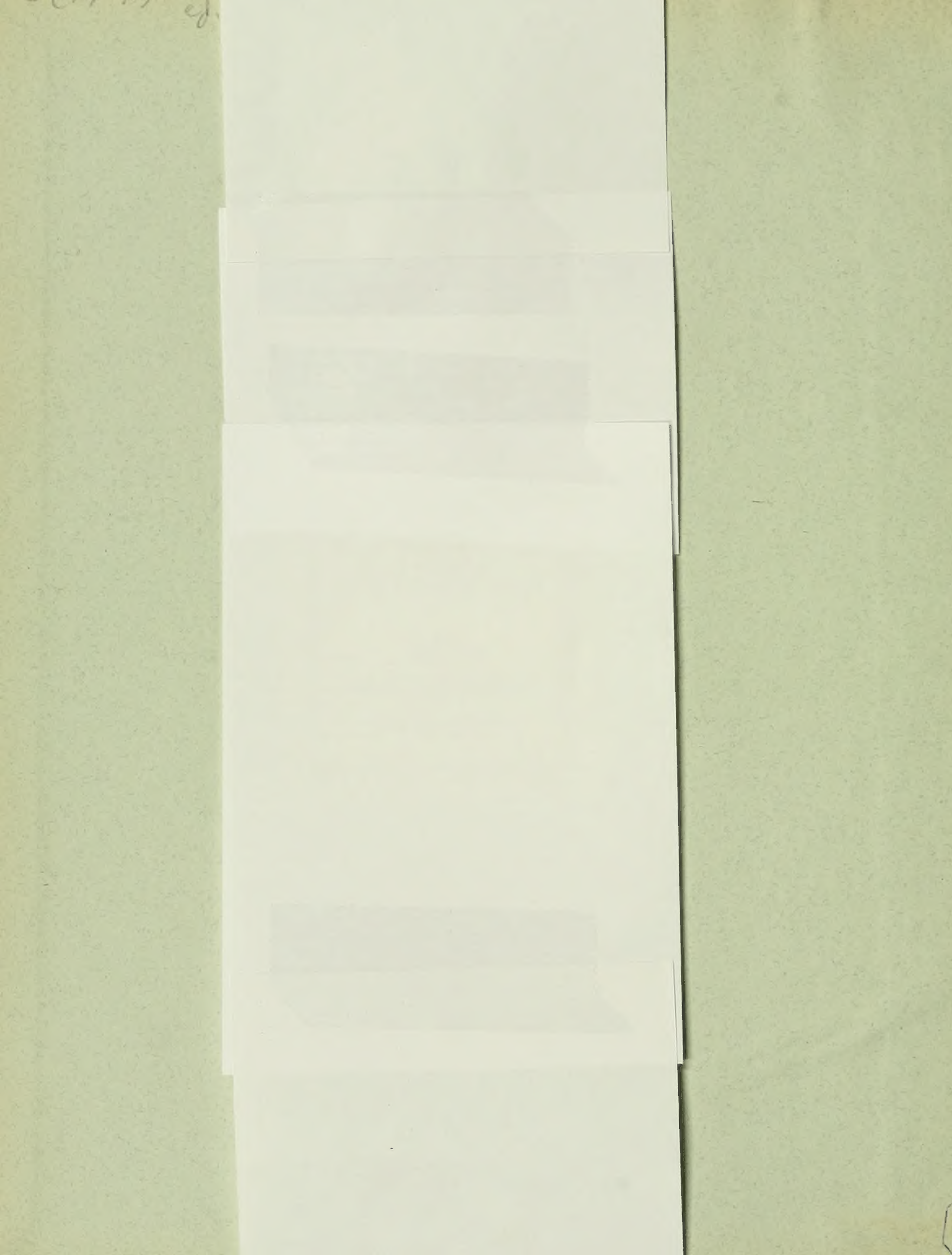
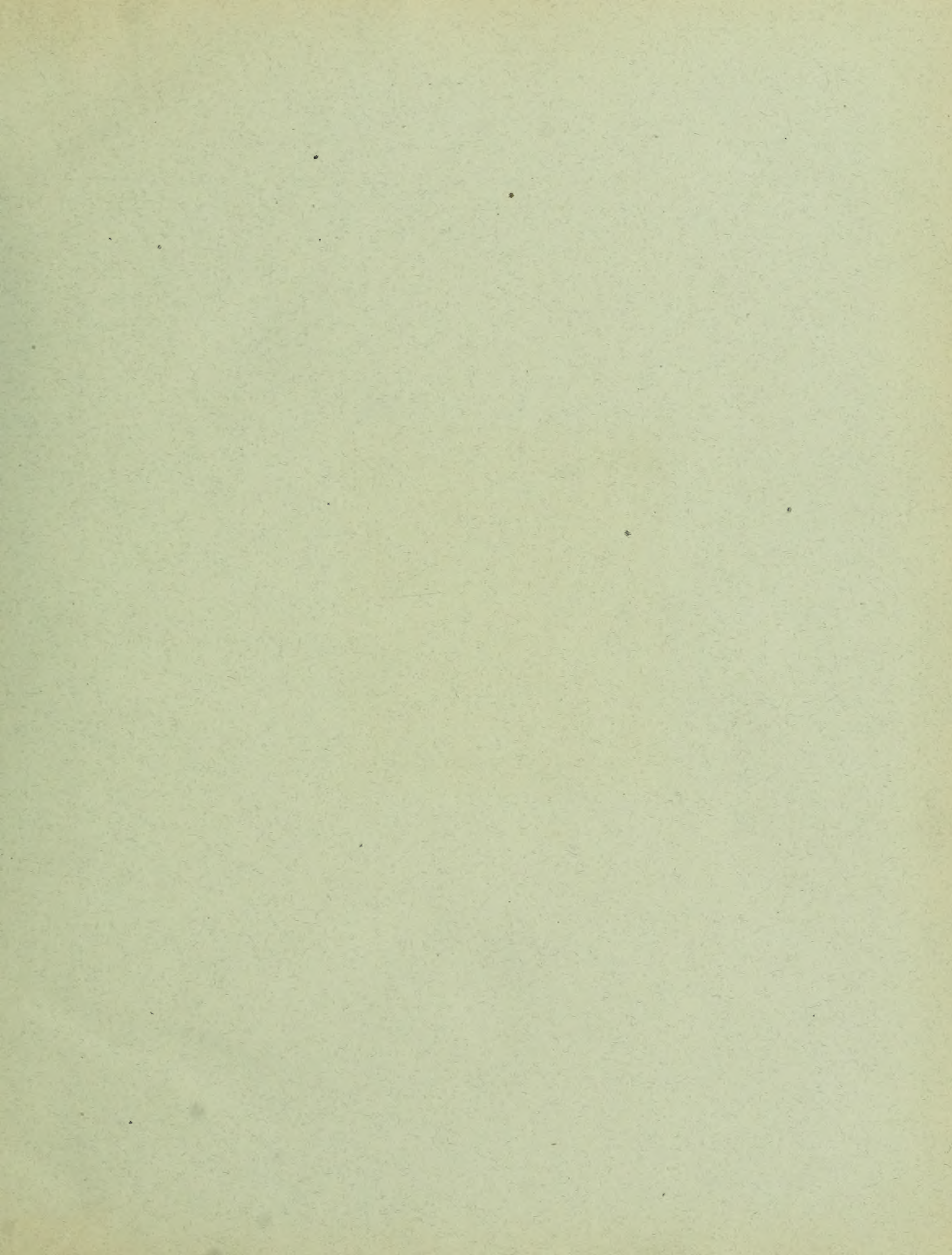
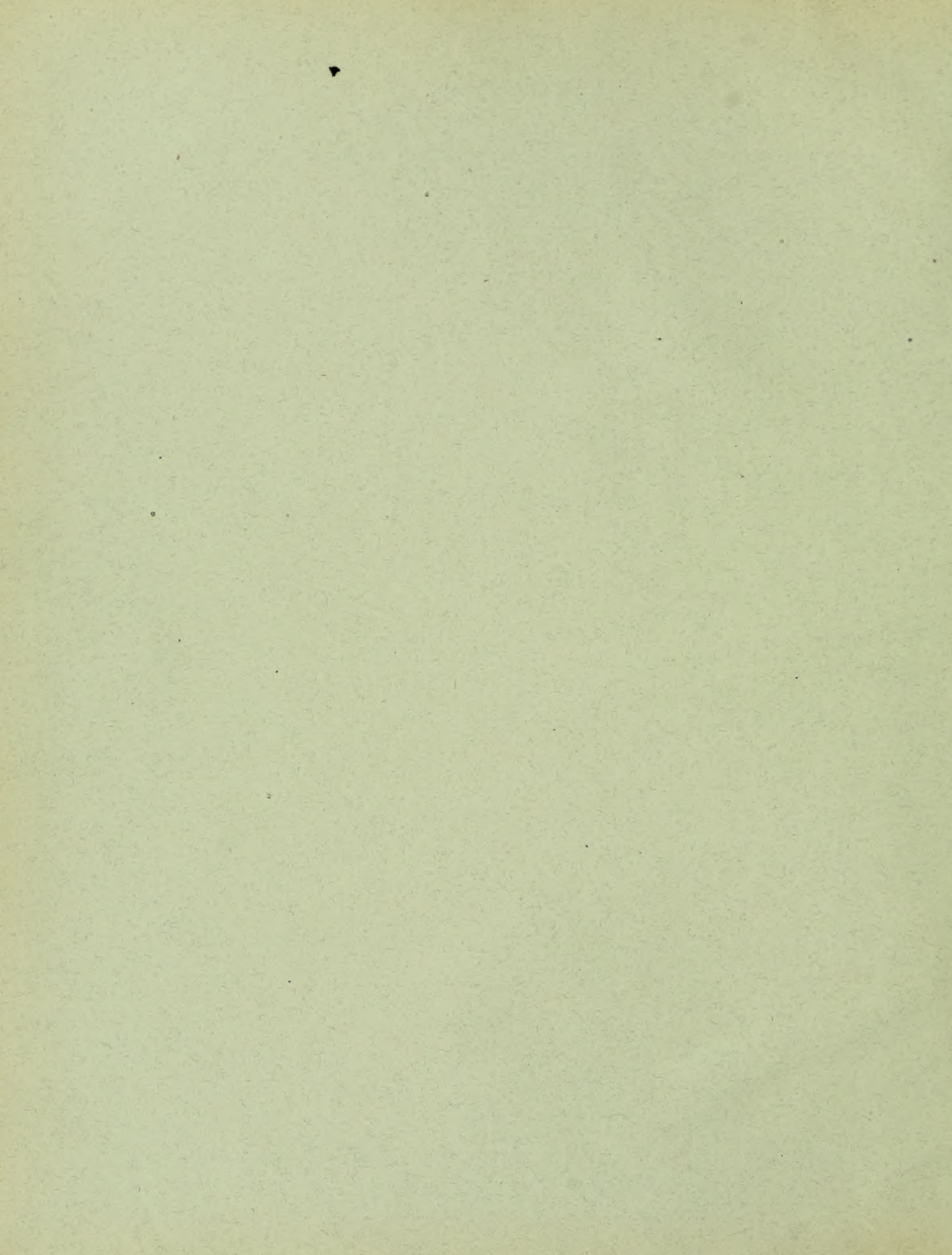










Neue Denkschriften

der

allgemeinen schweizerischen Gesellschaft

für die

gesammten Naturwissenschaften.

NOUVEAUX MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ HELVÉTIQUE

DES

SCIENCES NATURELLES.

Vierte Dekade.

Band VIII.

ZÜRICH

auf Kosten der Gesellschaft und mit Subvention des Bundes

Druck von Zürcher & Furrer.

In Commission bei Georg & Co. in Basel, Genève und Lyon.

1901.

Neue Denkschriften

der

allgemeinen schweizerischen Gesellschaft

für die

gesammten Naturwissenschaften.

NOUVEAUX MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ HELVÉTIQUE

DES

SCIENCES NATURELLES.

Band XXXVIII.

ZÜRICH

auf Kosten der Gesellschaft und mit Subvention des Bundes

Druck von Zürcher & Furrer.

In Commission bei H. Georg in Basel, Genève und Lyon.

1901.



Theorie

der

vielfachen Kontinuität.

Von

† L. Schläfli.

Herausgegeben im Auftrage der
Denkschriften-Kommission der Schweizer. Naturforschenden Gesellschaft
von
J. H. Graf, Bern.

Druck von ZÜRCHER & FURRER in Zürich.



Vorbemerkung.

Die vorliegende Abhandlung Ludwig Schläfli's stammt aus den Jahren 1850 bis 1852. Schläfli erwähnt sie zum ersten Mal in seinem Brief an Steiner 3. I. 1852*) und sandte sie, nachdem die Wiener Akademie seine Arbeit „Ueber die Resultante eines Systems mehrerer algebraischer Gleichungen" angenommen und in ihren Denkschriften 1852 publiziert hatte, dem Sekretär dieser Akademie ein. Auf dem Umschlag findet sich von dessen Hand der Vermerk: „655/1852 praes. 8. Okt.". Schläfli bringt im angegebenen Brief noch mehrere Integrale, die wir als Anmerkung zum Brief publiziert haben und spricht die Absicht aus, falls die Akademie die Schrift wegen ihres grossen Umfangs (sie wurde auf 23 Bogen 4° geschätzt) nicht annehmen wolle, dieselbe als Privatschrift herauszugeben und bittet Steiner, ihm hiezu in Berlin behülflich zu sein.

Seite 27 des „Briefwechsels" haben wir das Konzept eines Briefes dat. vom Dez. 1851 an den Sekretär der k. k. Akademie der Wissenschaften in Wien publiziert. Dieser Brief sollte denselben über die Absichten des Autors orientieren. Die Aufnahme der Arbeit wurde des grossen Umfangs halber verweigert. Vergeblich ermunterte Steiner (siehe Brief vom 15. Okt. 1853, S. 41 des Briefwechsels, sodann in einem Brief an Schläfli's Freund Prof. Ris und an Schläfli vom 10. März 1854) aus der „Weltüberstürmenden Erdewälzenden" Abhandlung einen Auszug zu machen, der etwa 4 oder 12 Bogen wäre, Schläfli's erste Begeisterung für die Arbeit war vorbei (S. 59). Er sandte sie erst 1854 an Crelle in Berlin, den Herausgeber des Journals für reine Mathematik (siehe S. 74). 1855 liess Steiner Crelle wieder an die Arbeit erinnern (siehe S. 191), dann verwandte sich Steiner erfolglos bei Reimer, dem Verleger des genannten Journals; auch Borchardt, der neue Herausgeber desselben, wollte mithelfen, die Publikation der Arbeit zu ermöglichen. Am 17. Mai 1856 konnte Steiner seinem Freunde L. Schläfli schreiben, dass sich Reimer herbeigelassen habe, die Aufnahme der Arbeit ins Journal,

---

*) Vergleiche „Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli", herausgegeben von J. H. Graf, Mittlgen. der bern. Naturf. Gesellschaft 1896, S. 76 und auch separat bei K. J. Wyss, Bern, S. 20.

sowie 200 Extraabzüge und ein kleines Honorar zu versprechen. Trotzdem sich Schläfli laut Brief vom 19. Mai 1856 sofort, beseelt von dem Wunsch, die Arbeit nach so vielen Jahren endlich einmal veröffentlicht zu sehen, mit allen Bedingungen einverstanden erklärte, da auch die Fortsetzung dazu schon längst geschrieben sei, so unterblieb der Druck doch. Nach einer Aeusserung Steiner's zu schliessen, war nun Borchardt dagegen. Die Arbeit kam wieder nach Bern zurück, wo wir sie unter den nachgelassenen Papieren des grossen Meisters gefunden haben. Das Manuskript gehört wie alle andern von Schläfli stammenden der schweizer. Landesbibliothek in Bern an. Der erste Teil bis Seite 78 trägt Korrekturen, wahrscheinlich von der Hand Crelle's oder Borchardt's, um die Arbeit zum Drucke einzurichten. Sie sind mehr redaktioneller Natur oder beziehen sich auf die Auswahl der Lettern oder die Anordnung. Wir halten aber dafür, die Arbeit soll im ursprünglichen Wortlaut ohne jeden Zusatz oder irgend eine Anmerkung unsererseits gedruckt werden, und sind der Meinung, dass sie nicht bloss historischen Wert, sondern gerade für die Theorie der Geometrie von n Dimensionen noch eine Fülle anregender Gedanken enthalte. Beigegeben wird die Selbstanzeige, dat. 5. Juli 1852, hinzugefügt ist ein Inhaltsverzeichnis. Der Denkschriften-Kommission der Schweiz. Naturforschenden Gesellschaft gebührt der beste Dank, dass sie die Herausgabe des Werkes ermöglicht hat. Herr Prof. Dr. P. Stäckel in Kiel hat die Güte gehabt, die Korrektur ebenfalls durchzusehen, wofür ich ihm an dieser Stelle herzlich danke.

Bern, im Oktober 1901.

Prof. Dr. J. H. Graf.

Anzeige einer Abhandlung über die Theorie der vielfachen Kontinuität.

Die Abhandlung, die ich hier der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften vorzulegen die Ehre habe, enthält einen Versuch, einen neuen Zweig der Analysis zu begründen und zu bearbeiten, welcher, gleichsam eine analytische Geometrie von n Dimensionen, diejenigen der Ebene und des Raumes als spezielle Fälle für $n = 2, 3$ in sich enthielte. Ich nenne denselben Theorie der vielfachen Kontinuität überhaupt in demselben Sinne, wie man z. B. die Geometrie des Raumes eine Theorie der dreifachen Kontinuität nennen kann. Wie in dieser eine Gruppe von Werten der drei Koordinaten einen Punkt bestimmt, so soll in jener eine Gruppe gegebener Werte der n Variabeln $x, y. \ldots$ eine Lösung bestimmen. Ich gebrauche diesen Ausdruck, weil man bei einer oder mehreren Gleichungen mit vielen Variabeln jede genügende Gruppe von Werten auch so nennt; das Ungewöhnliche der Benennung liegt nur darin, dass ich sie auch noch beibehalte, wenn gar keine Gleichung zwischen den Variabeln gegeben ist. In diesem Falle nenne ich die Gesamtheit aller Lösungen die n-fache Totalität; sind hingegen 1, 2, 3, . . . Gleichungen gegeben, so heisst resp. die Gesamtheit ihrer Lösungen $(n-1)$ faches, $(n-2)$ faches, $(n-3)$ faches, . . . Kontinuum. Aus der Vorstellung der allseitigen Kontinuität der in einer Totalität enthaltenen Lösungen entwickelt sich diejenige der Unabhängigkeit ihrer gegenseitigen Lage von dem System der gebrauchten Variabeln, insofern durch Transformation neue Variabeln an ihre Stelle treten können. Diese Unabhängigkeit spricht sich aus in der Unveränderlichkeit dessen, was ich den Abstand zweier gegebener Lösungen $(x, y, \ldots)$, $(x', y', \ldots)$ nenne und im einfachsten Fall durch

$$\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + \text{etc.}}$$

definiere, indem ich gleichzeitig das System der Variabeln ein orthogonales heisse, zum Unterschied von einem schiefen System, worin

$$\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + \text{etc.} + 2k(x'-x)(y'-y) + \text{etc.}}$$

den Abstand zweier Lösungen darstellte. Indem ich ferner ausschliesslich orthogonale Systeme gebrauche, nenne ich jede lineare Transformation der Variabeln, durch welche die Orthogonalität eines Systems nicht geändert wird, d. h., bei welcher die analytische

Form des Abstandes, Quadratwurzel aus einer Summe von Quadraten, dieselbe bleibt, eine orthogonale Transformation. Sind diese Vorstellungen durchlaufen, so hat man einen Begriff von der Gleichgültigkeit der vielfachen Totalität, ganz ähnlich wie von der des Raumes; man hat gleichsam die Totalität von dem willkürlichen Zwang des zu ihrer Darstellung verwendeten Variabeln-Systems wiederum befreit. Diese Andeutungen, bei denen ich einige Weitläufigkeit nicht wohl vermeiden konnte, mögen genügen, um die Grundlage der hier behandelten Theorie zu bezeichnen.

Die Abhandlung zerfällt in drei Abschnitte, 1. über die linearen, 2. über die sphärischen, 3. über die quadratischen und höheren Kontinuen. Um ohne Weitläufigkeit zu zeigen, dass namentlich in den zwei ersten Abschnitten Dinge vorkommen, welche von der analytischen Geometrie des Raumes aus kaum sich ahnen lassen, führe ich nur den Satz in § 22 an.

Um die Aussage desselben einzuleiten, diene folgende Erklärung. Wenn $p = ax + by + cz + \ldots + hw$, $p' = a'x + b'y + \ldots + h'w$ zwei lineare und homogene Polygone der n orthogonalen Variabeln $x, y, \ldots w$ bezeichnen, und man denkt sich die Gesamtheit aller Lösungen, für welche zugleich $p > o$, $p' > o$: so steht diese zur unbeschränkten Totalität im Verhältnis eines Bruchteils zum Ganzen. Wird 2π als letztes Glied dieses Verhältnisses angenommen, so nenne ich das erste Glied den Winkel der Polynome p, p'. Wird derselbe durch $\angle\,(p, p')$ bezeichnet, so ist

$$-\cos \angle\,(pp') = \frac{aa' + bb' + cc' + \ldots + hh'}{\sqrt{a^2 + b^2 + \ldots + h^2}\,\sqrt{a'^2 + b'^2 + \ldots + h'^2}},$$

wo die Quadratwurzeln im Nenner nur positiv zu verstehen sind.

Ist nun das $n$fache Integral $S_n = \int\limits^{n} dx dy dz \ldots dw$ durch die Bedingungen $p_1 > o$, $p_2 > o$, $\ldots$ $p_n > o$, $x^2 + y^2 + \ldots + w^2 < 1$ begrenzt, so hängt sein Wert nur von den $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ Winkeln zwischen den n linearen und homogenen Grenzpolynomen p ab (wesshalb ich diese Winkel die Argumente der Funktion S_n nenne); und, wenn die transcendente Funktion, als welche der Winkel in Beziehung auf seinen zunächt gegebenen Kosinus aufzufassen ist, nicht mitgezählt wird, so erfordert die Berechnung jenes Integrals nur $\frac{n-2}{2}$- oder $\frac{n-3}{2}$ fache Integrationen, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Denn der z. B. nach dem Argument $\angle\,(p_1\,p_2)$ genommene Differentialkoeffizient von S_n ist der $n$te Teil eines ähnlichen, aber bloss $(n-2)$ fachen Integrals S_{n-2}, dessen Argumente durch trigonometrische Relationen mit den ursprünglichen Argumenten verbunden sind. Transformiert man nämlich orthogonal die Variabeln so, dass die Polynome p_1 und p_2 nur die zwei ersten von den neuen Variabeln enthalten, und tilgt dann in allen übrigen Polynomen diese zwei Variabeln, so hat man die $n-2$ Grenzpolynome von S_{n-2}.

Ist die Ordnung n einer Funktion S_n ungerade, so kann man diese linear durch lauter solche Funktionen von gerader Ordnung ausdrücken, deren Argumente geradezu

schon unter den ursprünglichen sich vorfinden. (Hieher gehört es z. B., wenn für $n = 3$ der Inhalt eines Kugeldreiecks nicht eine neue transcendente Funktion erfordert, sondern sich durch die schon der Ebene eigenen Funktionen, nämlich durch die Winkel des Dreiecks, linear ausdrücken lässt.) Nur die Integrale S_n von gerader Ordnung sind demnach eigentümliche transcendente Funktionen.

Man kann ferner jedes Integral S_n auf mannigfaltige Weise als Summe von Integralen derselben Ordnung darstellen, deren Argumente mittels trigonometrischer Relationen aus den ursprünglichen zu berechnen sind. Unter diesen Arten der Zerlegung giebt es auch solche, wo sämtliche Teil-Integrale eine spezielle Beschaffenheit erhalten. Man kann nämlich die Grenzpolynome einer solchen S_n so an einander reihen, dass nur die Winkel zwischen je zwei unmittelbar auf einander folgenden von rechten abweichen, alle übrigen Winkel dagegen rechte sind. Eine so spezialisierte Funktion S_n hat also nur noch $n - 1$ freie Argumente. Da es wünschbar ist, die Zahl der Argumente einer Funktion so sehr als möglich zu vermindern, so richtet sich nun die ganze Aufmerksamkeit auf diese speziellen Funktionen S_n, welche ich Orthoscheme genannt habe. Unter anderem führt die Betrachtung gewisser Perioden solcher Orthoscheme zur Kenntnis einiger Fälle, wo der Wert eines Orthoschems in finiter Form angegeben werden kann. Sollen zugleich alle Argumente rationale Teile des Halbkreises π sein, so glaube ich in der vorliegenden Abhandlung alle Fälle, wo dann auch das Orthoschem zur Polysphäre ein rationales Verhältnis hat, vollständig aufgezählt zu haben. Für $n = 4$ können die Nenner der Argumente nur 3, 4, 5, für alle höheren Dimensionszahlen gar nur 3, 4 sein (das Argument $\frac{\pi}{2}$ ist auszuschliessen, weil es immer auf eine niedrigere Ordnung zurückführt). Der Entscheid, ob alle hieher gehörenden Fälle vollständig aufgezählt sind, scheint ungemein schwierig; aber man wird das Interesse der Frage am besten würdigen, wenn man bedenkt, dass ihr für $n = 2$ die bekannte von Gauss absolvierte Aufgabe der Kreisteilung entspricht.

Was in den zwei ersten Abschnitten gegeben ist, halte ich alles für neu. Anders verhält es sich mit dem dritten Abschnitt. Hier findet die Bestimmung der Hauptaxen eines quadratischen Kontinuums, als analytische Aufgabe betrachtet, sich schon in der Theorie der sekulären Störungen der Planeten, wie sie Laplace in seiner Mécanique céleste gegeben hat. Die Bestimmung des kürzesten Weges auf einem quadratischen Kontinuum findet sich angedeutet von Jacobi in einem Vortrag an die Berliner-Akademie vom Jahre 1839. Dass ich ferner die Frage nach der Existenz orthogonaler Kontinuen aufgeworfen und erörtert habe, war veranlasst durch den von Lamé eingeführten Begriff orthogonaler Flächen. Ob die hier für $n = 3$ gegebene Konstruktion eines ganz beliebigen Systems orthogonaler Flächen schon von Lamé ausgeführt worden ist, weiss ich nicht, da mir die ersten Bände von Lionville's Journal, in denen dieser Gegenstand wahrscheinlich behandelt ist, nicht zu Gebot standen. Die Begriffe des Potentials und des Differentialparameters sind von Gauss und Lamé so benannt und zu physikalischen

Untersuchungen angewandt worden, und mehrere hieher gehörige Sätze von überraschender Eleganz, zum Teil wenigstens, wie es scheint, von Lamé herrührend, hat Lionville in seinen Briefen an Blanchet (über verschiedene das Ellipsoid betreffende analytische und mathematisch-physikalische Fragen, Lionville XI, Juni 1846) mitgeteilt und bewiesen. In der vorliegenden Abhandlung sind auch diese Sätze von drei auf n Dimensionen übergetragen. — Wenn ich nun auch das Verdienst des Generalisierens nur gering anschlage, so hielt ich es doch für nötig, einmal alle diese Betrachtungen in der Theorie der vielfachen Kontinuität zu vereinigen; man wird hier manches Neue finden, was ausser diesem Zusammenhang nicht dargestellt werden konnte.

Ich hoffe, durch die vorliegende Abhandlung faktisch gezeigt zu haben, dass in der reinen Analysis die Konstruktion nicht weniger mit Erfolg angewandt werden kann, als in der Geometrie.

Bern, den 5. Juli 1852.

Dr. L. Schläfli.

Theorie der vielfachen Kontinuität.

Einleitung.

Wenn man die gegenseitige Abhängigkeit zweier Variabeln zur lebhaften Anschauung bringen will, so bedient man sich häufig der ebenen Kurven, indem man jene zwei Variabeln als rechtwinklige Koordinaten setzt, und baut so auf die geometrische Anschauung eine Reihe von Schlüssen, deren letztes Ergebnis eine rein analytische Bedeutung hat. Es wird wohl niemand es bestreiten, dass ein solches Verfahren eben so sicher sein kann, als ein rein analytisches, welches sorgfältig alle der Geometrie entlehnten Ausdrücke vermeidet, und dass in beiden eigentlich dieselben Dinge, nur in anderer Sprache, dargestellt werden; denn es ist gewiss ganz dasselbe, ob man die Funktionsweise, in der zwei Variabeln von einander abhängen, unmittelbar anschaut, oder erst, indem man mit den Augen den Lauf einer gezeichneten Kurve verfolgt. Das durch geometrische Anschauung vermittelte Verfahren hat freilich den Vorzug der leichtern, auch dem Unvorbereiteten sogleich verständlichen Sprache, und kann daher für die populäre Darstellung nur empfohlen werden. Wenn aber die Zahl der in gegenseitiger Abhängigkeit stehenden Variabeln über drei hinausgeht, so bleibt die bequeme Nachhülfe der geometrischen Anschauung und Ausdrucksweise zurück; aber sollte es wohl darum der Analysis versagt sein, aus eigenen Mitteln diesen fühlbaren Mangel zu ersetzen und sich einen Vorrat von Anschauungen und Bezeichnungen anzulegen, worin sie dieselbe leichte Uebersicht der Funktionsweisen und ihrer singulären Eigenschaften wiederfindet, welche sie vorher von der Geometrie entlehnte? Als einen Versuch, nach dieser Seite hin eine neue Bahn in der Analysis zu eröffnen, möchte ich gegenwärtige Abhandlung dem nachsichtigen Urteile des geneigten Lesers übergeben.

Der vorliegende Stoff ist so eingeteilt, wie wenn man etwa in der Geometrie 1. die Gerade und Ebene, 2. den Kreis und die Kugel, 3. die Kurven und Flächen zweiten Grades, 4. endlich die infinitesimalen Eigenschaften der Kurven und Flächen überhaupt, nach einander behandeln würde.

Seite 3, dritte Zeile von unten, sowie
„ 4, zweite und vierte Zeile von oben
lies:
Liouville statt Lionville.

Erster Teil.

Lehre von den linearen Kontinuen.

§ 1. *Definitionen.*

Wenn eine oder mehrere Gleichungen die n Variabeln $x, y, z, \ldots$ enthalten, so nennt man jede Gruppe von Werten dieser letzten, welche allen jenen Gleichungen genügen, eine Lösung des gegebenen Systems. Diese Lösung ist bestimmt, wenn die Zahl der Gleichungen ebenfalls n ist; dagegen wird ein kontinuierlicher Uebergang von einer Lösung zu einer anderen möglich sein, wenn die Zahl der Gleichungen geringer ist; in diesem Falle nenne ich die Gesamtheit aller Lösungen ein Kontinuum, und zwar ein $i$faches, wenn i die Zahl der unabhängigen Variabeln (oder die Dimensionszahl des Kontinuums) ist; ferner ein lineares, wenn alle Gleichungen vom ersten Grade sind, ein höheres, wenn wenigstens eine Gleichung den ersten Grad übersteigt. Ein einfaches Kontinuum überhaupt werde ich Weg, und wenn es insbesondere noch linear ist, Strahl nennen. Unter dem Weg, der zwei Lösungen verbindet, ist die Gesamtheit aller Lösungen zu verstehen, welche von der Anfangs- bis zur Endlösung kontinuierlich auf einander folgen. Da von Kontinuen, welche nur durch eine Gleichung zwischen n Variabeln bestimmt sind, häufiger die Rede sein wird, als von solchen, deren Dimensionszahl zwischen 1 und $n - 1$ liegt, so werde ich ein $(n - 1)$faches Kontinuum meist schlechthin Kontinuum nennen, wenn kein Missverständnis zu besorgen ist.

Da einmal das Wort Lösung eine Gruppe von zusammengehörigen Werten der n Variabeln $x, y, \ldots$ bezeichnet, so werde ich dasselbe Wort noch behalten, wenn auch gar keine Gleichung vorliegt; und in diesem Sinne nenne ich die Gesamtheit aller Lösungen die Totalität und zwar $n$fache Totalität, wenn es nötig wird, die Zahl n aller Variabeln $x, y, \cdots$ anzugeben. Sind zwar alle Variabeln unter sich unabhängig, aber dem $n$fachen Integral $\int dx\,dy\,dz \ldots$ Grenzen gesetzt, durch welche keiner Variabeln ein unendliches Wachstum gestattet wird, so nenne ich die Gesamtheit aller Lösungen, über welche sich dieses Integral erstreckt, ein geschlossenes Stück der Totalität und das Integral selbst dessen Mass. Wie geschlossene Stücke eines Kontinuums von beliebiger Dimensionszahl gemessen werden können, wird sich im weiteren Verlaufe zeigen.

Wenn wir nun die Vorstellung von der Kontinuität aller in der $n$fachen Totalität enthaltenen Lösungen von dem speziellen Systeme, vermöge dessen in jeder Lösung die Variabeln gerade diese und keine anderen Werte erhalten, frei zu machen suchen, indem wir uns n Transformationsformeln, durch welche die alten Variabeln in neue übergehen können, denken, so ist es ganz natürlich, dass wir den linearen Transformationen vor allen anderen einen gewissen Vorzug geben. Die allereinfachste lineare Transformation besteht darin, dass man jede alte Variable als Summe einer Konstanten und einer gleichnamigen neuen Variabeln setzt, und durch eine solche Transformation sind wir immer im stande, irgend eine gegebene Lösung als eine erscheinen zu lassen, in der sämtlichen neuen Variabeln der Nullwert zukommt. Wenn wir daher eine Funktion suchen, welche auf die möglichst einfache Weise die Verschiedenheit zweier Lösungen misst, so werden nur die Unterschiede der gleichnamigen Variabeln darin eingehen. Sind diese Unterschiede alle bis auf einen gleich Null, so ist offenbar dieser, absolut genommen, das natürliche Mass der Verschiedenheit beider Lösungen, und überhaupt darf jene Funktion sich nicht ändern, wenn auch ein Unterschied negativ genommen wird, weil die Aenderung des Vorzeichens bei einer Variabeln die Aufeinanderfolge der Lösungen in der Totalität nicht ändert. Es ist ferner natürlich, anzunehmen, dass, wenn alle Unterschiede in demselben Verhältnisse vergrössert werden, auch jene Funktion in demselben Verhältnisse sich vergrössern muss. Die Funktion muss also in Beziehung auf die Unterschiede $x, y, z, \ldots$ der Variabeln homogen und vom ersten Grade sein. Endlich muss noch die Freiheit linearer Transformationen, durch welche die Form dieser Funktion nicht geändert wird, möglichst gross sein. Alle diese Rücksichten zusammen bestimmen uns, $\sqrt{x^2+y^2+z^2+\ldots\ldots}$ als Form dieser Funktion anzunehmen, wo die Quadratwurzel immer positiv zu verstehen ist. Wir beginnen demnach die Theorie der vielfachen Kontinuität mit folgender Definition:

Das Quadrat des Abstandes zweier Lösungen ist gleich der Summe der Quadrate der Unterschiede der gleichnamigen Variabeln.

Satz. Wenn drei reelle Lösungen gegeben sind, so giebt es zwischen denselben im ganzen drei Abstände. Die Summe von je zweien derselben kann nie kleiner sein als der dritte.

Beweis. Die Unterschiede der Variabeln seien $a, b, \ldots$, wenn man von der ersten Lösung zur zweiten fortgeht, und $a', b', \ldots$, wenn man von dieser zur dritten fortgeht, dann sind sie $a+a'$, $b+b'$, $\ldots$, wenn man von der ersten Lösung zur dritten fortgeht. Werden nun die Abstände mit r, r', r'' bezeichnet, so ist

$$r^2 = a^2+b^2+\ldots, \qquad r'^2 = a'^2+b'^2+\ldots, \qquad r''^2 = (a+a')^2+(b+b')^2+\ldots;$$

folglich

$$r''^2 - r^2 - r'^2 = 2\,(aa'+bb'+\ldots),$$

$$4\,r^2 r'^2 - (r''^2 - r^2 - r'^2)^2 = 4\left\{(ab'-a'b)^2+\text{etc.}\right\}.$$

Für reelle Lösungen ist also das Produkt

$$(r+r'+r'')\ (-r+r'+r'')\ (r-r'+r'')\ (r+r'-r'')$$

immer positiv. Nehmen wir nun alle drei Abstände als positiv und $r < r' < r''$ an, so sind ausser dem Faktor $r+r'-r''$ alle drei übrigen positiv, folglich muss auch dieser positiv sein, d. h. $r+r' > r''$.

Sollte $r+r' = r''$ werden, so müssten alle Ausdrücke $ab' - a'b$, etc. verschwinden, d. h. es müsste $a:b:c:\ldots = a':b':c':\ldots.$ sein.

Wenn die Unterschiede der Werte zweier Lösungen, einer konstanten A und einer veränderlichen P, proportional wachsen, so durchläuft die Lösung P einen Strahl; denn ihre Werte sind dann Funktionen ersten Grades einer einzigen unabhängigen Variabeln. Es sei B irgend eine von A verschiedene, in jenem Strahl enthaltene Lösung, die wir uns als fest denken. Wenn dann auf demselben Strahl irgend eine Lösung P auf A folgt und vor B vorhergeht, so ist immer der feste Abstand AB gleich der Summe der veränderlichen Abstände AP und PB.

Den Abstand AB denken wir uns daher fortan auch als Mass des Strahls, welchen die Lösung P von A bis nach B durchläuft.

Nehmen wir ausser den Lösungen A, B noch einige andere C, D, E an, welche nicht auf dem Strahle AB liegen, so ist leicht zu zeigen, dass die Summe der hier genannten Abstände grösser ist als der Abstand AB. Es ist nämlich $AC+CD > AD$, $AD+DE > AE$, $AE+EB > AB$, also $AC+CD+DE+EB > AB$. Jene vier Abstände, an einander gereiht, bilden aber ein einfaches Kontinuum, das von A bis B reicht.

Denken wir uns nun die n Variabeln der Lösung P als eben so viele beliebige Funktionen einer Unabhängigen, welche für einen Anfangswert derselben mit den Werten der Lösung A und für einen Endwert mit den Werten der Lösung B zusammenfallen und dazwischen keine Unterbrechung der Kontinuität erleiden, so beschreibt gleichsam die Lösung P einen von A bis B reichenden Weg, und es wird immer möglich sein, auf diesem eine hinreichende Menge von Lösungen P so zu verteilen, dass der Fehler, den man begeht, indem man den zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden Lösungen enthaltenen Weg durch ihren Abstand ersetzt, von einer höheren Ordnung wird, als dieser Abstand selbst, den wir uns als verschwindend klein denken. Daraus folgt, dass jener totale Weg AB, wofern er nicht gerade ein Strahl ist, immer grösser sein wird als der von einem Strahle beschriebene Abstand AB.

Sind $x, y, \ldots$ die Variabeln, $dx, dy, \ldots$ ihre Differentiale unter der Voraussetzung einer Unabhängigen, so ist $s = \int \sqrt{dx^2+dy^2+\ldots}$ die Länge des Weges, wenn das Integral von der Lösung A bis zur Lösung B reicht. Die Variationsrechnung zeigt, dass dieser Weg ein Minimum wird, wenn die Variabeln Funktionen ersten Grades sind.

§ 2. *Orthogonale Transformation der Variabeln.*

Werden die n Variabeln $x, y, \ldots$ durch solche lineare Funktionen von n neuen Variabeln $t, t', t'', \ldots$ ersetzt, dass der Ausdruck für den Abstand zweier Lösungen seine Form nicht ändert, so soll diese lineare Transformation eine orthogonale heissen.

Da im Ausdrucke für den Abstand r zweier Lösungen nur die Unterschiede ihrer gleichnamigen Werte vorkommen, so sind hier die Konstanten jener linearen Transformationsformeln von keinem Belang; und, wenn man sie weglässt, so sind die Differenzen des ursprünglichen Systems im übrigen dieselben Funktionen der Differenzen des zweiten Systems, wie die Variabeln des ersten von denen des zweiten. Es seien daher $x, y, \ldots$ die Differenzen der ursprünglichen, $t, t', t'', \ldots$ die der neuen Variabeln, oder, was auf dasselbe hinauskommt, $o, o, o, \ldots$ seien in beiden Systemen die Werte der ersten Lösung, $x, y, z, \ldots$ diejenigen der zweiten Lösung im alten, und $t, t' t'', \ldots$ im neuen Systeme. Dann sei

$$x = \alpha t + \alpha' t' + \cdots,$$
$$y = \beta t + \beta' t' + \cdots,$$
$$\text{etc.},$$

so wird

$$r^2 = x^2 + y^2 + \cdots = (\alpha^2 + \beta^2 + \cdots)\, t^2 + \text{etc.} + 2\,(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \cdots)\, tt' + \text{etc.},$$

und wenn $r^2 = t^2 + t'^2 + \text{etc.}$ sein soll, so müssen die Transformationselemente den Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \cdots &= 1, \text{ etc.} \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \cdots &= 0, \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

genügen. Es sei

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \alpha \,.\, \alpha' \,.\, \alpha'' \ldots\ldots \\ \beta \,.\, \beta' \,.\, \beta'' \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix},$$

so ist nach einem bekannten Satze:

$$\begin{vmatrix} \Sigma\alpha^2 \,.\, \Sigma\alpha\alpha' \,.\, \Sigma\alpha\alpha'' \ldots \\ \Sigma\alpha'\alpha \,.\, \Sigma\alpha'^2 \,.\, \Sigma\alpha'\alpha'' \ldots \\ \Sigma\alpha''\alpha \,.\, \Sigma\alpha''\alpha' \,.\, \Sigma\alpha''^2 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} = \varDelta^2,$$

also vermöge jener Bedingungen $\varDelta^2 = 1$, und $\varDelta$ entweder $= -1$ oder $= +1$. Wäre $\varDelta = -1$, so brauchte man nur eine der neuen Variabeln entgegengesetzt zu nehmen, um sogleich $\varDelta = 1$ zu erhalten. Wir wollen daher fortan $\varDelta = 1$ annehmen. Sind nun $a, b, c, \ldots$ die ergänzenden Elemente zu $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, d. h. ist

$$a = \frac{\partial \varDelta}{\partial \alpha}, \quad b = \frac{\partial \varDelta}{\partial \beta}, \quad \text{etc.},$$

so folgt $\Delta t = ax + by + cz + \cdots$, etc. Wenn man aber die Transformationsformeln resp. mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ multipliziert und addiert, so ist vermöge der Bedingungen (1): $t = \alpha x + \beta y + \cdots$, also, wenn $\Delta = 1$ vorausgesetzt wird, $a = \alpha$, $b = \beta$, etc., d. h. die ergänzenden Elemente sind den entsprechenden ursprünglichen gleich. Nun ist überhaupt

$$a\alpha + a'\alpha' + \cdots = \Delta, \text{ etc.,}$$
$$a\beta + a'\beta' + \cdots = 0, \text{ etc.,}$$

also

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \cdots = 1, \text{ etc.,}$$
$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \cdots = 0, \text{ etc.}$$

Mag man also die neuen Variabeln in die alten, oder diese in jene verwandeln, beide Verwandlungen sind durchaus ähnlich.

Die Unterschiede der gleichnamigen Werte zweier Lösungen A, B mögen fortan Projektionen ihres Abstandes $AB = r$ heissen. Dann ist in jedem orthogonalen Systeme das Quadrat des Abstandes r gleich der Summe der Quadrate seiner Projektionen, und dieser Satz ist als Definition eines orthogonalen Systems zu betrachten. Dann sind auch orthogonale Transformationen solche lineare Transformationen, durch welche irgend zwei orthogonale Systeme in einander übergehen.

Sind die Anfangslösung A und alle n Projektionen des Abstandes r gegeben, so ist dadurch die Endlösung B völlig bestimmt. Ist aber jene Anfangslösung frei und sind nicht die Projektionen selbst, sondern nur ihre $n - 1$ Verhältnisse gegeben, so sagen wir, die Richtung des Strahls sei bestimmt und nennen jene Projektionen, bei denen es somit nur auf ihre gegenseitigen Verhältnisse ankommt, die Richtungselemente dieses Strahls. Werden sämtliche Projektionen durch den Abstand dividiert, so mögen die Quotienten Richtungscosinus heissen; diese sind also Projektionen eines auf dem Strahle genommenen Abstandes 1.

Wenn zwei Strahlen gleiche Richtung haben, d. h. wenn die Richtungselemente des einen mit denen des andern proportional sind, so mögen sie parallel heissen.

Demnach sind die oben gebrauchten Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ im alten Systeme die Richtungscosinus derselben Richtung, welche im neuen Systeme durch die Gleichungen $t' = t'' = \cdots = 0$ bestimmt ist u. s. f., und $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ sind im neuen Systeme die Richtungscosinus der im alten durch $y = z = \cdots = 0$ bestimmten Richtung. Die Gleichung $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \cdots = 0$ drückt die Orthogonalität der beiden durch t und t' zu bezeichnenden Richtungen aus.

§ 3. *Ueber den Winkel zweier Richtungen.*

Es seien $x, y, z, \ldots$ die Projektionen eines Abstandes r und $x_1, y_1, z_1, \ldots$ diejenigen eines andern r_1, so geben die obigen orthogonalen Transformationsformeln:

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 + \cdots = tt_1 + t't'_1 + t''t''_1 + \cdots$$

Dieser Ausdruck bleibt also in jedem orthogonalen System immer derselbe. Wir setzen daher

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 + \cdots = rr_1 \cos w$$

und nennen w den Winkel der Richtungen der beiden Abstände r und r_1. Daraus folgt sogleich auch

$$rr_1 \sin w = \sqrt{(xy_1 - x_1y)^2 + (xz_1 - x_1z)^2 + \text{etc.}},$$

wo die unter dem Wurzelzeichen stehende Summe sich auf alle Kombinationen zweiter Klasse erstreckt.

Der Cosinus des Winkels zweier Richtungen ist gleich der Summe der Produkte der gleichnamigen Richtungscosinus.

Zwei Richtungen sind orthogonal, wenn die Summe der Produkte ihrer gleichnamigen Projektionen gleich Null ist.

§ 4. *Anwendung der orthogonalen Transformation zum Beweise des Satzes, dass der Strahl der kürzeste Weg sei zwischen zwei auf ihm befindlichen Lösungen.*

Es seien $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Richtungscosinus des gegebenen Strahls, so können immer $n-1$ andere Richtungen gefunden werden, welche mit jenem ein orthogonales System bilden. (Dabei bleiben $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Richtungscosinus frei.) Transformiert man dann die ursprünglichen Variabeln $x, y, \ldots$ in solche $t, t', t'', \ldots$, welche dem neuen System entsprechen, so ist der gegebene Strahl nunmehr dadurch bestimmt, dass nur t variabel bleibt, während $t', t'', \ldots$ konstante Werte erhalten. Ein Stück desselben ist also durch das Integral $\int dt$, irgend ein anderer dieselben Lösungen verbindender Weg dagegen durch das zwischen denselben Grenzen genommene Integral $\int \sqrt{dt^2 + dt'^2 + dt''^2 + \cdots}$ dargestellt. Vergleicht man die Formen beider Integrale, so sieht man unmittelbar, dass dieses grösser ist als jenes. Also ist auch das Integral $\int \sqrt{dx^2 + dy^2 + \cdots}$, zwischen zweien gegebenen Grenzlösungen genommen, ein Minimum, wenn die Variabeln lineare Funktionen einer Unabhängigen sind.

§ 5. *Mass des Paralleloschems.*

Das Mass V einer umschlossenen Totalität ist durch das $n$fache Integral $\int^{n} dx dy dz \ldots$ ausgedrückt. Hat nun das $(n-1)$fache Integral $\int^{n-1} dy dz \ldots$ einen konstanten, von x unabhängigen Wert A, und sind die auf x bezüglichen Grenzen zwei konstante Werte,

deren Unterschied a ist, so ist offenbar $V = aA$. Die erste Voraussetzung ist unter anderm erfüllt, wenn eine Grenzgleichung von der Form

$$F(y - p,\ z - q, \ldots.) = 0$$

gegeben ist, wo $p, q, \ldots.$ beliebige Funktionen der einzigen Variabeln x bezeichnen. Es kommen dann nur noch zwei Grenzgleichungen von der Form $x =$ const. hinzu, und das Integral V wird sich auf alle Werte von x erstrecken, welche zwischen diesen zwei Konstanten liegen. Sind insbesondere $p, q, \ldots.$ lineare Funktionen von x, so wird die durch $F = 0$ bezeichnete Grenze erzeugt durch die Bewegung eines Strahls, welcher stets mit dem durch $y = p, z = q, \ldots.$ bestimmten parallel bleibt. Die geschlossene Totalität V ist dann dem Cylinder der Geometrie zu vergleichen, wo A der Basis, a der Höhe entspricht, und der hier angedeutete allgemeine Satz kann symbolisch so ausgesprochen werden: Das Mass eines Cylinders ist gleich dem Produkte seiner Basis und Höhe.

Wenn nun die Grenze des $(n-1)$fachen Integrals A (der Basis) wiederum so beschaffen ist u. s. f., so wird zuletzt $V = abc \ldots$ Dann ist x zwischen zwei Konstante, deren Unterschied a, y zwischen zwei lineare Funktionen von x, deren Unterschied b, z zwischen zwei lineare Funktionen von x, y, deren Unterschied c u. s. w. eingeschlossen. Die Totalität wird somit zwischen n Paare von parallelen linearen Kontinuen eingeschlossen; sie heisse Paralleloschem. Wir dürfen immerhin annehmen, dass die Gleichungen für die n Anfangsgrenzen durch die Nullwerte sämtlicher Variabeln befriedigt werden. Nehmen wir je $n-1$ von diesen linearen Anfangsgleichungen zusammen, so bestimmen sie immer einen Strahl, den wir, durch das weggelassene Paar paralleler linearer Kontinuen begrenzt, Kante des Paralleloschems nennen. Dieses hat im ganzen $n \,.\, 2^{n-1}$ Kanten; da aber je 2^{n-1} parallel und gleich lang sind, so zerfallen sie in n Gruppen, von denen wir diejenige fixieren, wo die n Kanten vom Ursprung ausgehen. Von den n Gleichungen, von denen je eine durch ihre Weglassung einer Kante entspricht, ist die erste $x = 0$, die zweite $\alpha x + \beta y = 0$, die dritte $\alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0$ u. s. f. Lässt man die erste weg, so braucht im allgemeinen keine Variable zu verschwinden; lässt man die zweite weg, so bleibt $x = 0$; lässt man die dritte weg, so bleiben $x = 0$, $y = 0$; lässt man die vierte weg, so bleiben $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ u. s. f., d. h. für die erste Kante verschwindet keine Projektion und ihre erste Projektion ist a; für die zweite Kante ist die erste Projektion o, die zweite b; für die dritte Kante sind die erste und zweite Projektion o, die dritte c u. s. f. Wenn also die Projektionen der n Kanten in ein quadratförmiges Schema gebracht werden, so befinden sich darin auf der einen Seite der Diagonale lauter Nullen, und V ist gleich dem Produkt der in die Diagonale fallenden Projektionen, also gleich der Determinante aller Projektionen. Wenn wir nun die Variabeln in ein neues orthogonales System transformieren, so ist die Determinante der alten Projektionen bekanntlich gleich dem Produkt der Determinante der Transformations-

elemente und der Determinante der neuen Projektionen, also (da jene für ein orthogonales neues System gleich 1 ist) gleich dieser. Da aber, wie wir sogleich zeigen werden, für jedes Paralleloschem immer ein orthogonales System von der Beschaffenheit jenes alten gefunden werden kenn, so haben wir den allgemeinen Satz:

Das Mass eines Paralleloschems ist gleich der Determinante der orthogonalen Projektionen seiner Kanten.

Die Projektionen der Kanten eines Paralleloschems in irgend einem orthogonalen Systeme seien $a, b, c, \ldots$; $a', b', c', \ldots$; $a'', b'', c'' \ldots$; etc. Man soll dieses System in ein neues orthogonales transformieren, zu welchem das Paralleloschem die oben vorausgesetzte Beziehung hat. Denkt man sich sowohl die Kanten als die neuen Variabeln $X, Y, \ldots$ in einer der oben angenommenen entgegengesetzten Ordnung, so sind die Projektionen im gesuchten System:

$$\begin{array}{lllll} A, & o, & o, & o, & \ldots \\ A', & B', & o, & o, & \ldots \\ A'', & B'', & C'', & o, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Es sei ferner

$$\begin{aligned} x &= \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z + \cdots, \\ y &= \beta X + \beta' Y + \beta'' Z + \cdots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

so hat man

$$\begin{array}{r|l|l|l} a = A\alpha & a' = A'\alpha + B'\alpha' & a'' = A''\alpha + B''\alpha' + C''\alpha'' & \\ b = A\beta & b' = A'\beta + B'\beta' & b'' = A''\beta + B''\beta' + C''\beta'' & \ldots . \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

Durch die Gleichungen der ersten Vertikalreihe sind

$$A = \sqrt{a^2 + b^2 + \cdots} \quad \text{und } \alpha = \frac{a}{A}, \ \beta = \frac{b}{A}, \ldots .$$

bestimmt. Da das neue System orthogonal sein soll, so liefert die zweite Vertikalreihe

$$A' = a'\alpha + b'\beta + \cdots$$

und, wenn man nun den gefundenen Wert von A substituiert, auch

$$B' = \sqrt{(a' - A'\alpha)^2 + (b' - A'\beta)^2 + \cdots}, \ \alpha' = \frac{a' - A'\alpha}{B'}, \ldots .$$

Die dritte Vertikalreihe giebt

$$A'' = a''\alpha + b''\beta + \cdots, \quad B'' = a''\alpha' + b''\beta' + \cdots$$

und, wenn diese zwei Werte substituiert werden, endlich auch $C'', \alpha'', \beta'', \ldots$ u. s. f.

Jede im Paralleloschem enthaltene Lösung ist durch die Gleichungen

$$x = \lambda a + \lambda' a' + \lambda'' a'' + \cdots, \quad y = \lambda b + \lambda' b' + \lambda'' b'' + \cdots, \text{ etc.}$$

dargestellt, wo die unbestimmten Faktoren $\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots$ positive, echte Brüche bezeichnen.

Wird die Determinante $V = \Sigma \pm ab'c'' \ldots$ mit sich selbst multipliziert, so ist das Produkt wiederum gleich einer Determinante, deren Elemente

$$\begin{array}{lll} a^2 + b^2 + c^2 + \cdots, & aa' + bb' + cc' + \cdots, & aa'' + bb'' + cc'' + \cdots, \text{ etc.}, \\ a'a + b'b + c'c + \cdots, & a'^2 + b'^2 + c'^2 + \cdots, & a'a'' + b'b'' + c'c'' + \cdots, \text{ etc.}, \\ & \text{etc.} & \end{array}$$

sind. Bezeichnet man nun die Kanten des Paralleloschems mit $k, k', k'', \ldots$ und die von je zweien gebildeten Winkel mit $\angle\,(kk'), \cdots$, so ist z. B.

$$a^2 + b^2 + \cdots = k^2, \quad aa' + bb' + \cdots = kk' \cos \angle\,(kk')$$

und man hat

$$V^2 = \begin{vmatrix} k^2 & . \; kk' \cos \angle\,(kk') & . \; kk'' \cos \angle\,(kk'') & . \; \ldots \\ k'k \cos \angle\,(k'k) & . \; k'^2 & . \; k'k'' \cos \angle\,(k'k'') & . \; \ldots \\ k''k \cos \angle\,(k''k) & . \; k''k' \cos \angle\,(k''k') & . \; k''^2 & . \; \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

$$(kk'k'')^2 \times \begin{vmatrix} 1 & . \; \cos \angle\,(kk') & . \; \cos \angle\,(kk'') & . \; \ldots \\ \cos \angle\,(k'k) & . \; 1 & . \; \cos \angle\,(k'k'') & . \; \ldots \\ \cos \angle\,(k''k) & . \; \cos \angle\,(k''k') & . \; 1 & . \; \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} .$$

Das Mass des Paralleloschems ist also das Produkt aller seiner Kanten, multipliziert mit der Quadratwurzel der Determinante, deren allgemeines Element der Cosinus des Winkels ist, den jede Kante mit jeder Kante bildet.

Ist $V = 0$, so genügen alle Kanten einer und derselben linearen Gleichung, sie fallen in eine und dieselbe Ebene und umgekehrt. Dann muss also auch die Determinante der Cosinus verschwinden. Sind die Winkel, welche $n - 1$ vom Ursprung ausgehenden Strahlen mit einander bilden, beliebig gegeben, und es soll ein $n$ter Strahl in dem durch jene bestimmten linearen Kontinuum liegen, so kennen wir also eine Bedingung, welcher die $n - 1$ Winkel, die dieser mit den übrigen Strahlen bildet, genügen müssen. Setzt man $n = 4$, so passt das Gesagte auf den Fall, wo im Raume vier Strahlen von einem Punkte ausgehen, und die obige Formel liefert uns unmittelbar die Bedingung, welcher die Cosinus der sechs Seiten eines sphärischen Vierecks genügen müssen. Nennen wir drei von einer Ecke ausgehende Seiten a, b, c, ihre Gegenseiten a', b', c', so ist die Bedingung:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & . \; \cos a & . \; \cos b & . \; \cos c \\ \cos a & . \; 1 & . \; \cos c' & . \; \cos b' \\ \cos b & . \; \cos c' & . \; 1 & . \; \cos a' \\ \cos c & . \; \cos b' & . \; \cos a' & . \; 1 \end{vmatrix} = 1 - \sum_6 \cos^2 a + 2 \sum_4 \cos a' \cos b' \cos c' + \sum_3 \cos^2 a \cos^2 a' - 2 \sum_3 \cos a \cos a' \cos b \cos b' .$$

Fällt man aus einem innerhalb eines Tetraeders befindlichen Punkte Senkrechte auf seine Ebenen, so ist jeder von zwei Senkrechten gebildete Winkel das Supplement eines Flächenwinkels des Tetraeders. Man hat also in der letzten Gleichung auch die Bedingung, durch welche die sechs Flächenwinkel eines Tetraeders verbunden sind.

§ 6. *Ueber schiefe Systeme.*

Wenn wir die auf das vorige Paralleloschem bezüglichen Bezeichnungen behalten und

$$x = \frac{at}{k} + \frac{a't'}{k'} + \frac{a''t''}{k''} + \cdots, \quad y = \frac{bt}{k} + \frac{b't'}{k'} + \frac{b''t''}{k''} + \cdots, \text{ etc.}$$

setzen, so stellen diese Gleichungen eine Lösung dar, zu der man vom Ursprung aus auf einem gebrochenen Wege gelangt, der aus den n Abständen $t, t', t'', \ldots$ zusammengesetzt ist, welche resp. mit den Kanten $k, k', k'', \ldots$ des Paralleloschems parallel sind. Denkt man sich die Abstände $t, t', t'', \ldots$ variabel, so repräsentieren sie ein schiefes System. Setzen wir jetzt $r^2 = x^2 + y^2 + \cdots$, so bekommen wir als Abstand irgend einer Lösung $(t, t', t'', \ldots)$ vom Ursprung:

$$r = \sqrt{t^2 + t'^2 + t''^2 + \cdots + 2tt' \cos \angle (kk') + \cdots + 2t't'' \cos \angle (k'k'') + \cdots}$$

Durch die $\frac{1}{2} n (n-1)$ Cosinus, welche in diesem Ausdruck für einen Abstand r, dessen schiefe Projektionen $t, t', t'', \ldots$ sind, vorkommen, ist die Beschaffenheit des schiefen Systems völlig bestimmt. Wird der Ursprung festgehalten, so ist die Lage eines schiefen Systems durch $n(n-1)$ Data bestimmt, die Lage irgend eines orthogonalen Systems hingegen nur durch $\frac{1}{2} n (n-1)$ Data. Da es nun für die wesentliche Beschaffenheit des schiefen Systems gleichgültig ist, auf welches orthogonale System dasselbe bezogen werde, so hat man diese Zahl von jener abzuziehen, und es bleiben also wirklich nur $\frac{1}{2} n (n-1)$ wesentliche Data für das schiefe System übrig; als solche kann man die Winkel $\angle (kk'), \ldots$, oder die Koeffizienten der Produkte der Variabeln im Ausdruck für das Quadrat des Abstandes r ansehen.

Das Element der Totalität ist im schiefen System ein Paralleloschem, dessen Kanten $dt, dt', dt'', \ldots$ mit den Axen $k, k', k'', \ldots$ parallel sind. Bezeichnen wir die Determinante der Cosinus der Winkel $\angle (kk'), \angle (kk''), \ldots$ mit Δ^2, so ist dieses Element

$$dV = \Delta \,.\, dt\, dt'\, dt'' \ldots .$$

§ 7. *Mass der Pyramide.*

Es ist klar, dass das Integral $P = \Delta \int dt\, dt'\, dt'' \ldots$ durch die Bedingungen

$$t > 0,\; t' > 0, \ldots, \frac{t}{k} + \frac{t'}{k'} + \frac{t''}{k''} + \cdots < 1$$

völlig begrenzt ist. Wir nennen ein solches von $n+1$ linearen Kontinuen umschlossenes Integral P eine Pyramide. Setzt man $t = ku$, $t' = k'u'$, $t'' = k''u''$, ..., so wird

$$P = \Delta \,.\, kk'k'' \ldots \times \int^{n} du\, du'\, du'' \ldots$$

mit den Grenzen $u > 0$, $u' > 0$, $u'' > 0, \ldots$, $u + u' + u'' + \cdots < 1$; da das Integral keine Konstanten enthält, so kann es durch $f(n)$ bezeichnet werden. Die vorletzte Integration:

$$\int^{n-1} du'\, du''\, du''' \ldots \left[u' > 0,\; u'' > 0, \ldots,\; u' + u'' + u''' + \cdots < 1 - u\right].$$

Man setze $u' = (1-u)\,v'$, $u'' = (1-u)\,v''$, etc., so wird

$$\int^{n-1} du'\, du'' \ldots = (1-u)^{n-1} \int^{n-1} dv'\, dv''\, dv''' \ldots \left[v' > 0,\; v'' > 0, \ldots,\; v' + v'' + \cdots < 1\right]$$

$$= (1-u)^{n-1} f(n-1);$$

$$f(n) = f(n-1) \,.\int_0^1 (1-u)^{n-1}\, du = \frac{f(n-1)}{n} = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n}\,,$$

weil

$$f(1) = \int du \left[u > 0,\; u < 1\right] = 1$$

ist. Es ist also

$$P = \frac{\Delta\,.\,kk'k'' \ldots}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots\ldots n} = \frac{V}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots\ldots n}\,.$$

Die Pyramide ist gleich dem Paralleloschem, das mit ihr n von einer Lösung ausgehende Kanten gemein hat, dividiert durch die Permutationszahl

Wir wollen die Aufgabe noch aus einem allgemeineren Gesichtspunkte betrachten. Denken wir uns ein geschlossenes Stück eines linearen Kontinuums, für welches die orthogonale Variable x konstant ist, so können wir sein Mass durch

$$S = \int^{n-1} dy\, dz \ldots$$

ausdrücken, gleich wie wenn es ein Stück einer $(n-1)$fachen Totalität wäre. Die Grenze werde durch den Durchschnitt irgend eines höhern Kontinuums gebildet, dessen Gleichung die Form

$$F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots\right) = 0$$

habe. Setzt man nun $y = xu'$, $z = xu''$, ..., so wird

$$S = x^{n-1} \int^{n-1} du'\, du'' \ldots \text{ mit der Grenze } F(u', u'', \ldots) = 0.$$

Bezeichnen wir mit U den Wert des Integrals $\int du'\, du'' \ldots$, welcher offenbar nur durch die Natur der begrenzenden Gleichung $F = 0$ bedingt ist und daher konstant

bleibt, wenn auch x variiert, so haben wir $S = U . x^{n-1}$. Variiert nun x von 0 bis h, so entsteht eine geschlossene Totalität P, begrenzt vom linearen Kontinuum $x = h$ und vom höhern

$$F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots\right) = 0;$$

ihr Mass ist

$$P = U \int_0^h x^{n-1}\, dx = U . \frac{h^n}{n}.$$

Für $x = h$ werde $S = B$, so ist $B = U . h^{n-1}$ und

$$P = \frac{1}{n} h B.$$

Nennen wir nun die geschlossene Totalität P einen Kegel, B seine Basis, den Ursprung Spitze und den orthogonalen Abstand h dieser Spitze vom linearen Kontinuum der Basis B die Höhe, so haben wir den Satz:

Das Mass eines Kegels ist der $n$te Teil des Produkts seiner Basis und Höhe.

Setzt man die Basis wieder als Kegel einer $(n-1)$fachen Totalität voraus u. s. f., so erhält man den frühern speziellern Satz über das Mass der Pyramide.

§ 8. *Mass der Pyramide, ausgedrückt durch ihre $\frac{1}{2} n\,(n-1)$ Kanten.*

Bezeichnen wir die als Ursprung angenommene Ecke durch o, die übrigen durch $1, 2, \ldots n$ und die von jenem nach diesen gehenden Kanten durch $k_1, k_2, \ldots k_n$, ihre orthogonalen Projektionen durch $a, b, c, \ldots$ mit entsprechenden Zeigern, ferner das Quadrat der Kante, welche die mit den Ziffern λ, μ bezeichneten Ecken verbindet, durch $(\lambda\mu)$, so sind die Projektionen dieser Kante

$$a_\mu - a_\lambda,\ b_\mu - b_\lambda, \ldots, \text{ also } (\lambda\mu) = (a_\mu - a_\lambda)^2 + (b_\mu - b_\lambda)^2 + \text{etc.}$$

$$= k_\mu^2 + k_\lambda^2 - 2 k_\lambda k_\mu \cos \angle\, (k_\lambda k_\mu); \text{ folglich}$$

$$(\lambda\mu) - (o\lambda) - (o\mu) = 2 k_\lambda k_\mu \cos \angle\, (k_\lambda k_\mu),$$

und es wird $(\lambda\lambda) = o$, $(\lambda\mu) = (\mu\lambda)$ sein. Betrachten wir nun eine Determinante Ω, deren allgemeines Element $(\lambda\mu) + \omega$ ist, und wo in jeder Horizontalreihe die Zahl μ und in jeder Vertikalreihe die Zahl λ die Werte $0, 1, 2, 3, \ldots n$ durchläuft und subtrahieren zuerst die Elemente der Horizontalreihe $(\lambda = o)$ von den entsprchenden Elementen aller übrigen Horizontalreihen, so wird in diesen das allgemeine Element $(\lambda\mu) - (o\mu)$. Subtrahieren wir ferner die Elemente der Vertikalreihe $(\mu = o)$ von den entsprechenden Elementen aller

übrigen Vertikalreihen, so wird in diesen das allgemeine Element $(\lambda\mu) - (o\mu) - ((\lambda o) - (oo))$ $= (\lambda\mu) - (o\lambda) - (o\mu) = -2k_\lambda k_\mu \cos\angle(k_\lambda k_\mu)$, und ω bleibt nur in dem Element ($\lambda = o$, $\mu = o$) noch übrig. Also ist Ω eine lineare Funktion von ω, in welcher der Koeffizient von ω gleich

$$\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\omega} = (-2)^n\, V^2$$

ist, wenn V^2, wie früher, die Determinante der Elemente $k_\lambda k_\mu \cos\angle(k_\lambda k_\mu)$ bezeichnet, wo sowohl λ als μ die Werte $0, 1, 2, 3, \ldots n$ durchläuft. Also ist

$$V = \sqrt{\frac{1}{(-2)^n}\,\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\omega}}, \text{ und endlich } P = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\sqrt{\frac{1}{(-2)^n}\,\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\omega}}.$$

Für $n = 3$ findet man

$$P = \frac{1}{12}\sqrt{\sum_3 \Big[(01) + (23)\Big]\Big[-(01)(23) + (02)(13) + (03)(12)\Big] - \sum_4 (12)(23)(13)}.$$

Wird dieser Ausdruck gleich Null gesetzt, so hat man die Relation, durch welche die Quadrate der sechs Seiten eines Vierecks verbunden sind. Für $n = 4$ ist

$$P = \frac{1}{96}\sqrt{\left\{\begin{array}{c}\sum\limits_{15}(01)^2(23)^2 - 2\sum\limits_{30}(01)^2(23)(34) - 4\sum\limits_{10}(01).(23)(34)(42) \\ -\,2\sum\limits_{15}(01)(12)(23)(30) + \sum\limits_{60}(01)(12)(23)(34)\end{array}\right\}}.$$

(Die unter das Summenzeichen gesetzten Ziffern geben die Zahl der Glieder an, welche jede Summe enthält.) Das Verschwinden dieses letzten Ausdrucks ist die Relation zwischen den Quadraten der zehn Entfernungen von fünf beliebigen Punkten im Raume.

Sind für ein beliebiges n alle $\frac{1}{2}n(n-1)$ Kanten der Pyramide der Einheit gleich, so ist

$$P = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\sqrt{\frac{n+1}{2^n}}.$$

§ 9. *Anwendung von § 6 auf die Verwandlung vielfacher Integrale.*

Es sei T eine Funktion der n Variabeln $x, y, z, \ldots$ und $S = \int^n T\,dx\,dy\,dz \ldots$. Man soll dasselbe Integral durch die n neuen Variabeln $t, t', t'' \ldots$ ausdrücken, wenn $x, y, \ldots$ als unter sich unabhängige Funktionen derselben gegeben sind.

Fassen wir $x, y, \ldots$ als Variabeln eines orthogonalen Systems auf, so ist das Produkt $dx\,dy \ldots$ das Element einer von den Integrationsgrenzen umschlossenen Totalität. Wird jedes solche Element mit dem der betreffenden Lösung entsprechenden Werte der Funktion T multipliziert und die Summe aller innerhalb des gegebenen Kontinuums

fallenden Produkte genommen, so hat man das Integral S. Wenn nun die Incremente von T innerhalb der gegebenen Grenzen überall von derselben Ordnung sind, wie die unendlich kleinen Abstände je zweier Lösungen, so steht es offenbar frei, das gegebene Stück der Totalität in Elemente von anderer Form einzuteilen, das Mass eines jeden mit T zu multiplizieren und die Summe aller dieser Produkte zu nehmen. Da der Fehler jedes Produkts von einer höhern Ordnung ist als das Mass des Elements, so wird der Fehler der Summe von einer verschwindend kleinen Ordnung sein und daher das neue Integral mit S zusammenfallen. Wird nun das gegebene Stück der Totalität durch Kontinuen, welche den Gleichungen $t = \text{const.}$, $t' = \text{const.}$, $t'' = \text{const.}$, ... entsprechen, in Elemente zerschnitten, so ist ein solches Element ein schiefes Paralleloschem, dessen erste Kante die Projektionen $\frac{\partial x}{\partial t}\,dt$, $\frac{\partial y}{\partial t}\,dt$, ..., die zweite die Projektionen $\frac{\partial x}{\partial t'}\,dt'$, $\frac{\partial y}{\partial t'}\,dt'$ ..., u. s. f. hat. Sein Mass ist also

$$\left(\Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial t}\,\frac{\partial y}{\partial t'}\,\frac{\partial z}{\partial t''}\ldots\right) \times dt\,dt'\,dt'' \ldots,$$

wo die Summe die Determinante der partiellen Differentialkoeffizienten bedeutet. Das Integral verwandelt sich demnach in

$$S = \int T\left(\Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial t}\,\frac{\partial y}{\partial t'}\,\frac{\partial z}{\partial t''}\ldots\right) dt\,dt'\,dt'' \ldots$$

§ 10. *Ueber Polyscheme.*

Wenn das $n$fache Integral $\overset{n}{\int} dx\,dy\,dz \ldots$ durch lauter Gleichungen ersten Grades vollständig begrenzt wird, so dass keine der Gleichungen bei der Begrenzung als überflüssig erscheint, so nennen wir die geschlossene Totalität, deren Mass jenes Integral ist, ein Polyschem P_n. Seine Grenzkontinua sind durch jene linearen Gleichungen dargestellt und ihre Zahl kann nicht kleiner als $n+1$ sein. Fixieren wir eines dieser Grenzkontinua, so erscheint es uns, wenn wir nur die in ihm befindlichen Lösungen betrachten, welche zugleich innerhalb jenes Integrals liegen, als ein geschlossenes lineares Kontinuum. Wir können dann das ursprüngliche System immer so orthogonal transformieren, dass eine neue Variable in der ganzen Ausdehnung dieses linearen Kontinuums verschwindet. Mehrere jener ursprünglichen Grenzgleichungen, deren Zahl wenigstens n betragen muss, werden dann in ihrer transformierten (offenbar wieder linearen) Gestalt, wo sie nur die $n-1$ übrigen neuen Variabeln enthalten werden, zur Umschliessung des fixierten Grenzkontinuums dienen. Da eine Variable nun ganz aus der Betrachtung wegfällt, so ist alles wieder so, wie in einer Totalität, aber einer bloss $(n-1)$fachen; das geschlossene Grenzkontinuum hat ein dem ursprünglichen ähnliches Integral, das aber nur $(n-1)$fach ist, zum Mass; innerhalb der von den $(n-1)$ übrigen neuen

Variabeln gebildeten Totalität ist es daher auch ein Polyschem P_{n-1}. Das gegebene P_n ist also wenigstens von $n+1$ P_{n-1} umschlossen, jedes von diesen wenigstens von n P_{n-2} u. s. f. Im allgemeinen schneiden sich drei P_{n-1}, als unbegrenzte lineare Kontinua aufgefasst, erst in einem $(n-3)$fachen, linearen Kontinuum, und wenn sie sich schon in einem $(n-2)$fachen linearen Kontinuum schneiden, so sind ihre Gleichungen nicht mehr unabhängig von einander. Tritt ein solcher spezieller Fall ein, so können doch nicht alle drei (oder mehrere) P_{n-1}, als begrenzte Gebilde aufgefasst, das fragliche P_{n-2} in seiner ganzen Ausdehnung gemein haben; wir zerlegen es dann in Stücke, deren jedes in seiner ganzen Ausdehnung immer nur zweien nachbarlichen P_{n-1} gemein ist.

Wir wollen daher durchweg annehmen, dass ein im Umschluss des P_n vorkommendes P_{n-2} immer nur zweien P_{n-1} und dann in seiner ganzen Ausdehnung gemeinschaftlich sei; hingegen zugeben, dass ein P_{n-3} nicht nur wenigstens dreien, sondern auch mehreren nachbarlichen P_{n-1} gemein sein könne: ein P_{n-4} wenigstens vieren oder auch mehreren P_{n-1} u. s. f.

Wenn keine zwei der P_{n-1}, aus denen der Umschluss eines P_n besteht, sich schneiden, und dasselbe doch eine einzige zusammenhängende Totalität bildet, so nennen wir es nicht überschlagenes Polyschem, im entgegengesetzten Falle ein überschlagenes. Wenn keine innerhalb des gegebenen Polyschems befindliche Lösung dem verlängerten Kontinuum eines seiner Grenz-P_{n-1} angehört, d. h. wenn für sämtliche innerhalb des Polyschems fallende Lösungen das Polynom einer jeden Grenzgleichung immer dasselbe Vorzeichen behält, wenn z. B. alle Polynome stets positiv bleiben, so ist das Polyschem konvex. Durch eine innere Lösung sei ein unbegrenzter Strahl gezogen, so kann auf diesem die Lösung nur nach den zwei entgegengesetzten Richtungen sich fortbewegen; man denke sich die Werte der Lösung fortwährend in den Polynomen aller Grenzgleichungen substituiert. In demselben Augenblicke nun, wo der Wert eines einzigen dieser Polynome ein entgegengesetztes Vorzeichen angenommen hat, ist auch die bewegte Lösung ausserhalb des Polyschems getreten. Das Gleiche gilt für die Bewegung in der entgegengesetzten Richtung. Folglich kann der Umschluss eines konvexen Polyschems von einem Strahl in nicht mehr als zwei Lösungen geschnitten werden.

Wird der Umschluss eines Polyschems P_n, ohne eines der P_{n-1} zu zerbrechen, so in zwei Teile geteilt, dass jeder ein einziges gebrochenes $(n-1)$faches Kontinuum bildet, so soll jeder dieser Teile eine offene polyschematische Figur heissen.

Satz. Wenn unter der Voraussetzung einer $n$fachen Totalität in einem Polyschem oder einer offenen polyschematischen Figur die Zahl der Grenzlösungen mit a_0, die der Grenzstrahlen mit a_1, überhaupt die Zahl der $i$fachen polyschematisch geschlossenen linearen Grenzkontinuen P_i mit a_i bezeichnet wird, und ist endlich $a_n = 1$, wenn ein geschlossenes Polyschem, $a_n = 0$, wenn eine offene polyschematische Figur vorliegt, so ist

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1} + (-1)^n a_n = 1.$$

Beweis. Ich nehme an, der Satz sei für die $(n-1)$fache Totalität schon bewiesen, und bezeichne in der $n$fachen Totalität für irgend eine offene polyschematische Figur die linke Seite der fraglichen Gleichung mit A_n. Wird nun dieser Figur ein neues P_{n-1} angefügt, ohne dass sie dadurch zu einem geschlossenen Polyschem wird, so ist die diesem ganzen geschlossenen P_{n-1} entsprechende Zahl A_{n-1} nach der Voraussetzung gleich 1. Es hat aber mit der anfänglichen Figur eine derselben $(n-1)$fachen Totalität angehörende, offene polyschematische Figur gemein, deren Zahl A_{n-1} ebenfalls gleich 1 ist. Da diese zweite Zahl A_{n-1} schon in der anfänglichen Zahl A_n enthalten ist, so muss sie, bei der Berechnung des Zuwachses von A_n, von der ersten Zahl A_{n-1} abgezogen werden; der Rest ist 0. Die Zahl a_n ist auch jetzt noch 0 wie vorher. Die anfängliche Zahl A_n hat also durch das Anfügen eines neuen P_{n-1} keine Veränderung erfahren. Ist hingegen die anfänglich offene Figur so beschaffen, dass sie durch das Anfügen eines neuen P_{n-1} zu einem geschlossenen Polyschem wird, so verändern sich die Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-2}$ nicht, die Zahl a_{n-1} wächst um 1, und die Zahl a_n geht aus 0 in 1 über. Da aber die Zahlen a_{n-1} und a_n in dem fraglichen Ausdruck mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen sind, so wird auch in diesem Falle der Wert A_n dieses Ausdruckes nicht geändert. Nehmen wir nun nach und nach ein P_{n-1} nach dem andern weg, so dass immer eine offene polyschematische Figur übrig bleibt, so wird diese zuletzt aus einem einzigen P_{n-1} bestehen, und, da ohnehin $a_n = 0$ ist, so wird das entsprechende A_n gleich sein der Zahl A_{n-1} dieses einzigen P_{n-1}, also nach der Voraussetzung gleich 1. Nun ist für $n = 1$ das P_1 ein begrenzter Strahl, also $a_0 = 2$, $a_1 = 1$; folglich $A_1 = a_0 - a_1 = 1$. Der Satz ist somit bewiesen.

§ 11. *Berechnung des Masses eines Polyschems.*

Durch ein $(n-2)$faches lineares Kontinuum und eine ausserhalb desselben befindliche Lösung kann immer ein $(n-1)$faches lineares Kontinuum, und zwar nur eines, gelegt werden. Denn, wenn jenes durch die zwei simultanen Gleichungen $u = 0$, $v = 0$, wo u, v lineare Funktionen der Variabeln bedeuten, bestimmt ist, so ist jedes durchgehende $(n-1)$fache lineare Kontinuum in der Gleichung $u + \lambda v = 0$, wo λ einen willkürlichen Faktor bezeichnet, enthalten. Soll es aber durch die gegebene Lösung gehen und erhalten für diese die Funktionen u, v resp. die bestimmten Werte p, q, so muss auch $p + \lambda q = 0$ sein. Hiedurch ist λ bestimmt, und man hat $qu - pv = 0$ als Gleichung des verlangten linearen Kontinuums.

Denken wir uns nun das gegebene Polyschem P_n als konvex, wählen innerhalb desselben eine beliebige Lösung und fixieren dann irgend ein P_{n-1} des Umschlusses, so ist auch dieses wieder von vielen P_{n-2} umschlossen, und wir legen durch jedes derselben und jene innere Lösung ein lineares Kontinuum; dann erhalten wir einen polyschematischen Kegel, welcher die Lösung zur Spitze und jenes fixierte P_{n-1} zur Basis hat.

Wird das Polynom der Gleichung dieser Basis für jene Lösung ausgewertet und durch die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Koeffizienten der Variabeln dividiert, so hat man die Höhe des Kegels gefunden. Kennt man ferner das Mass der Basis P_{n-1}, multipliziert es mit der Höhe und dividiert durch n, so hat man das Mass des Kegels. Da endlich das gegebene Polyschem P_n in lauter solche Kegel zerfällt, so ist sein Mass gleich der Summe der Masse aller dieser Kegel.

Wie die Aufgabe, ein P_n zu berechnen, auf die für ein P_{n-1} zurückgeführt ist, so hängt auch diese wieder von der Berechnung eines P_{n-2} ab u. s. f. Zuletzt hängt alles von der Berechnung eines P_1 oder eines Abstandes ab. Die Berechnung der Höhen und die orthogonalen Transformationen, welche jeweilen zur Wegschaffung einer Variabeln, deren Verschwinden einer Basis entsprechen soll, gemacht werden müssen, erfordern immer eine Ausziehung der Quadratwurzel aus einer Summe von Quadraten, während der Natur der Aufgabe nur rationale Rechnungen wesentlich eignen.

Die Zahl der zu berechnenden Kegel wird geringer, wenn man eine Grenzlösung des P_n zu ihrer gemeinschaftlichen Spitze wählt. Nehmen wir nun an, jede Basis P_{n-1} sei schon in lauter Pyramiden (∞^{n-1}) zerteilt, so ist jede von diesen die Basis einer Pyramide (∞^n), welche jene Grenzlösung zur Spitze hat. Wenn man also überhaupt ein P_{n-1} in lauter Pyramiden zerlegen kann, so ist dieses auch für jedes P_n möglich. Nun kann man aber jedes P_2 oder Vieleck in lauter Pyramiden (∞^2) oder Dreiecke zerlegen, folglich kann auch jedes Polyschem (∞^n) in lauter Pyramiden (∞^n) zerlegt werden. Das Mass einer solchen ist der $1 . 2 . 3 \ldots n$te Teil der Determinante der Projektionen von n ihrer Kanten, die von einer und derselben Ecke ausgehen. Hiedurch ist also die Berechnung des Masses eines Polyschems auf lauter rationale Rechnungen zurückgeführt.

§ 12. Ueber die Projektionen eines linearen mfachen Kontinuums, wenn m zwischen 1 und n liegt.

Da das Kontinuum in paralleloschematische Elemente zerlegt werden kann, so wollen wir das Mass S eines Paralleloschems (∞^m) untersuchen, wenn m geringer ist als die Dimensionszahl n der Totalität. Transformieren wir die Variabeln orthogonal, so dass für das gegebene Kontinuum $n - m$ der neuen Variabeln verschwinden, so haben wir es bei der Berechnung des Paralleloschems (∞^m) nur mit den übrigen m Variabeln zu tun. Es gilt also der frühere Satz (§ 5), wenn darin m statt n gesetzt wird. Sind nun $k_1, k_2, \ldots k_m$ die Kanten des Paralleloschems $_m$, so ist

$$S^2 = \begin{vmatrix} k_1^2 & . \; k_1 k_2 \cos \angle (k_1 k_2) & . \; k_1 k_3 \cos \angle (k_1 k_3) & \ldots & . \\ k_2 k_1 \cos \angle (k_2 k_1) \; . & k_2^2 & . \; k_2 k_3 \cos \angle (k_2 k_3) & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \end{vmatrix}$$

Sind nun $a_1, b_1, c_1, \ldots$ die n Projektionen von k_1 im ursprünglichen System, so haben wir früher gesehen, dass

$$k_1 k_2 \cos \angle (k_1 k_2) = a_1 a_2 + b_1 b_2 + \cdots$$

ist. Bezeichnen jetzt $f, g, h, \ldots$ irgend m der n Projektionen $a, b, c, \ldots$, so ist nach einem bekannten Satze:

$$S^2 = \Sigma \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 & \ldots \\ f_2 & g_2 & h_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_m & g_m & h_m & \ldots \end{vmatrix}^2,$$

wenn die Summe sich auf alle Kombinationen $fgh\ldots$ ohne Wiederholungen und $m$ter Klasse aus den n Elementen $a, b, c, \ldots$ erstreckt. Jede der $\binom{n}{m}$ Determinanten, aus deren Quadraten diese Summe besteht, nennen wir eine Projektion von S auf das entsprechende $m$fache lineare Kontinuum, für welches alle $n - m$ mit $f, g, h, \ldots$ nichtgleichnamigen ursprünglichen Variabeln verschwinden. Es ist sogleich klar, dass, wenn wir nur die Längen $k_1, k_2, \ldots k_m$ der Kanten, aber nicht ihre Richtungen ändern, sämtliche Projektionen mit S proportional sich verändern werden.

Betrachten wir nun wieder das beliebig umschlossene $m$fache lineare Kontinuum und teilen dasselbe durch Scharen paralleler $(m - 1)$facher linearer Kontinuen in unendlich kleine Parallelscheme (∞^m) dS, deren jedes die $\binom{n}{m}$ Projektionen $dP, dP', dP'', \ldots$ hat, so ist $dS^2 = dP^2 + dP'^2 + dP''^2 + \ldots$, und die Verhältnisse $dS : dP : dP' : dP'' : \ldots$ sind konstant. Wenn also S das Mass des $m$fachen Kontinuums, $P, P', P'', \ldots$ seine Projektionen bezeichnen, so ist

$$S^2 = P^2 + P'^2 + P''^2 + \cdots,$$

d. h. das Mass irgend eines geschlossenen linearen $m$fachen Kontinuums ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate seiner $\binom{n}{m}$ Projektionen.

Wenn $1 < m < n - 1$ ist, so sind die $\binom{n}{m}$ Projektionen nicht unter sich unabhängig. Man kann nämlich die Gleichungen des linearen $m$fachen Kontinuums immer so darstellen, dass $n - m$ Variabeln als lineare Funktionen der m übrigen erscheinen. In jeder von diesen sind m Koeffizienten der Variabeln und noch eine freie Konstante gegeben; die letzte zählen wir nicht, als ohne Einfluss auf die Richtung des $m$fachen Kontinuums. Diese Richtung wird also im ganzen durch $(n - m)\,m$ Data hinreichend bestimmt. Setzen wir jetzt Projektionen, so kommt ausser der Richtung noch das Mass des projizierten Kontinuums als neues Datum hinzu. Also sind unter den $\binom{n}{m}$ Projektionen nur $(n - m)\,m + 1$ unter sich unabhängig, alle übrigen aber sind durch diese bestimmt.

Die zwei angeführten Zahlen ändern sich nicht, wenn man m mit $n - m$ vertauscht; wir dürfen also $m \leqq \frac{1}{2} n$ voraussetzen. Betrachten wir nun den Bruch

$$\frac{n}{2m} \cdot \frac{n-1}{n-m} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} \cdot \ldots\ldots \frac{n-m+1}{m},$$

so sind seine Faktoren

$$\frac{n}{2m} \geqq 1, \quad \frac{n-1}{n-m} > 1, \quad \frac{n-2}{3} > 1, \quad \ldots \quad \frac{n-m+1}{m} > 1;$$

der Bruch ist also grösser als $\frac{n-1}{n-m}$, und, wenn wir mit $(n-m)\,m$ multiplizieren,

$$\binom{n}{m} > (n-1)\,m = (n-m)\,m + m\,(m-1),$$

also, da $m > 1$ vorausgesetzt ist, auch

$$\binom{n}{m} > (n-m)\,m + 1.$$

(Für $m = 1$ oder $m = n - 1$ hingegen wird jede der zwei hier verglichenen Zahlen gleich n. Also kann erst für $n \geqq 4$ der Fall eintreten, dass nicht alle Projektionen unter sich unabhängig sind.)

Es seien nun $a, b, c, \ldots e$ die Zeichen für irgend $m + 1$ Projektionen einer Kante k jenes $m$fachen Paralleloschems; $f, g, h, \ldots$ die Zeichen für $m - 1$ Projektionen derselben Kante; nur darf die Kombination $(m-1)$ter Klasse, $f, g, h \ldots$, weder eine aus den Elementen $b, c, \ldots. e$ gebildete sein, noch das Element a enthalten. Dann sei die Determinante

$$\begin{vmatrix} a & . b & . c & . \ldots . & e \\ a_1 & . b_1 & . c_1 & . \ldots . & e_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m & . b_m & . c_m & . \ldots . & e_m \end{vmatrix} = aA + bB + cC + \cdots + eE,$$

wo $a, b, c, \ldots e$ willkürliche Grössen bezeichnen, während die mit Zeigern versehenen Buchstaben gegebene Projektionen von Kanten bedeuten; es wird also sein;

$$\begin{aligned} a_1 A + b_1 B + c_1 C + \cdots + e_1 E &= 0, \\ a_2 A + b_2 B + c_2 C + \cdots + e_2 E &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m A + b_m B + c_m C + \cdots + e_m E &= 0. \end{aligned}$$

Ferner sei

$$\begin{vmatrix} a_1 . f_1 . g_1 . h_1 . \ldots . \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m . f_m . g_m . h_m . \ldots . \end{vmatrix} = \mathfrak{A}, \quad \begin{vmatrix} b_1 . f_1 . g_1 . h_1 . \ldots . \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_m . f_m . g_m . h_m . \ldots . \end{vmatrix} = \mathfrak{B}, \text{ etc.}$$

Man sieht nun leicht, mit welchen Faktoren man die m Gleichungen des vorigen Systems multiplizieren muss, um die Gleichung

$$\mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{C}C + \cdots + \mathfrak{E}E = 0$$

zu erhalten, welche eine der gesuchten Relationen zwischen den $\binom{n}{m}$ Projektionen von S darstellt. Wir wollen nun diese Relationen so zu ordnen suchen, dass es klar wird, wie viele Projektionen P unabhängig sind, und wie alle übrigen aus diesen berechnet werden können.

Lassen wir vorerst die von den mit a bezeichneten Elementen abhängigen Projektionen P weg und denken uns die wesentlichen Relationen zwischen den übrigen schon aufgestellt und mittelst derselben diese alle berechnet. Denken wir uns nun $B, C, \ldots . E$, an Zahl m Projektionen (mit a) willkürlich gegeben und bilden dann aus den $n - 1$ Elementen $b, c, \ldots$ alle Kombinationen $(m - 1)$ter Klasse, $f, g, h \ldots$, mit Ausschluss der aus den m Elementen $b, c, \ldots e$ zu bildenden, so sind die entsprechenden $\mathfrak{A}$ durch obige Relation immer in Funktion der m unabhängigen $B, C, \ldots E$ gegeben. Alle jene $\mathfrak{A}$, mit diesen $B, C, \ldots E$ zusammen, sind aber sämtliche $\binom{n-1}{m-1}$ Determinanten, worin der Buchstabe a vorkommt, und unter diesen sind also höchstens m unabhängige. Ebenso kann man zeigen, dass unter allen Determinanten, worin a fehlt, aber b vorkommt, höchstens m unabhängige sind; ebenso unter denen, worin a, b fehlen, aber c vorkommt u. s. f. Endlich gelangen wir zu den Determinanten, worin die $n - m - 1$ ersten Buchstaben fehlen und der $(n - m)$te vorkommt; ihre Zahl ist offenbar m. Zuletzt ist noch eine Deserminante, diejenige, worin die m letzten Buchstaben vorkommen, übrig. Wir bekommen so offenbar höchstens $(n - m)\, m + 1$ unabhängige Projektionen. Der Natur der Sache nach müssen aber gerade so viele sein, wie wir vorhin gesehen haben. Folglich haben wir auch alle wesentlichen Relationen aufgezählt.

Sind $\binom{n}{m}$ Projektionen, welche diesen Relationen genügen, beliebig gegeben, so ist es leicht, die $n - m$ Gleichungen eines entsprechenden linearen Kontinuums zu finden, das z. B. durch den Ursprung gehen möge. Es seien $x, y, \ldots z$ die m ersten Variabeln, $u, v, w, \ldots$ die übrigen und

$$u = e_1 x + e_2 y + \cdots + e_m z, \quad v = f_1 x + f_2 y + \cdots + f_m z, \text{ etc.}$$

die $n - m$ gesuchten Gleichungen des linearen Kontinuums. Dann sind die in dem Schema

$$\begin{Vmatrix} 1 \,.\, 0 \,.\, 0 \,.\, \ldots \,.\, 0 \,.\, e_1 \,.\, f_1 \,.\, g_1 \,.\, \ldots \\ 0 \,.\, 1 \,.\, 0 \,.\, \ldots \,.\, 0 \,.\, e_2 \,.\, f_2 \,.\, g_2 \,.\, \ldots \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ 0 \,.\, 0 \,.\, 0 \,.\, \ldots \,.\, 1 \,.\, e_m \,.\, f_m \,.\, g_m \,.\, \ldots \end{Vmatrix}$$

enthaltenen $\binom{n}{m}$ Determinanten den Projektionen des Kontinuums proportional. Da nun

die Verhältnisse dieser gegeben sind und unter jenen $(n - m)m + 1$ sich finden, denen die Werte

$$1;\ e_1, f_1, g_1, \ldots;\ e_2, f_2, \ldots;\ \ldots\ldots;\ e_m, f_m, \ldots$$

zukommen, so sind diese Werte bekannt.

§ 13. *Mass eines mfachen höheren Kontinuums.*

Die n Variabeln $x, y, z, \ldots$ eines orthogonalen Systems seien in Funktion von m unabhängigen Variabeln $t, t', t'', \ldots$ gegeben. Wenn durch keine Transformation dieser unabhängigen Variabeln jene $x, y, z, \ldots$ als lineare Funktionen erscheinen, so nennen wir das durch die n Gleichungen dargestellte $m$fache Kontinuum ein höheres. Es wird durch m Scharen von $(m - 1)$fachen Kontinuen, welche den Gleichungen $t = \text{const.}$, $t' = \text{const.}$, $t'' = \text{const.}$ etc. entsprechen, in paralleloschematische Elemente zerschnitten. Die Kante, welche der Variation des einzigen t entspricht, hat die Projektionen

$$\frac{\partial x}{\partial t}\,dt,\ \frac{\partial y}{\partial t}\,dt,\ \frac{\partial z}{\partial t}\,dt, \ldots,$$

u. s. f. Das Mass des Elements wird also erhalten, wenn man die Quadratwurzel aus aus der Summe der Quadrate der $\binom{n}{m}$ in dem Schema

$$\left\|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \ldots\ldots \\ \frac{\partial x}{\partial t'} \cdot \frac{\partial y}{\partial t'} \cdot \frac{\partial z}{\partial t'} \cdot \ldots\ldots \\ \frac{\partial x}{\partial t''} \cdot \frac{\partial y}{\partial t''} \cdot \frac{\partial z}{\partial t''} \cdot \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right\|$$

enthaltenen Determinanten mit $dt\,dt'\,dt'' \ldots$ multipliziert. Integriert man endlich dieses Produkt innerhalb der gegebenen Grenzen, so erhält man das Mass des geschlossenen höheren Kontinuums.

Man kann die Gleichungen des Kontinuums so transformieren, dass die m ersten Variabeln $x, y, \ldots z$ als unabhängige und die $n - m$ übrigen $u, v, w, \ldots$ als Funktionen jener erscheinen. Das vorige Schema erscheint dann in folgender einfacheren Gestalt:

$$\left\|\begin{matrix} 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot \ldots\ldots 0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\ \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \ldots\ldots \\ 0 \cdot 1 \cdot 0 \cdot \ldots\ldots 0 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\ \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot \ldots\ldots 1 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z}\ \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \ldots\ldots \end{matrix}\right\|$$

Ist $m = 2$, so wird

$$S = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \text{etc.} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \text{etc.}}\; dx\,dy$$

das Mass des Kontinuums. Ist $m = n - 1$ und sind $x, y, \ldots z$ die unabhängigen, u die letzte und einzige abhängige Variable, so wird

$$S = \int^{n-1} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}\; dx\,dy \ldots dz$$

das Mass des Kontinuums.

§ 14. *Orthogonale Transformation der Projektionen eines linearen Kontinuums.*

Was in Beziehung auf Verhältnisse der Projektionen für ein paralleloschematisches Stück eines $m$fachen linearen Kontinuums gilt, ist auch auf ein beliebig umschlossenes Stück desselben auszudehnen. Wir denken uns daher ein Paralleloschem, dessen Kanten die Projektionen

$$a, b, \ldots . c, d, e, f, \ldots .,$$

versehen, mit den Nummern 1, 2, 3, ... m der Kanten als untern Zeigern haben. Es sei $ab \ldots c$ irgend eine Kombination $m$ter Klasse aus den n Elementen $a, b, \ldots . c, d, e, f, \ldots$, so entspricht denselben die Kontinuumsprojektion

$$P = \Sigma \pm a_1\, b_2 \ldots c_m.$$

Die orthogonalen Transformationsformeln seien nun

$$\begin{aligned}
x &= \alpha t + \alpha' t' + \alpha'' t'' + \cdots, \\
y &= \beta t + \beta' t' + \beta'' t'' + \cdots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z &= \gamma t + \gamma' t' + \gamma'' t'' + \cdots, \\
u &= \delta t + \delta' t' + \delta'' t'' + \cdots, \\
v &= \varepsilon t + \varepsilon' t' + \varepsilon'' t'' + \cdots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Die Projektionen der Kanten des $m$fachen Paralleloschems im neuen Systeme seien $h, h', h'', \ldots$, versehen mit den untern Zeigern 1, 2, ... m, entsprechend den Nummern der Kanten. Dann ist

$$P = \left\| \begin{array}{l|l} \alpha \,.\, \alpha' \,.\, \alpha'' \ldots\ldots & h_1 \,.\, h_1' \,.\, h_1'' \ldots\ldots \\ \beta \,.\, \beta' \,.\, \beta'' \ldots\ldots & h_2 \,.\, h_2' \,.\, h_2'' \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \gamma \,.\, \gamma' \,.\, \gamma'' \ldots\ldots & h_m \,.\, h_m' \,.\, h_m'' \ldots\ldots \end{array} \right\|,$$

welches Schema eine Determinante bedeutet, deren allgemeines Element die Summe der Produkte der gleichaccentigen Glieder irgend einer Horizontalreihe links und irgend einer rechts vom mittleren Vertikalstrich ist. Es ist bekannt, dass diese Determinante gleich ist der Summe der $\binom{n}{m}$ Produkte von je zwei homologen Determinanten, welche jedes der beiden durch den mittleren Vertikalstrich geschiedenen Schemate liefert. Die Determinanten, welche das Schema rechts liefert, sind aber die Projektionen des m-fachen Paralleloschems im neuen System, und die homologe Determinante im Schema links ist der Faktor, mit dem man das $m$fache lineare Kontinuum $(tt' \ldots)$, auf welches diese einzelne Projektion gefällt wurde, und dem sie angehört, multiplizieren muss, um seine Projektion auf das axiale Kontinuum $(xy \ldots z)$ des ursprünglichen Systems $(xy \ldots zuvw \ldots)$ zu erhalten. Man kann daher die Transformation auch so darstellen.

Im ursprünglichen System $(xy \ldots zuvw \ldots)$ wird ein durch die m Variabeln $(xy \ldots z)$ bestimmtes axiales Kontinuum fixiert. Im neuen System $(tt't'' \ldots)$ denkt man sich alle axialen $m$fachen Kontinua und projiziert auf diese das gegebene geschlossene lineare $m$fache Kontinuum S; dann werden alle diese Projektionen wiederum auf das fixierte ursprüngliche axiale Kontinuum $(xy \ldots z)$ projiziert; die Summe dieser letzten Projektionen wird gleich sein der Projektion von S.

Irgend eine aus der linken Hälfte des obigen Schemas entnommene Determinante kann auch aufgefasst werden als Projektion eines Stückes des axialen Kontinuums $(xy \ldots z)$ vom Masse 1 auf das mit der Determinante homologe axiale Kontinuum des neuen Systems. Ersetzen wir das Mass 1 durch T, so haben wir nach dieser Auffassung folgenden Satz:

Wenn in der $n$fachen Totalität ein orthogonales Axensystem und irgend zwei lineare $m$fache Kontinua S und T gegeben sind, so ist die Projektion von S auf T, multipliziert mit T, gleich der Summe der Produkte der Projektionen von S und T auf je eines und dasselbe axiale mfache Kontinuum des orthogonalen Systems.

Es ist also klar, dass man im Subjekte dieses Satzes auch S und T vertauschen darf, ferner, dass der Wert des Prädikats vom gewählten orthogonalen System unabhängig ist. Wir können ihn daher mit $ST \cos \angle (ST)$ bezeichnen.

Wir wollen noch die Beziehung eines linearen $m$fachen Kontinuums S zu einem schiefen System betrachten. Fixieren wir in diesem irgend ein axiales $m$faches Kontinuum C_1, um S darauf zu projizieren, so müssen wir in allen Lösungen von S die Werte der $n - m$ Variabeln, welche in C_1 verschwinden, durch Null ersetzen. Das geschlossene in C_1 fallende Kontinuum aller so veränderten Lösungen ist die Projektion P_1 von S auf C_1. Es ist sogleich klar, dass der Wert von P_1 nur von den Richtungen der $n - m$ nicht in C_1 fallenden Axen des schiefen Systems, aber nicht von den m Axen, durch welche C_1 gelegt ist, abhängt. Nehmen wir S als $m$faches Paralleloschem

an und bilden die Determinante D_1 der Projektionen seiner Kanten auf die in C_1 liegenden Axen, ferner die Determinante Θ_{11} der Kosinus der Winkel, welche jede dieser m Axen mit jeder bildet, so ist $P_1 = D_1 \sqrt{\Theta_{11}}$. Es sei C_2 ein anderes axiales m-faches Kontinuum des schiefen Systems, $P_2 = D_2 \sqrt{\Theta_{22}}$, und Θ_{12} die Determinante der Kosinus der Winkel, welche jede der Axen von C_1 mit jeder von C_2 bildet, so ist

$$S^2 = D_1^2 \Theta_{11} + D_2^2 \Theta_{22} + \ldots + 2 D_1 D_2 \Theta_{12} + \ldots + 2 D_2 D_3 \Theta_{23} + \ldots$$

$$= P_1^2 + P_2^2 + \ldots + 2 P_1 P_2 \frac{\Theta_{12}}{\sqrt{\Theta_{11} \cdot \Theta_{22}}} + \ldots,$$

welche Summe $\frac{1}{2} \binom{n}{m} \left\{ \binom{n}{m} + 1 \right\}$ Glieder zählt. Aus dem für ein orthogonales System Gesagten ist klar, dass

$$\Theta_{12} = \sqrt{\Theta_{11}} \cdot \sqrt{\Theta_{22}} \cdot \cos \angle (C_1 C_2)$$

ist. Man kann also setzen:

$$S^2 = P_1^2 + P_2^2 + \ldots + 2 P_1 P_2 \cos \angle (C_1 C_2) + \ldots.$$

Man bemerke die vollständige Analogie dieser Formel mit derjenigen für einen Abstand im schiefen System.

Sind $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$ die n Richtungskosinus der ersten Axe in C_1, u. s. f. mit den unteren Zeigern 1, 2, . . m, ferner $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ (mit den unteren Zeigern 1, 2, . . . m) die m Gruppen von je n Richtungskosinus der Axen in C_2 (alle Richtungskosinus beziehen sich auf ein orthogonales System), so ist

$$\sqrt{\left\| \begin{array}{l|l} \alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \gamma_1 \ldots & \alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \gamma_1 \ldots \\ \alpha_2 \cdot \beta_2 \cdot \gamma_2 \ldots & \alpha_2 \cdot \beta_2 \cdot \gamma_2 \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_m \cdot \beta_m \cdot \gamma_m \ldots & \alpha_m \cdot \beta_m \cdot \gamma_m \ldots \end{array} \right\|} \times \sqrt{\left\| \begin{array}{l|l} \alpha'_1 \cdot \beta'_1 \cdot \gamma'_1 \ldots & \alpha'_1 \cdot \beta'_1 \cdot \gamma'_1 \ldots \\ \alpha'_2 \cdot \beta'_2 \cdot \gamma'_2 \ldots & \alpha'_2 \cdot \beta'_2 \cdot \gamma'_2 \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \alpha'_m \cdot \beta'_m \cdot \gamma'_m \ldots & \alpha'_m \cdot \beta'_m \cdot \gamma'_m \ldots \end{array} \right\|} \times \cos \angle (C_1 C_2)$$

$$= \left\| \begin{array}{l|l} \alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \gamma_1 \ldots & \alpha'_1 \cdot \beta'_1 \cdot \gamma'_1 \ldots \\ \alpha_2 \cdot \beta_2 \cdot \gamma_2 \ldots & \alpha'_2 \cdot \beta'_2 \cdot \gamma'_2 \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_m \cdot \beta_m \cdot \gamma_m \ldots & \alpha'_m \cdot \beta'_m \cdot \gamma'_m \ldots \end{array} \right\|$$

§ 15. *Ueber das Verhalten linearer Kontinua zu einander.*

Sind in der $n$fachen Totalität zwei lineare Kontinua, ein $m$faches und ein m'-faches, gegeben, so hat man im ganzen $2n - (m + m')$ Gleichungen; die beiden Kontinua werden also im allgemeinen nur dann sich schneiden, wenn $m + m' \geqq n$ ist. Ist z. B. $m + m' = n$, so haben sie im allgemeinen nur eine Lösung gemein, einen Strahl, wenn $m + m' = n + 1$, u. s. f. Wenn dagegen $m + m' < n$ ist, so können im allgemeinen die beiden Kontinua keine Lösung gemein haben. Handelt es sich nur um die Ver-

gleichung ihrer Richtungen, und legt man daher mit jedem derselben ein Kontinuum parallel durch den Ursprung, so bestimmen diese zusammen ein $(m+m')$faches Kontinuum. Man kann das System orthogonal transformieren, sodass $n-(m+m')$ neue Variabeln für dieses lineare Kontinuum verschwinden, und dann dieses wie eine $(m+m')$-fache Totalität betrachten, in welcher jenes $m$fache und m'fache lineare Kontinuum gegeben sind. Der Fall $m+m' < n$ ist somit auf den Fall $m+m' = n$ zurückgeführt.

Um der ferneren Erörterung dieses Gegenstandes die gehörige Deutlichkeit geben zu können, muss ich den Begriff normaler Kontinuen einführen. Sind $x, y, \ldots$ die Projektionen eines dem $m$fachen linearen Kontinuum C angehörenden Strahls r, und $x', y', \ldots$ diejenigen irgend eines Strahls r', für welchen $xx' + yy' + \ldots = 0$ ist, bleibt ferner die Lage des ersten Strahls r innerhalb des Kontinuums C völlig frei, so sind sämtliche vom Ursprung ausgehende Strahlen r' in einem $(n-m)$fachen linearen Kontinuum C' enthalten. Nun, zwei solche Kontinuen C und C' nenne ich normal.

Sind $t_1, t_2, \ldots t_m$ die Variabeln eines beliebigen in C angenommenen schiefen Systems, und demgemäss

$$x = \alpha_1 \, t_1 + \alpha_2 \, t_2 + \ldots + \alpha_m \, t_m,$$
$$y = \beta_1 \, t_1 + \beta_2 \, t_2 + \ldots + \beta_m \, t_m,$$
etc.

die orthogonalen Projektionen eines Strahls r, dessen schiefe $t_1, t_2, \ldots t_m$ sind, so verwandelt sich die obige Bedingung $xx' + yy' + \ldots = 0$ für den Strahl r' in

$$(\alpha_1 \, t_1 + \alpha_2 \, t_2 + \ldots + \alpha_m \, t_m) \, x' + (\beta_1 \, t_1 + \beta_2 \, t_2 + \ldots + \beta_m \, t_m) \, y' + \ldots = 0$$

und zerfällt, da $t_1, t_2, \ldots t_m$ frei bleiben sollen, in die m Gleichungen

$$\alpha_i \, x' + \beta_i \, y' + \ldots = 0, \; (i = 1, 2, 3, \ldots m).$$

Diese stellen ein $(n-m)$faches lineares Kontinuum C' dar, welches wir das normale nennen.

Ich behaupte nun, dass, wenn C, C' als geschlossen gedacht werden, die Projektionen des einen mit denen des andern proportional sind. Um dieses zu beweisen, teile ich die n Variabeln $x', y', \ldots$ in zwei Gruppen, von denen die eine aus den m Variabeln $x', y', \ldots z', u'$, die andere aus den $n-m$ Variabeln $v', w', \ldots p', q'$ besteht.

Eliminiert man nun aus den m Gleichungen

$$(a) \quad \alpha_i \, x' + \beta_i \, y' + \ldots + \gamma_i \, z' + \delta_i \, u' + \varepsilon_i \, v' + \ldots + \zeta_i \, p' + \eta_i \, q' = 0, \; [i = 1, 2, \ldots m]$$

die $m-1$ ersten Variabeln $x', y', \ldots z'$, so wird man die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 \,.\, \beta_1 \ldots \gamma_1 \,.\, (\delta_1 \, u' + \varepsilon_1 \, v' + \ldots + \zeta_1 \, p' + \eta_1 \, q') \\ \alpha_2 \,.\, \beta_2 \ldots \gamma_2 \,.\, (\delta_2 \, u' + \varepsilon_2 \, v' + \ldots + \zeta_2 \, p' + \eta_2 \, q') \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_m \,.\, \beta_m \ldots \gamma_m \,.\, (\delta_m \, u' + \varepsilon_m \, v' + \ldots + \zeta_m \, p' + \eta_m \, q') \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\Delta \, u' + E \, v' + \ldots Z \, p' + H \, q' = 0$$

erhalten. Es seien $n - m$ unter sich unabhängige Lösungen des Systems (α), nämlich $x' = \alpha_k, y' = \beta_k, \ldots [k = m + 1, m + 2, \ldots n - 1, n]$ bekannt, so ist auch

$$\begin{aligned}
\delta_{m+1}\, \varDelta + \varepsilon_{m+1}\, E + \ldots + \zeta_{m+1}\, Z + \eta_{m+1}\, H &= 0, \\
\delta_{m+2}\, \varDelta + \varepsilon_{m+2}\, E + \ldots + \zeta_{m+2}\, Z + \eta_{m+2}\, H &= 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta_n\, \varDelta + \varepsilon_n\, E + \ldots + \zeta_n\, Z + \eta_n\, H &= 0.
\end{aligned}$$

Folglich sind die $m$fachen Determinanten $\varDelta, E, \ldots H$ proportional mit den $(n - m)$-fachen, welche aus den Koeffizienten $\delta, \varepsilon, \ldots \eta$ der $n - m$ letzten Gleichungen gebildet werden können; z. B. $\varDelta = \Sigma \pm \alpha_1\, \beta_2 \ldots \gamma_{m-1}\, \delta_m$ ist proportional mit $\Sigma \pm \varepsilon_{m+1}\, \varsigma_{m+2} \ldots \zeta_{n-1}\, \eta_n$, u. s. f. Die Zahl der proportionalen Glieder in jeder der beiden Reihen ist hier freilich nur $n - m + 1$; aber, wie man leicht sieht, kann man sie bis auf $\binom{n}{m}$ bringen, wenn man nach und nach immer andere Gruppen von je $m - 1$ Variabeln aus dem System (α) eliminiert. Den soeben gefundenen Satz kann man nun so aussprechen:

Wenn im Schema einer $n$fachen Determinante die Kombination jeder der m ersten Horizontalzeilen mit jeder der $n - m$ letzten eine verschwindende Produktensumme liefert, z. B.

$$\alpha_i\, \alpha_k + \beta_i\, \beta_k + \ldots + \zeta_i\, \zeta_k + \eta_i\, \eta_k = 0 \quad \begin{Bmatrix} i = 1, 2, 3, \ldots m \\ k = m + 1, m + 2, \ldots n \end{Bmatrix},$$

so sind die aus den Elementen der m ersten Horizontalzeilen gebildeten $m$fachen Determinanten proportional mit ihren reciproken $(n - m)$fachen Determinanten, deren Elemente in den $n - m$ letzten Horizontalzeilen enthalten sind.

Da nun die $m$fachen Determinanten den Projektionen des Kontinuums C, die reciproken $(n - m)$fachen Determinanten den Projektionen des normalen Kontinuums C' entsprechen, so ist der oben behauptete Satz bewiesen.

Für ein System orthogonaler Transformationselemente ist jede particlle Determinante ihrer reciproken (oder ergänzenden) Determinante geradezu gleich. Dies folgt aus der in § 2 erwähnten Eigenschaft dieses Systems, vermöge welcher jedes ursprüngliche Element seinem reciproken Elemente (einer $(n - 1)$fachen Determinante) gleich ist. Da man die Axen $t_1, t_2, \ldots t_m$ des Kontinuums C orthogonal annehmen kann, und ebenso diejenigen des normalen Kontinuums C', so erhellt leicht, wie man auch von dieser Seite her den Satz beweisen kann, dass die Projektionen zweier normalen Kontinua proportional sind.

Nach dieser Abschweifung über die normalen Kontinua kehren wir zur Betrachtung des gegenseitigen Verhaltens zweier linearen Kontinua zurück, deren Dimensionszahlen zusammen derjenigen der Totalität gleich sind. Das eine $m$fache Kontinuum heisse A, das andere $(n - m)$fache B, und es sei $m < \frac{1}{2}\, n$. Das zu A normale Kontinuum A' wird dann B in einem $(n - m)$fachen Kontinuum C schneiden; das normale zu diesem ist ein $2\,m$faches Kontinuum C', welches A in sich enthält und B in einem

$m$fachen Kontinuum D schneidet. Wird dann B als $(n - m)$fache Totalität aufgefasst, so sind darin die Kontinua C und D enthalten und zu einander normal. Das ursprüngliche Kontinuum B hat also gleichsam eine orthogonale Zerlegung in die Kontinua C und D erfahren, und da von diesen C zu A orthogonal ist, so darf es bei der Beurteilung der gegenseitigen Lage von A und B ausser acht gelassen werden; es kommt nunmehr alles blossauf die gegenseitige Lage der $m$fachen Kontinua A und D an, welche beide dem $2m$fachen Kontinuum C' angehören. Man kann also alle dem $(n - 2m)$fachen Kontinuum C entsprechenden Variabeln gleich Null setzen, das Kontinuum C' als Totalität behandeln, und hat es dann nur mit der Untersuchung der gegenseitigen Lage zweier $m$facher linearer Kontinua innerhalb einer $2m$fachen Totalität zu thun.

Der Fall, wo die Summe der Dimensionszahlen der gegebenen linearen Kontinua die Dimensionszahl der Totalität übertrifft, ist auf den vorigen Fall zurückzuführen. Sind die gegebenen Kontinua ein $(l + m)$faches A und ein $(l + n)$faches B, und die Dimensionszahl der Totalität $l + m + n$, so schneiden sich A und B in einem $l$fachen Kontinuum C. Das normale $(m + n)$fache Kontinuum sei C', so schneidet dieses die Kontinua A und B resp. in einem $m$fachen D und einem $n$fachen E, deren gegenseitige Lage nun ebenso wie oben zu behandeln ist.

Den Weg zur Beurteilung des einzigen Falls, auf den alle übrigen zurückgeführt wurden, bahnen wir uns nun durch die Lösung der folgenden Aufgabe.

Aufgabe. Eine orthogonale Transformation der n Variabeln $x, y, \ldots z$ in die neuen $t_1, t_2, \ldots t_n$ zu finden, durch welche die beliebig gegebenen n homogenen und linearen Polynome

$$p = ax + by + \ldots + cz,\; p' = a'x + b'y + \ldots + c'z, \text{ etc.}$$

in solche Formen

$$p = h_1\, t_1 + h_2\, t_2 + \ldots + h_n\, t_n,\; p' = h'_1\, t_1 + h'_2\, t_2 + \ldots + h'_n\, t_n, \text{ etc.}$$

übergehen, wo alle Summen gleichnamiger Produkte je zweier Koeffizienten denselben Polynom, z. B.

$$h_1\, h_2 + h'_1\, h'_2 + h''_1\, h''_2 + \ldots$$

verschwinden.

Auflösung. Es sei $h_1^2 + h_1'^2 + h_1''^2 + h_1'''^2 + \ldots = s_1$, etc., N die Determinante der nn Elemente h; die reciproken Elemente sollen mit H bezeichnet werden, z. B.

$$\frac{\partial N}{\partial h_1} = H_1 \quad \frac{\partial N}{\partial h'_1} = H'_1, \text{ etc.}$$

Dann ist

$$h_1 = \frac{H_1}{N} s_1,\; h'_1 = \frac{H'_1}{N} s_1, \text{ etc.}$$

Sind nun $x = \alpha_1\, t_1 + \alpha_2\, t_2 + \ldots + \alpha_n\, t_n$, $y = \beta_1\, t_1 + \ldots, \ldots, z = \gamma_1\, t_1 + \ldots$ die orthogonalen Transformationsformeln, so ist

$$h_1 = a\alpha_1 + b\beta_1 + \ldots + c\gamma_1, \text{ etc.,}$$

also

$$N = \begin{vmatrix} a & . b & . . . . c & \alpha_1 & . \beta_1 . & . . . \gamma_1 \\ a' & . b' & . . . . c' & \alpha_2 & . \beta_2 . & . . . \gamma_2 \\ a'' & . b'' & . . . . c'' & . . . & . . . & . . . \\ . . . & . . . & . . . & \alpha_n & . \beta_n . & . . . \gamma_n \end{vmatrix},$$

weil die Koeffizienten h entstehen, indem jede Horizontalzeile der linken Hälfte dieses Schemas mit jeder Horizontalzeile der rechten Hälfte zu einer Produktensumme kombiniert wird. Die Determinante der rechten Hälfte ist bekanntlich 1, und die reciproken Elemente sind den ursprünglichen gleich. Die Determinante der linken Hälfte sei Δ, und die reciproken Elemente seien A, B, ... C; A', ..., z. B. $A = \frac{\partial \Delta}{\partial a}$. Dann ist $N = \Delta$. Die Grössen H entstehen aus obigem Schema, wenn in jeder Hälfte eine Horizontalzeile weggelassen wird. Also ist

$$H_1 = A\alpha_1 + B\beta_1 + \ldots + C\gamma_1,\quad H_1' = A'\alpha_1 + B'\beta_1 + \ldots + C'\gamma_1, \text{ etc.}$$

Wir bekommen daher n Systeme von je n Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{A}{\Delta}s - a\right)\alpha + \left(\frac{B}{\Delta}s - b\right)\beta + \ldots + \left(\frac{C}{\Delta}s - c\right)\gamma = 0, \\ &\left(\frac{A'}{\Delta}s - a'\right)\alpha + \left(\frac{B'}{\Delta}s - b'\right)\beta + \ldots + \left(\frac{C'}{\Delta}s - c'\right)\gamma = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Dieses System hat man sich $n$mal wiederholt zu denken, indem die Buchstaben s, α, β, ... γ nach und nach mit den unteren Zeigern 1, 2, 3, ... n versehen werden. Eliminiert man die $n - 1$ Verhältnisse $\alpha : \beta : \ldots : \gamma$ und bezeichnet die Determinante der Koeffizienten von α, β, ... γ mit $S : \Delta$, so erhält man eine Gleichung $S = 0$, in der nur die Unbekannte s vorkommt. Die irgend einer Horizontalzeile jener Koeffizienten entsprechenden reciproken Elemente der Determinante werden nach geschehener Substitution eines Wertes von s mit α, β, ... γ proportional, sodass zu jedem bestimmten Werte von s immer nur eine Reihe von Verhältnissen $\alpha : \beta : \ldots : \gamma$ gehört. Die Determinante $S : \Delta$ wird man erhalten, wenn man das Produkt

$$\left(\frac{A}{\Delta}s - a\right)\left(\frac{B}{\Delta}s - b\right)\ldots\left(\frac{C}{\Delta}s - c\right)$$

entwickelt, ohne die alphabetische Folge der Faktoren jedes Monoms zu verändern, und dann jedes solche Monom durch eine Determinante ersetzt, in deren Schema die Faktoren jenes als Elemente der ersten Horizontalzeile erscheinen. Wird ferner jede solche Determinante als Summe von Produkten je einer aus den Elementen $-a$, $-b$, ... $-c$ gebildeten Determinante $i$ten Grades mit der ungleichnamigen, aus den Elementen $\frac{A}{\Delta}s$, etc., gebildeten $(n - i)$fachen Determinante dargestellt und beachtet, dass diese immer das $(-1)^{n-i}\frac{s^{n-i}}{\Delta}$fache von jener ist, so erhält man

$$S = s^n - K_1 s^{n-1} + K_2 s^{n-2} - K_3 s^{n-3} + \ldots + (-1)^n \Delta^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wo K_i die Summe der Quadrate aller Determinanten $i$ten Grades bezeichnet, welche aus den Elementen $a, b, \ldots c, a', \ldots$ gebildet werden können, und somit $\binom{n}{i}^2$ Glieder zählt. Es ist klar, dass $K_n = \Delta^2$ wird. Wenn also die Polynome $p, p', p'', \ldots$ alle von einander unabhängig sind, so ist die Gleichung $S = 0$ vom $n$ten Grade und kann die Null nicht zur Wurzel haben.

Betrachten wir nun ein reciprokes Element der Determinante $S : \Delta$, z. B. das, welches dem ursprünglichen Element $\frac{A}{\Delta} s - a$ entspricht, und sehen davon ab, das Δ, B', etc. Funktionen von a sind, so ist dasselbe $-\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{S}{\Delta}\right)$. Denkt man sich aber S als Funktion von s und den nn Grössen $a, b, \ldots c, a', \ldots$, so ist $-\frac{1}{\Delta}\frac{\partial S}{\partial a}$ wegen der überall vorkommenden Quadrate von Determinanten gerade doppelt so gross. Jenes erste reciproke Element hat also den Wert $-\frac{1}{2\Delta}\frac{\partial S}{\partial a}$. Folglich ist

$$\alpha : \beta : \ldots : \gamma = \frac{\partial S}{\partial a} : \frac{\partial S}{\partial b} : \ldots : \frac{\partial S}{\partial c} = \frac{\partial S}{\partial a'} : \frac{\partial S}{\partial b'} : \ldots : \frac{\partial S}{\partial c'} = \text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Die gesuchten Verhältnisse werden erst dann unbestimmt, wenn sämtliche nach den nn ursprünglichen Elementen $a, b, \ldots$ abgeleiteten Funktionen von S verschwinden. Da nun

$$n S = s \frac{\partial S}{\partial s} + \tfrac{1}{2} a \frac{\partial S}{\partial a} + \text{etc.}$$

ist, so ist dann zugleich $S = 0, \frac{\partial S}{\partial s} = 0$; folglich hat dann die Gleichung $S = 0$ gleiche Wurzeln.

Wir müssen jetzt umgekehrt zeigen, dass, wenn die Systeme (1) gelten, sie die gemachten Voraussetzungen zur notwendigen Folge haben. Es sei $h = a\alpha + b\beta + \ldots + c\gamma$, $h' = a'\alpha + b'\beta + \ldots + c'\gamma$, etc., wo $h, h', \ldots \alpha, \beta, \ldots \gamma$ nach Belieben mit einem der unteren Zeiger $1, 2, 3, \ldots n$ zu versehen sind. Multipliziert man die Gleichungen (1) mit $a, a', a'', \ldots$ und addiert, so ergiebt sich, wenn man die ähnlichen Gleichungen hinzunimmt, das System

$$\left.\begin{aligned} s\alpha &= ah + a'h' + a''h'' + \ldots, \\ s\beta &= bh + b'h' + b''h'' + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s\gamma &= ch + c'h' + c''h'' + \ldots \end{aligned}\right| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Bringen wir hier den untern Zeiger 1 an, multiplizieren mit $\alpha_2, \beta_2, \ldots \gamma_2$ und addieren, so ergiebt sich

$$s_1 (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \ldots + \gamma_1 \gamma_2) = h_1 h_2 + h'_1 h'_2 + h''_1 h''_2 + \ldots$$

Vertauscht man die Zeiger 1 und 2 und subtrahiert beide Gleichungen von einander, so bekommt man

$$(s_1 - s_2)(\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \ldots + \gamma_1 \gamma_2) = 0.$$

Wenn die Wurzeln s_1, s_2 verschieden sind, so folgt hieraus

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \ldots + \gamma_1 \gamma_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

und

$$h_1 h_2 + h'_1 h'_2 + h''_1 h''_2 + \ldots = 0.$$

Wären s_1, s_2 zwei konjugierte imaginäre Wurzeln der Gleichung $S = 0$, so hätten auch je zwei Verhältnisse, wie $\beta_1 : \alpha_1$, $\beta_2 : \alpha_2$ konjugierte Werte, und ihr Produkt wäre die Summe zweier Quadrate; die Gleichung (5) könnte also nicht bestehen. Also kann die Gleichung $S = 0$ keine imaginären Wurzeln haben. Hätte sie gleiche Wurzeln, und gäbe das System (1) für die Verhältnisse $\alpha : \beta : \ldots : \gamma$ bestimmte Werte, so könnte man durch geringe Variation eines oder mehrerer der ursprünglichen Elemente die Gleichheit der Wurzeln in eine geringe Verschiedenheit umändern, und dann würden auch die entsprechenden Verhältnisreihen nur sehr wenig von einander abweichen; die Gleichung (5) würde dann

$$\alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \gamma^2 + 2\,(\alpha d\alpha + \beta d\beta + \ldots + \gamma d\gamma) = 0.$$

Da man die Variationen $d\alpha$, $d\beta$, $\ldots d\gamma$ so klein, als man nur will, muss machen können, so muss auch $\alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \gamma^2$ für die wirkliche Gleichheit beider Wurzeln verschwinden, was die imaginäre Beschaffenheit der Verhältnisse, also auch des entsprechenden Werts von s voraussetzt. Wenn also die Gleichung $S = 0$ gleiche reelle Wurzeln hat, so dürfen die Verhältnisse $\alpha : \beta : \ldots : \gamma$ durch das System (1) nicht bestimmt werden, was notwendig erfordert, dass alle nn abgeleiteten Funktionen von S für eine solche Wurzel verschwinden. Es ist dann immer noch möglich, dass $n - 2$ Gleichungen des Systems (1) zwei unter sich unabhängige Reihen von Verhältnissen $\alpha : \beta : \ldots : \gamma$, liefern, und es ist dann leicht, diese so einzurichten, dass sie der Orthogonalitätsbedingung genügen. Der entsprechende rechte Winkel kann dann nach Belieben in seinem zweifachen linearen Kontinuum herumgedreht werden.

Man kann immer $\alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \gamma^2 = 1$ machen. Wenn man nun die Gleichungen (4) resp. mit α, β, $\ldots \gamma$ multipliziert und addiert, so erhält man

$$s = h^2 + h'^2 + h''^2 + \ldots.$$

Die Wurzeln der Gleichung $S = 0$ sind also sämtlich positiv, was auch schon aus den n Zeichenwechseln in (2) folgt.

Wir haben nun nachgewiesen, dass die Auflösung des Systems (1) im allgemeinen (Gleichheit von Wurzeln der Glchg. $S = 0$ ausgeschlossen) alles dasjenige in reeller Form leistet, was die Aufgabe verlangt. Wegen der Anwendung auf das Folgende bemerke ich nur noch, dass vermöge der Eigenschaft $h_1 h_2 + h'_1 h'_2 +$ etc. $= 0$, etc., aus den Formen $p = h_1 t_1 + h_2 t_2 + \ldots + h_n t_n$, $p' = h'_1 t'_1 + \ldots$, etc. noch andere sehr vereinfachte sich sogleich ergeben. Man mache

$$\frac{h}{\sqrt{s}} = \eta,\ \frac{h'}{\sqrt{s}} = \eta',\ \frac{h''}{\sqrt{s}} = \eta'', \ldots,$$

wo zu s, h, η nach und nach die untern Zeiger $1, 2, \ldots n$ hingehören, dann sind

$$q_1 = \eta_1 p + \eta_1' p' + \eta_1'' p'' + \ldots,\ q_2 = \eta_2 p + \eta_2' p' + \eta_2'' p'' + \ldots, \text{ etc.}$$

orthogonale Transformationsformeln, und man erhält mittelst derselben

$$q_1 = \sqrt{s_1} \cdot t_1,\ q_2 = \sqrt{s_2} \cdot t_2, \ldots, q_n = \sqrt{s_n} \cdot t_n.$$

Satz. In der $2n$fachen Totalität sind zwei $n$fache lineare Kontinua C und C' beliebig gegeben. Von ihrer gemeinschaftlichen Lösung aus werden in denselben resp. die Strahlen r, r' gezogen. Der spitze Winkel $\angle (rr')$ hat offenbar ein absolutes Minimum, welchem das Strahlenpaar a, a' entsprechen möge. Die Bestimmung desselben hängt von einer algebraischen Gleichung $n$ten Grades ab, deren Unbekannte $\cos^2 \angle (aa')$ ist, und ihre Auflösung liefert daher im ganzen n Strahlenpaare $a, a'; b, b'; \ldots c, c'$, welche den analytischen Bedingungen der Aufgabe genügen. Dann bilden die n Strahlen $a, b, \ldots c$ ein orthogonales Axensystem des Kontinuums C, und ebenso die n andern Strahlen $a', b', \ldots c'$ ein orthogonales Axensystem des Kontinuums C'; und jeder Strahl a des einen Kontinuums ist mit den nichtzugeordneten $n - 1$ Strahlen $b', \ldots c'$ des andern Kontinuums orthogonal. Endlich ist der Projektionsfaktor des einen Kontinuums auf das andere, oder

$$\cos \angle (CC') = \cos \angle (aa') \times \cos \angle (bb') \times \ldots \times \cos \angle (cc').$$

Wenn r, r' zwei beliebige Strahlen beider Kontinua C, C' sind, so ist

$$\cos \angle (rr') = \cos \angle (aa') \cdot \cos \angle (ar) \cdot \cos \angle (a'r') + \cos \angle (bb') \cdot \cos \angle (br) \cdot \cos \angle (b'r') + \ldots + \cos \angle (cc') \cdot \cos \angle (cr) \cdot \cos \angle (c'r').$$

Beweis. Es ist leicht, in jedem der gegebenen Kontinua C, C' ein orthogonales Axensystem zu finden. In C sei es durch die n Variabeln $x, y, \ldots z$, in C' durch $t_1, t_2, \ldots t_n$ dargestellt. Zu jenem System nehmen wir noch n Axen $u, v, \ldots w$ hinzu, sodass $x, y, \ldots z, u, v, \ldots w$ die orthogonalen Variabeln der Totalität sind. Dann sind $u = o, v = o, \ldots w = o$ die Gleichungen des Kontinuums C; diejenigen von C' seien

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 + \ldots + \alpha_n t_n, \\ y &= \beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 + \ldots + \beta_n t_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z &= \gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2 + \ldots + \gamma_n t_n \\ u &= \delta_1 t_1 + \delta_2 t_2 + \ldots + \delta_n t_n \\ v &= \varepsilon_1 t_1 + \varepsilon_2 t_2 + \ldots + \varepsilon_n t_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w &= \zeta_1 t_1 + \zeta_2 t_2 + \ldots + \zeta_n t_n \end{aligned}$$

Es wird sein

$$\alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 + \ldots + \zeta^2 = 1$$

mit unterm Zeiger 1, 2, 3, ... n; ferner bestehen $\frac{1}{2}n(n-1)$ Gleichungen, wie

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \ldots + \gamma_1 \gamma_2 + \delta_1 \delta_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \ldots + \zeta_1 \zeta_2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Alle diese Relationen bestehen fort, wenn man auch das Axensystem $(t_1, t_2, \ldots t_n)$ oder das System $(x, y, \ldots z)$ oder das System $(u, v, \ldots w)$ orthogonal transformiert. Wir haben nun schon gesehen, dass man durch die zwei ersten Transformationen bewirken kann, dass die n ersten Gleichungen des linearen Kontinuums C' sich so vereinfachen:

$$x = \alpha t_1, \; y = \beta t_2, \ldots z = \gamma t_n.$$

Dann reduzieren sich aber die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Orthogonalitätsbedingungen (6) auf:

$$\delta_1 \delta_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \ldots + \zeta_1 \zeta_2 = 0, \text{ etc.}$$

Wird jetzt $\alpha'^2 = 1 - \alpha^2, \beta'^2 = 1 - \beta^2, \ldots \gamma'^2 = 1 - \gamma^2$ gesetzt, so hat man auch

$$\delta_1^2 + \varepsilon_1^2 + \ldots + \zeta_1^2 = \alpha'^2, \; \delta_2^2 + \varepsilon_2^2 + \zeta_2^2 = \beta'^2, \ldots, \delta_n^2 + \varepsilon_n^2 + \ldots + \zeta_n^2 = \gamma'^2,$$

$$\frac{\delta_1 u + \varepsilon_1 v + \ldots + \zeta_1 w}{\alpha'} = \alpha' t_1, \; \frac{\delta_2 u + \varepsilon_2 v + \ldots + \zeta_2 w}{\beta'} = \beta' t_2, \ldots, \frac{\delta_n u + \varepsilon_n v + \ldots + \zeta_n w}{\gamma'} = \gamma' t_n.$$

Diese auf $u, v, \ldots w$ bezügliche Transformation ist orthogonal. Bezeichnet man die daraus entstehenden neuen Variabeln wieder mit $u, v, \ldots w$, so hat man zuletzt folgende Systeme von Gleichungen:

für das Kontinuum C

$$u = o, \; v = o, \ldots, w = o;$$

für das Kontinuum C'

$$x = \alpha t_1, \; y = \beta t_2, \ldots z = \gamma t_n, \; u = \alpha' t_1, \; v = \beta' t_2, \ldots w = \gamma' t_n.$$

Man sieht, dass der Kosinus des Winkels der Axen x und t_1 gleich α ist, und dass die übrigen Axen $t_2, t_3, \ldots t_n$ zur Axe x orthogonal sind, u. s. f.

Denkt man sich ein $n$faches Parallelschem, dessen Kanten sämtlich gleich 1 sind und auf den Axen $t_1, t_2, \ldots t_n$ liegen, so ist sein Mass 1, und die Projektionen seiner Kanten auf die Axen $x, y, \ldots z$ des Kontinuums C sind:

$$\begin{array}{l} \alpha, o, o, \ldots o, \\ o, \beta, o, \ldots o, \\ \ldots\ldots\ldots \\ o, o, o, \ldots \gamma. \end{array}$$

folglich ist der Projektionsfaktor von C' auf C, oder $\cos \angle (CC') = \alpha\beta \ldots \gamma$.

Es sei r irgend ein in C befindlicher Strahl, $x, y, \ldots z$ seine Projektionen, ebenso r' irgend ein Strahl in C' und $t_1, t_2, \ldots t_n$ seine Projektionen, $\Theta = \angle (rr')$, so ist

$$rr' \cos \Theta = \alpha x t_1 + \beta y t_2 + \ldots + \gamma z t_n,$$

woraus vermöge einer bekannten identischen Gleichung

$$(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \ldots + \gamma^2 z^2) r'^2 - (rr' \cos \Theta)^2 = (\alpha x t_2 - \beta y t_1)^2 + \text{ etc.}$$

folgt. Wenn also der Strahl r fest bleibt, und nur r' variiert, so ist $\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \ldots + \gamma^2 z^2$ der grösste Wert von $r^2 \cos^2 \Theta$, und dieser findet statt für

$$\alpha x : \beta y : \ldots : \gamma z = t_1 : t_2 : \ldots : t_n.$$

Ist ferner α^2 das grösste unter den Quadraten $\alpha^2, \beta^2, \ldots \gamma^2$, so ist α^2 das absolute Maximum von

$$\cos^2 \Theta = \frac{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \ldots + \gamma^2 z^2}{x^2 + y^2 + \ldots + z^2}$$

und dieses Maximum findet statt für $y = o, \ldots z = o$; dann ist aber auch $t_2 = o$, $t_3 = o$, $\ldots t_n = o$. Folglich ist der spitze Winkel $\angle (xt_1)$ das absolute Minimum von Θ, und für dieses $\alpha = \cos \Theta$, wenn α positiv genommen wird. Da aber α^2 eine Wurzel derselben Gleichung $n$ten Grades ist, welche auch $\beta^2, \ldots \gamma^2$ zu Wurzeln hat, so haben die Winkel $\angle (yt_2), \ldots \angle (zt_n)$ und die Axenpaare, von denen sie gebildet werden, dieselbe analytische Bedeutung, wie der $\angle (xt_1)$ und die ihn einschliessenden Axen.

Bemerkung 1. Ergänzt man das System t_1, t_2, t_n zu einem totalen orthogonalen System, so kann man unter anderm dem Schema der Transformationselemente folgende Gestalt geben:

$$\begin{array}{llllll}
\alpha, & o, \ldots & o, & -\alpha', & o, \ldots & o \\
o, & \beta, \ldots & o, & o, & -\beta', \ldots & o \\
. & . & . & . & . & . \\
o, & o, \ldots & \gamma, & o, & o, \ldots & -\gamma' \\
\alpha', & o, \ldots & o, & \alpha, & o, \ldots & o \\
o, & \beta', \ldots & o, & o, & \beta, \ldots & o \\
. & . & . & . & . & . \\
o, & o, \ldots & \gamma', & o, & o, \ldots & \gamma
\end{array}$$

Die Determinante muss den Wert 1 haben. Es ist leicht, dieses zu verifizieren, Die Determinante wird erhalten, wenn man die Vertikalzeilen auf alle möglichen Arten permutiert und das Produkt der in die Diagonale fallenden Elemente positiv oder negativ nimmt, je nachdem die Permutation eine positive oder negative ist. Sobald man aber nicht zwei gleichnamige Vertikalzeilen der linken und rechten Hälfte vertauscht, fällt eine Null auf die Diagonale. Hieraus ist klar, dass die Determinante

$$(\alpha^2 + \alpha'^2)(\beta^2 + \beta'^2) \ldots (\gamma^2 + \gamma'^2)$$

sein muss.

Bemerkung 2. Wenn ein Strahl und ein lineares Kontinuum gegeben sind, so ist der in diesem befindliche Strahl, welcher mit jenem den kleinsten spitzen Winkel bildet, seine Projektion auf dieses lineare Kontinuum. Dieser Satz ist sehr leicht zu beweisen.

Sind nun in der $2n$fachen Totalität zwei lineare $n$fache Kontinua beliebig gegeben, so sind ihre n Axenpaare durch die Bedingung bestimmt, dass von je zwei Axen eines Paares jede die Projektion der andern ist.

§ 16. *Ueber die Zahl der Teile, in welche die nfache Totalität durch eine beliebige Menge (n — 1)facher linearer Kontinua geteilt wird.*

Satz. Sind i lineare Gleichungen mit n Variabeln gegeben, von denen nie $n+1$ zugleich bestehen, so ist die Zahl der durch sie gebildeten Teile der Totalität

$$\binom{i}{0}+\binom{i}{1}+\binom{i}{2}+\binom{i}{3}+\ldots+\binom{i}{n}=f(n,i).$$

Beweis. In der letzten der i linearen Gleichungen nehmen wir die Konstante gross genug an, dass ihr Polynom immer das gleiche Vorzeichen mit dieser Konstanten behält, welche gemeinschaftliche Lösung von je n der $i-1$ übrigen Gleichungen man darin auch substituieren mag. Die Zahl der Teile der Totalität, für welche jenes Polynom das entgegengesetzte Zeichen seiner Konstante behält, ist dann gleich der Zahl der Teile des $(n-1)$fachen linearen Kontinuums, für welches das Polynom verschwindet, oder gleich der Zahl der Teile, in welche eine $(n-1)$fache Totalität von $i-1$ linearen Kontinuen geteilt wird, also gleich $f\,(n-1, i-1)$. Da aber die erwähnten Teile der $n$fachen Totalität durch die letzte lineare Gleichung zu den schon von den übrigen $i-1$ Gleichungen gebildeten Teilen neu hinzugebracht werden, so ist

$$f(n,i)-f(n,i-1)=f(n-1,i-1).$$

Variiert man nun jene zuerst sehr gross angenommene Konstante, sodass die Gleichung irgend eine schon vorhandene gemeinschaftliche Lösung von n der übrigen festen Gleichungen passiert, so ist leicht zu zeigen, dass die Zahl $f\,(n, i)$ nachher gleich gross ist, wie vorher. Statt eines geschlossenen Teiles nämlich, worin jenes bewegte Polynom gleiches Vorzeichen mit seiner Konstanten und die n zur Lösung gehörenden Polynome jedes sein bestimmtes Vorzeichen hatten, tritt nun wiederum ein geschlossener Teil auf, innerhalb dessen alle $n+1$ Polynome entgegengesetzte Vorzeichen haben, wie vorher; innerhalb aller übrigen Teile dagegen behält jedes der i Polynome dasselbe Vorzeichen wie vorher. Um das Gesagte noch näher zu begründen, bezeichne ich diejenigen n von den i gegebenen Polynomen, welche für die betrachtete Lösung verschwinden, mit p_1, $p_2, \ldots p_n$, das Polynom, dessen Konstante berührt wird, mit p_{n+1}, eliminiere dann aus den $n+1$ Gleichungen, welche diese p als lineare Funktionen der n Variabeln $x, y, \ldots$ angeben, diese letzteren, und erhalte so die Gleichung

$$a_1 p_1+a_2 p_2+\ldots+a_n p_n+a_{n+1} p_{n+1}=C,$$

wo nur C von jener variierten Konstanten abhängt. Ist nun zuerst C positiv gewesen, so geben die Bedingungen, dass alle Glieder der linken Seite positiv sein sollten, einen geschlossenen Teil der Totalität; und wenn jetzt C die Null passiert hat und negativ geworden ist, so muss man verlangen, dass $a_1\,p_1, a_2\,p_2, \ldots a_{n+1}\,p_{n+1}$ sämtlich negativ seien, um eine geschlossene Totalität zu bekommen. Innerhalb beider geschlossener Totalitäten hat also der Wert eines jeden der Polynome $p_1, p_2, \ldots p_{n+1}$ entgegengesetztes Vor-

zeichen. Die gemachte Bemerkung gilt, so oft das bewegte Polynom eine Lösung passiert. Die Zahl $f\ (n,\ i)$ ist daher von der gegenseitigen Lage aller i linearen Kontinua unabhängig, wofern nur nie mehr als n derselben in einer Lösung zusammentreffen.

Ist kein lineares Kontinuum gegeben, so zählt die ungeteilte Totalität für 1; folglich ist $f\ (n, o) = 1$. Addiert man nun die Gleichungen

$$\begin{aligned} f(n,i) &= f(n,i-1) + f(n-1,i-1), \\ f(n,i-1) &= f(n,i-2) + f(n-1,i-2), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ f(n,1) &= f(n,o) + f(n-1,o), \\ f(n,o) &= 1, \end{aligned}$$

so erhält man

$$f(n,i) = 1 + f(n-1,o) + f(n-1,1) + f(n-1,2) + \dots + f(n-1,i-1).$$

Es sei $f(n,i) - f(n-1,i) = \varphi(n,i)$, so ist $\varphi(n,o) = o$, und

$$\varphi(n,i) = \varphi(n-1,1) + \varphi(n-1,2) + \varphi(n-1,3) + \dots + \varphi(n-1,i-1).$$

Nun ist $f(1,i) = i+1$, also $f(o,i-1) = f(1,i) - f(1,i-1) = 1$, daher auch $f(o,i) = 1$ und deshalb $\varphi(1,i) = i$; folglich ist

$$\varphi(2,i) = 1 + 2 + 3 + \dots + (i-1) = \binom{i}{2}$$

$$\varphi(3,i) = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{i-1}{2} = \binom{i}{3}$$

und überhaupt $\varphi(n,\ i) = \binom{i}{n}$. Da somit

$$f(n,i) = f(n-1,i) + \binom{i}{n}$$

ist, so folgt nun leicht:

$$f(n,\ i) = \binom{i}{o} + \binom{i}{1} + \binom{i}{2} + \binom{i}{3} + \dots + \binom{i}{n}.$$

Man sieht leicht, dass, wenn $i \overline{\overline{<}}\, n$ ist, $f(n,i) = 2^i$ wird.

Der soeben bewiesene Satz kann auch so ausgesprochen werden: Wenn i lineare Polynome mit n Variabeln beliebig gegeben sind, sodass nie mehr als n zugleich verschwinden, aber auch immer n durch eine und dieselbe endliche Lösung zum Verschwinden gebracht werden, so ist die Zahl der verschiedenen Gruppen von Vorzeichen, welche die Werte dieser Polynome für alle reellen Lösungen annehmen, gleich $\binom{i}{o} + \binom{i}{2} + \dots + \binom{i}{n}$.

Satz. Unter derselben Voraussetzung ist die Zahl der Vorzeichengruppen, welche nur für endliche Werte der Variabeln stattfinden können, gleich $\binom{i-1}{n}$. Man kann dies die Zahl der geschlossenen Teile der Totalität nennen.

Beweis. Wenn irgend $n+1$ Polynome gewählt werden, so kann man dieselben mit solchen konstanten und endlichen Faktoren multiplizieren, dass aus der Summe der Produkte die n Variabeln verschwinden. Wir haben dann eine homogene lineare Funktion der $n+1$ Polynome gefunden, welche einer Konstanten gleich ist. Denken wir uns z. B. jene Faktoren und diese Konstante sämtlich positiv und setzen für die $n+1$ Polynome eine Gruppe positiver Vorzeichen, so ist klar, dass unter dieser Bedingung kein Polynom einen unendlich grossen Wert haben kann. Da aber jede Variable als lineare Funktion von n dieser Polynome dargestellt werden kann, so kann auch keine Variable unendlich gross werden. Nun sei ein Polynom p so beschaffen, dass sein Wert für alle Lösungen, welche irgend n der übrigen Polynome verschwinden machen, dasselbe Vorzeichen, z. B. $+$, habe, und es sei eine Gruppe von Vorzeichen bekannt, welche für $p=o$ nur endliche Lösungen gestattet, z. B. die Gruppe von $i-1$ Pluszeichen; man nehme dann beliebige n Polynome $p_1, p_2, \ldots p_n$ heraus und suche die identische Relation

$$ap + a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n = A,$$

wo A positiv sein möge, so müssen, damit für $p=o$ nur endliche positive Werte von $p_1, p_2, \ldots p_n$ stattfinden können, sämtliche Faktoren $a_1, a_2, \ldots a_n$ positiv sein. Da aber für die Lösung $p_1=o, p_2=o, \ldots p_n=o$ auch p positiv sein soll, so muss auch a positiv sein. Dann gestattet aber die Gruppe der positiven Vorzeichen für $p, p_1, \ldots p_n$ nur endliche Lösungen. Sobald man aber dem Polynom p jeden beliebigen negativen Wert giebt, so kann auch z. B. p_1 jeden beliebigen positiven Wert bekommen. Hieraus ergiebt sich, dass zu der für die $i-1$ Polynome stattfindenden Zahl der fraglichen Vorzeichengruppen durch das neue Polynom p noch die Zahl der für $p=o$ stattfindenden Vorzeichengruppen, welche nur endliche Lösungen erlauben, hinzugebracht wird. Wenn wir also die fragliche Zahl mit $f\,(n, i)$ bezeichnen, so ist

$$f(n, i) = f(n, i-1) + f(n-1, i-1).$$

Dass der Durchgang von p durch eine Lösung nichts ändert, haben wir schon gesehen. Daher dürfen wir jetzt die Bedingung fallen lassen, dass unter den gegebenen Polynomen eines p sich finde, dessen Wert immer dasselbe Vorzeichen behalte, so oft auch je n der übrigen Polynome zugleich verschwinden mögen; die Formel gilt allgemein. Nun ist $f(n, i) = o$ für $i \overline{\gtrless} n$, aber $f(n, n+1) = 1$; also $f(n, i) = f(n-1, n) + f(n-1, n+1) + f(n-1, n+2) + \ldots + f(n-1, i-1)$. Es ist $f(1, i) = i-1$ für $i \overline{\gtrless} 1$, daher $f(2, i) = \binom{i-1}{2}$, $f(3, i) = \binom{i-1}{3}$, überhaupt $f(n, i) = \binom{i-1}{n}$.

Satz. Wenn i homogene lineare Polynome mit n Variabeln beliebig gegeben sind, so ist die Zahl der Vorzeichengruppen

$$2\left\{\binom{i-1}{o} + \binom{i-1}{1} + \binom{i-1}{2} + \ldots + \binom{i-1}{n-1}\right\}$$

oder doppelt so gross wie für $i-1$ nicht homogene lineare Polynome mit nur $n-1$ Variabeln.

Beweis. Man transformiere die n Variabeln so, dass eines der Polynome sich auf eine einzige Variable, z. B. x, reduziert, dividiere dann alle übrigen Polynome durch diese Variable x, so hat man es nur noch mit $n-1$ Variabeln und $i-1$ nicht homogenen Polynomen zu thun. Man stelle sämtliche Gruppen der $i-1$ Vorzeichen auf. Multipliziert man jetzt die Polynome mit einem positiven Werte von x, so werden die Gruppen nicht geändert, und zu jeder kommt noch das positive Vorzeichen des Polynoms x hinzu. Multipliziert man dann auch mit einem negativen Wert von x, so werden in jeder Gruppe alle Vorzeichen geändert, und für das Polynom x kommt das Minuszeichen hinzu. Die Zahl der Vorzeichengruppen wird also wirklich doppelt so gross als vorher.

Wenn i nichthomogene Polynome mit n Variabeln gegeben sind, so ist die Zahl aller Vorzeichengruppen zusammengesetzt aus der Zahl derer, welche nur endliche Lösungen, und die Zahl derer, welche auch unendliche Lösungen gestatten. Die letzte Zahl ist aber dieselbe, wie wenn man die Konstante eines jeden Polynoms weglässt, sodass alle Polynome in Beziehung auf die n Variabeln homogen werden. Wenn also $f(n,i)$ die Zahl aller Vorzeichengruppen überhaupt bezeichnet, so ist

$$f(n,i)=2f(n-1,i-1)+\binom{i-1}{n-1}.$$

Verbinden wir dieses mit

$$f(n,i)=f(n,i-1)+f(n-1,i-1),$$

so folgt

$$f(n,i-1)-f(n-1,i-1)=\binom{i-1}{n}$$

oder

$$f(n,i)-f(n-1,i)=\binom{i}{n},$$

woraus wiederum

$$f(n,i)=\binom{i}{0}+\binom{i}{1}+\binom{i}{2}+\dots+\binom{i}{n}$$

sich ergiebt.

§ 17. *Reguläre Polyscheme der vierfachen Totalität.*

Wenn in der dreifachen Totalität, oder im Raume, ein reguläres Polyeder von regulären m Ecken umschlossen wird, deren je n in einer Ecke zusammenstossen, so wollen wir dasselbe mit dem Charakter (m,n) bezeichnen. Die Geometrie kennt zwei Verfahren, alle Kombinationen (m,n), welche vorhandenen Polyedern entsprechen, aufzuzählen und die Zahl der Stücke eines jeden zu bestimmen. Das erste Verfahren ist rein konstruktiv, ohne Rücksicht auf Massverhältnisse. Man stellt sich nur die Aufgabe, aus lauter m Ecken, deren je n einen Körperwinkel bilden, ein geschlossenes Polyeder zusammenzufügen. Der Satz in § 10 reicht für diesen Zweck hin; für $n=3$ wird er

$a_o - a_1 + a_2 - a_3 = 1$, oder, da $a_3 = 1$ ist, $a_o - a_1 + a_2 = 2$. Man findet leicht $na_o = 2a_1 = ma_3$ und hieraus

$$a_o : a_1 : a_2 : 1 = 4\,m : 2\,mn : 4\,n : (4 - (m-2)(n-2)).$$

Die Natur der Aufgabe verlangt für $4 - (m-2)(n-2)$ einen positiven Wert. Da nun der kleinste Wert für m sowohl als für n die Zahl 3 ist, so sind für das Produkt $(m-2)(n-2)$ nur die Werte 1, 2, 3 möglich, woraus als einzig mögliche Charaktere (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3) sich ergeben. (Gestattet man für a_o, a_1, a_2 auch unendlich grosse Werte, so kann noch $(m-2)(n-2) = 4$ sein, woraus die Charaktere (3, 6), (4, 4), (6, 3) entstehen, welche nur die Arten anzeigen, auf welche die Ebene mit gleichen regulären Vielecken bedeckt werden kann.) Durch dieses Verfahren ist das Vorhandensein der den fünf obigen Charakteren entsprechenden Polyeder noch nicht bewiesen, sondern nur gezeigt, dass keine anderen Charaktere möglich sind. Es kommt nur noch darauf an, einen dem Charakter entsprechenden Körperwinkel zu konstruieren. Gelingt dies, so weiss man dann zum voraus, dass beim wiederholten Aneinanderfügen der offenen polyedrischen Figur des Körperwinkels ein geschlossenes Polyeder von der bestimmten Anzahl von Stücken entstehen wird. Vermöge der Natur dieses ersten konstruktiven Verfahrens ist es gleichgiltig, ob der Körperwinkel einfach oder überschlagen sei; ebenso in Beziehung auf das Vieleck; die Zahl der Stücke des Polyeders wird dieselbe bleiben. Wenn wir z. B. das Symbol $\frac{5}{2}$ für ein überschlagenes reguläres Fünfteck gebrauchen, dessen Perimeter zweimal herumgeht, so haben das einfache Polyeder (5, 3) und das überschlagene $(\frac{5}{2}, 3)$ die gleiche Zahl von Stücken.

Das andere Verfahren gründet sich auf die Betrachtung von Massverhältnissen. Man weiss z. B., dass die Konstruktion eines dem Charakter (m, n) entsprechenden regulären Ecks die Bedingung $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ erfordert, und dass ein solches Eck auch für gebrochene Werte von m, n möglich ist, wenn sie nur dieser Bedingung genügen. Die Projektion der Oberfläche des Polyeders auf eine um sein Centrum beschriebene Kugel liefert ein Netz von regulären sphärischen Vielecken, und, da der Inhalt eines solchen durch seine Winkel ausgedrückt werden kann, so ist das rationale Verhältnis, in welchem er zur ganzen Kugelfläche steht, bekannt. Dabei ist aber immer noch möglich, dass das Netz nie sich schliesst. Setzen wir z. B. $m = \frac{2}{7}$, $n = 3$, so ist die Bedingung $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ erfüllt; der Inhalt des $\left(\frac{7}{2}\right)$Ecks ist $\frac{5}{3}\pi$ oder $\frac{5}{12}$ der Kugelfläche. Obschon man daher einen Augenblick glauben könnte, das Netz bestände aus 12 überschlagenen Siebenecken und enthielte die Kugelfläche 5 Mal, so kehrt doch das Netz nicht in sich selbst zurück, weil (7, 3) nicht Charakter eines Polyeders sein kann.

Schliesst man aber überschlagene Körperwinkel und Vielecke von der Betrachtung aus, so giebt auch dieses zweite Verfahren nur die wirklichen regulären Polyeder, und

der Satz über den Inhalt eines sphärischen Vielecks lehrt uns die Zahl der Stücke eines jeden kennen.

Gehen wir jetzt vom Raume zur vierfachen Totalität über, so ist sogleich klar, dass der Umschluss eines regulären Polyschems aus lauter gleichen regulären Polyedern bestehen muss, denen wir den Charakter (m, n) geben wollen. Da aber um jede Grenzlösung herum die betreffenden Stücke des Umschlusses auf reguläre Art zusammengefügt sein müssen, so ist nicht weniger klar, dass die Enden aller von der Grenzlösung ausgehenden Grenzstrahlen oder Kanten in einem und demselben dreifachen linearen Kontinuum liegen, und wenn man dieses als Raum betrachtet, darin als Ecken eines regulären Polyeders gruppiert sein müssen; da die Seitenflächen des letzten reguläre n Ecke sind, so setzen wir (n, p) als Charakter dieses Polyeders. Hierdurch ist die Bedeutung des Charakters (m, n, p), den wir für ein reguläres Polyschem gebrauchen wollen, hinreichend erklärt. Bei der Aufsuchung der möglichen Charaklere dieser Art können wir wiederum, wie vorhin für den Raum gezeigt worden, entweder ein konstruktives oder ein rechnendes Verfahren anzuwenden versuchen. Das erste würde, wenn m, n, p rationale Brüche sind, nur ihre Zähler, das zweite hingegen ihre Werte berücksichtigen. Was die allgemeine Bestimmung der Zahl der Stücke eines vierfachen Polyschems vom Charakter (m, n, p) betrifft, so lassen uns leider beide Verfahren gleich sehr im Stich; das erste, weil die Formel $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 1$ sich auf $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0$ reduziert und deshalb nur die Verhältnisse der gesuchten Zahlen, nicht ihre Werte selbst uns kennen lehrt; das zweite, weil es auf einfache Integrale von transcendenter Natur führt, deren Auswertung nur für jeden einzelnen Charakter besonders und zwar mit Hilfe des ersten konstruktiven Verfahrens gelingt. Es bleibt also kein anderes Mittel übrig, die Existenz irgend eines Polyschems (m, n, p) zu beurteilen und die Zahl seiner Stücke zu erfahren, als die wirkliche Konstruktion; durch den Mangel einer apriorischen Formel für reguläre Polyscheme unterscheidet sich demnach die vierfache Totalität wesentlich vom Raume.

Wir versuchen zuerst auf dem allgemeinen Standpunkt das Mögliche zu thun. Der Umschluss des regulären Polyschems (m, n, p) enthalte a_0 Ecken, a_1 Kanten, a_2 Vielecke, a_3 Polyeder, so ist $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0$. Das schon erwähnte Polyeder (n, p) nennen wir Basis derjenigen Grenzlösung des Polyschems, welche Kanten aussendet nach allen Ecken jenes ersten. Diese Basis hat $4n : (2n + 2p - np)$ Ecken, $2np : (2n + 2p - np)$ Kanten und $4p : (2n + 2p - np)$ Vielecke. Von der entsprechenden Grenzlösung des Polyschems gehen also resp. so viele Kanten, m-Ecke und Polyeder (m, n) aus. Multipliziert man mit a_0, so erhält man die Gesamtzahlen. Da aber jede Kante zwei Grenzlösungen verbindet, jedes m-Eck deren m und jedes Polyeder (m, n) deren $4m : (2m + 2n - mn)$ in sich vereinigt, so hat man

$$\frac{4n}{2(n+p)-np}\, a_0 = 2a_1, \quad \frac{2np}{2(n+p)-np}\, a_0 = ma_2, \quad \frac{4p}{2(n+p)-np}\, a_0 = \frac{4m}{2(m+n)-mn}\, a_3,$$

oder

$$a_0 : a_1 : a_2 : a_3 = m\,(2\,(n+p) - np) : 2\,mn : 2\,n\,p : p\,(2\,(m+n) - mn). \quad . \quad . \quad (1)$$

Es versteht sich von selbst, dass beide Charaktere (m,n) und (n,p) nur existierenden Polyedern entsprechen dürfen. Ist 1 die Seite eines regulären Polyeders (n,p), so ist $\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{p} : \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{p} - \cos^2 \frac{\pi}{n}}$ der Radius der umschriebenen Kugel. Wird aber 1 als Kante AB des Polyschems (m,n,p) angenommen, so ist $2 \cos \frac{\pi}{m}$ die Seite der Basis der Grenzlösung A, und wenn M das Centrum dieser Basis bezeichnet, so ist also der Radius MB der umschriebenen Kugel $= \cos \frac{\pi}{m} \sin \frac{\pi}{p} : \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{p} - \cos^2 \frac{\pi}{n}}$. Da AMB ein in M rechtwinkliges Dreieck ist, so ist $AM = \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{m} \sin^2 \frac{\pi}{p} - \cos^2 \frac{\pi}{n}} : \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{p} - \cos^2 \frac{\pi}{n}}$, und

$$\sin \frac{\pi}{m} \sin \frac{\pi}{p} > \cos \frac{\pi}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

eine Bedingung, ohne welche das Polyschem nicht existieren kann. Auf der Verlängerung des Strahls AM liegt eine Lösung O, welche von A und B gleichweit absteht; sie wird dann auch von allen andern Ecken der Basis gleichweit abstehen, ist also überhaupt von allen Grenzlösungen des Polyschems gleich weit entfernt; wir nennen sie daher das Centrum des Polyschems und OA seinen Radius. Ist nun C die Mitte der Kante AB, so ist das Dreieck OAC dem ABM ähnlich; daher der Radius gleich:

$$\frac{\sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{p} - \cos^2 \frac{\pi}{n}}}{2\sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{m} \sin^2 \frac{\pi}{p} - \cos^2 \frac{\pi}{n}}}$$

Ist N das Centrum eines der in A zusammenstossenden Grenzpolyeder, so ist $NA = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{n} : \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{n} - \cos^2 \frac{\pi}{m}}$; folglich bleibt das Verhältnis

$$\frac{NA}{OA} = \frac{\sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{m} \sin^2 \frac{\pi}{p} - \cos^2 \frac{\pi}{n}}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{m} - \cos^2 \frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{p} - \cos^2 \frac{\pi}{n}}}$$

sich gleich, wenn man auch m und p miteinander vertauscht; daher ändert sich auch das Verhältnis $ON : OA$ nicht. Im Raume entspricht der Satz, dass, wenn (m, n) und (n, m) derselben Kugel eingeschrieben sind, sie auch wieder derselben Kugel umschrieben sind.

Halten wir uns an ganze Werte von m, n, p, so genügen der Bedingung (2) nur folgende Charaktere:

$$(3, 3, 3),\ (3, 3, 4),\ (3, 3, 5),\ (3, 4, 3),\ (4, 3, 3),\ (5, 3, 3).$$

Der Charakter $(4, 3, 4)$, welcher $\sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{3}$ giebt, lässt A mit M zusammenfallen und zeigt also nur die Erfüllung des Raums durch aneinander gelegte Würfel an.

Die Centra N aller in A zusammengefügter Polyeder (m, n) liegen in einem dreifachen linearen Kontinuum und entsprechen den Vielecken jener Basis (n, p), indem die Strahlen AN durch die Mittelpunkte dieser Vielecke gehen; diese N bilden also ein Polyeder (p, n). Es ist nun leicht einzusehen, dass die Centra aller das Polyschem (m, n, p) umschliessenden Polyeder die Grenzlösungen eines neuen Polyschems (p, n, m) sind. Wenn also ein Polyschem von einem gewissen Charakter existiert, so existiert auch das Polyschem, in dessen Charakter die Elemente die umgekehrte Ordnung befolgen. Wir nennen solche Polyscheme reciproke. Wenn zwei reciproke Polyscheme gleichen Radius OA haben, so ist auch in beiden der Abstand ON des Centrums eines Grenzpolyeders vom eigentlichen Centrum gleich. Unter den 6 oben nicht als unmöglich aufgeführten Charakteren sind zwei, $(3, 3, 3)$ und $(3, 4, 3)$ mit sich selbst reciprok; die übrigen bestehen aus zwei Paaren reciproker Charaktere: $(3, 3, 4)$, $(4, 3, 3)$ und $(3, 3, 5)$, $(5, 3, 3)$. Im Raume ist bekanntlich nur das Tetraeder mit sich selbst reciprok; reciproke Paare sind: Oktaeder, Hexaeder und Ikosaeder, Dodekaeder.

Wir wollen nun durch wirkliche Konstruktion die Existenz aller 6 den obigen Charakteren entsprechenden Polyscheme beweisen.

1. Dem Charakter $(3, 3, 3)$ entspricht das Polyschem mit der kleinsten Zahl von Grenzkontinuen. Es hat also 5 Ecken, 10 Kanten, 10 Dreiecke und 5 Tetraeder. Wir nennen es Pentaschem.

2. Um das Polyschem $(3, 3, 4)$ zu konstruieren, tragen wir auf den positiven und negativen Hälften der vier vom Ursprung O ausgehenden Axen acht gleiche Abstände auf, so werden je vier auf lauter verschiedenen Axen befindliche Endlösungen ein Tetraeder bilden, und da eine Gruppe von vier Vorzeichen auf 16 Arten variiert werden kann, so giebt es 16 solche Tetraeder. Ist A das eine Ende einer Axe, so bilden die 6 Enden der 3 übrigen Axen ein Oktaeder $(3, 4)$, als Basis von A. Das konstruierte Polyschem entspricht also dem Charakter $(3, 3, 4)$; es hat 8 Ecken, 24 Kanten, 32 Dreiecke und 16 Tetraeder, und möge daher Hekkaidekaschem heissen.

3. Da jede Grenzlösung des Polyschems $(3, 3, 5)$ eine ikosaedrische Basis hat, so erheischt die folgende Erörterung eine vorläufige Bezeichnung aller Stücke des Ikosaeders mit Ziffern. Ich denke mir zwei entgegengesetzte Ecken desselben durch eine Axe verbunden und zähle dann die Stücke zonenweise ab. Es giebt dann zwei Zonen, welche je 5 Ecken enthalten; je die dem einen Axenende benachbarte nenne ich seinen Fünfeckschnitt.

Schema der Ecken.	Schema d. Dreiecke.	Schema der Kanten.
1	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5
2 3 4 5 6	6 7 8 9 10	6 7 8 9 10
7 8 9 10 11	11 12 13 14 15	11 . 16 . 12 . 17 . 13 . 18 . 14 . 19 . 15 . 20
12	16 17 18 19 20	25 21 22 23 24
		26 27 28 29 30.

Im Schema der Ecken sind 2, 3, 4, 5, 6 die Ecken des Fünfeckschnitts von 1; die Ecken 2, 3, 7 bilden ein Dreieck, u. s. f. Im Schema der Flächen bedeutet 1 das Δ (1 . 2 . 3), die erste Horizontalzeile enthält die um das Eck 1 herumliegenden Dreiecke, die zweite die fünf Dreiecke, welche mit den vorigen Kanten gemein haben; und wie die übrigen Dreiecke angeordnet sind, wird deutlich genug werden, wenn ich sage, dass z. B. die Dreiecke 1, 2, 7, 11, 6 im Eck 3, die Dreiecke 7, 11, 16, 17, 12 im Eck 8 zusammenstossen. Im Schema der Kanten enthält die erste Horizontalzeile die vom Eck 1 nach den Ecken 2, 3, 4, 5, 6 gehenden Kanten, die zweite die Seiten (2 . 3), (3 . 4), etc. des Fünfeckschnitts, die dritte die Kanten (2 . 7), (7 . 3), (3 . 8), (8 . 4), etc., die vierte die Kanten (11 . 7), (7 . 8), (8 . 9), etc., endlich die fünfte die vom Eck 12 ausgehenden Kanten (12 . 7), (12 . 8), etc.

Es sei nun a ein Eck des Polyschems; die 12 Ecken seiner ikosaedrischen Basis seien mit b bezeichnet; ich stelle dann dieses Eck dar durch

$$a \left(\begin{array}{cccccc} & & b_1 & & & \\ b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & \\ & b_7 & b_8 & b_9 & b_{10} & b_{11} \\ & & & b_{12} & & \end{array} \right) \text{ oder z. B. auch: } a \left(\begin{array}{cccccc} & & b_2 & & & \\ b_1 & b_3 & b_7 & b_{11} & b_6 & \\ & b_4 & b_8 & b_{12} & b_{10} & b_5 \\ & & & b_8 & & \end{array} \right).$$

indem ich links die Grenzlösung, rechts innerhalb der Klammern die Ecken ihrer Basis in irgend einer Anordnung, aus der man ihre gegenseitige Lage erkennen kann, hinschreibe.

Die dreifachen Kontinuen der Basen von a und b_1 müssen sich in einem zweifachen linearen Kontinuum schneiden. Unter den 12 von b_1 ausgehenden Kanten des Polyschems sind nun 6 schon bekannt; es sind die, welche nach a, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 gehen. Diese Ecken gehören also der Basis von b_1 an, und die fünf letzten derselben hat sie mit der Basis von a gemein. Jenes zweifache Kontinuum ist also die Ebene des Fünfeckschnitts $b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_6$; und in Beziehung auf denselben kann man a und b_1 vertauschen. Das Eck b_1 kann demnach durch die Formel

$$b_1 \left(\begin{array}{ccccc} & & a & & \\ b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ x & . & . & . & . \\ & & . & & \end{array} \right)$$

dargestellt werden, wo x einen der noch unbekannten Scheitel der Basis bezeichnet. Wiederholt man das gleiche Verfahren in Beziehung auf die beiden Formeln für a und b_1, um Formeln für b_2 und b_3 zu erhalten, so werden diese

$$b_2 \left(\begin{array}{ccccc} & & a & & \\ b_1 & b_3 & b_7 & b_{11} & b_6 \\ x & . & . & . & . \\ & & . & & \end{array} \right), \qquad b_3 \left(\begin{array}{ccccc} & & a & & \\ b_1 & b_4 & b_8 & b_7 & b_2 \\ . & . & . & . & x \\ & & . & & \end{array} \right);$$

einzig in diesen Formeln für b_1, b_2, b_3 kann das neue Eck x vorkommen, weil unter allen bis jetzt bekannten Ecken nur diese mit x durch Kanten verbunden sind. Die Zahl aller ähnlichen neuen Scheitel ist demnach $\frac{12 . 5}{3} = 20$; sie entsprechen den Flächen des Ikosaeders und sollen durch $c_1, c_2, \ldots c_{20}$ bezeichnet werden. Die mit a diametral entgegengesetzten Scheitel der Basen von $b_1, b_2, \ldots b_{12}$ mögen $d_1, d_2, \ldots d_{12}$ heissen.

Demnach sind jetzt die vollständigen Formeln für die Ecken b_1, b_2, b_3, welche wir darum gerade anführen, weil nur diese den Scheitel c_1 enthalten, folgende:

$$b_1\begin{pmatrix} & & a & & \\ b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ & & d_1 & & \end{pmatrix}, \quad b_2\begin{pmatrix} & & a & & \\ b_1 & b_3 & b_7 & b_{11} & b_6 \\ c_1 & c_6 & c_{15} & c_{10} & c_5 \\ & & d_2 & & \end{pmatrix}, \quad b_3\begin{pmatrix} & & a & & \\ b_1 & b_4 & b_8 & b_7 & b_2 \\ c_2 & c_7 & c_{11} & c_6 & c_1 \\ & & d_3 & & \end{pmatrix}.$$

Sie geben für das Eck c_1 die Formel:

$$c_1\begin{pmatrix} & & b_1 & & \\ b_2 & b_3 & c_2 & d_1 & c_5 \\ c_6 & d_3 & x & . & d_2 \\ & & . & & \end{pmatrix}.$$

Von den drei noch unbekannten Scheiteln der Basis kann der mit x bezeichnete nur in den Formeln der benachbarten Ecken c_2, d_1, d_3 vorkommen. (Die beiden nicht bezeichneten verhalten sich ähnlich). Jeder mit x analoge Scheitel kommt also in den 20 Formeln für c nur zweimal vor; ihre Anzahl ist daher $\frac{20 . 3}{2} = 30$; sie entsprechen den Kanten und sollen mit e bezeichnet werden; jenes x z. B. wird, da es der den Flächen 1, 2 gemeinschaftlichen Kante entspricht, zu e_2. Wir bekommen so für die Ecken c der ersten Horizontalzeile, deren Basen den Scheitel d_1 gemein haben, die Formeln:

$$c_1\begin{pmatrix} & & b_1 & & \\ b_2 & b_3 & c_2 & d_1 & c_5 \\ c_6 & d_3 & e_2 & e_1 & d_2 \\ & & e_6 & & \end{pmatrix}, \quad c_2\begin{pmatrix} & & b_1 & & \\ b_3 & b_4 & c_3 & d_1 & c_1 \\ c_7 & d_4 & e_3 & e_2 & d_3 \\ & & e_7 & & \end{pmatrix}, \quad c_3\begin{pmatrix} & & b_1 & & \\ b_4 & b_5 & c_4 & d_1 & c_2 \\ c_8 & d_5 & e_4 & e_3 & d_4 \\ & & e_8 & & \end{pmatrix}.$$

$$c_4\begin{pmatrix} & & b_1 & & \\ b_5 & b_6 & c_5 & d_1 & c_3 \\ c_9 & d_6 & e_5 & e_4 & d_5 \\ & & e_9 & & \end{pmatrix}, \quad c_5\begin{pmatrix} & & b_1 & & \\ b_6 & b_2 & c_1 & d_1 & c_4 \\ c_{10} & d_2 & e_1 & e_5 & d_6 \\ & & e_{10} & & \end{pmatrix}.$$

Aus der früheren Formel für b_1 und aus diesen fünf ergiebt sich folgende Formel für d_1, welches anderswo bis jetzt nicht vorgekommen ist:

$$d_1\begin{pmatrix} & & b_1 & & \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_1 \\ & & . & & \end{pmatrix}.$$

Der einzige hier fehlende Scheitel kann sonst in keiner der 12 Formeln für die d vorkommen. Alle analogen Scheitel sind daher auch 12 an der Zahl; wir bezeichnen sie mit f, den hier fehlenden z. B. mit f_1.

Der Scheitel e_1 findet sich nur in den Formeln für c_1, c_5, d_1, d_2; die zwei letzten sind:

$$d_1\left(\begin{array}{c} b_1 \\ c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5 \\ \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4 \quad e_5 \quad e_1 \\ f_1 \end{array}\right), \quad d_2\left(\begin{array}{c} b_2 \\ c_1 \quad c_6 \quad c_{15} \quad c_{10} \quad c_5 \\ \quad e_6 \quad e_{11} \quad e_{20} \quad e_{10} \quad e_1 \\ f_2 \end{array}\right).$$

Aus diesen 4 Formeln zusammen ergiebt sich die Formel

$$e_1\left(\begin{array}{c} c_1 \\ d_1 \quad c_5 \quad d_2 \quad e_6 \quad e_2 \\ \quad e_5 \quad e_{10} \quad f_2 \quad \cdot \quad f_1 \\ \cdot \end{array}\right).$$

Der eine hier noch fehlende Scheitel kann unter allen 30 Formeln für die e nur in denen für e_1, e_2, e_6, der andere nur in denen für e_1, e_5, e_{10} vorkommen. Jener entspricht also dem von den Kanten 1, 2, 6 umschlossenen Dreieck 1, dieser dem Dreieck 5. Die analogen Scheitel sollen mit g bezeichnet werden; ihre Zahl ist $\frac{30 \cdot 2}{3} = 20$. Wir bekommen so folgende Formeln:

$$e_1\left(\begin{array}{c} c_1 \\ d_1 \quad c_5 \quad d_2 \quad e_6 \quad e_2 \\ \quad e_5 \quad e_{10} \quad f_2 \quad g_1 \quad f_1 \\ g_5 \end{array}\right), \quad e_2\left(\begin{array}{c} c_2 \\ d_1 \quad c_1 \quad d_3 \quad e_7 \quad e_3 \\ \quad e_1 \quad e_6 \quad f_3 \quad g_2 \quad f_1 \\ g_1 \end{array}\right), \quad e_3\left(\begin{array}{c} c_3 \\ d_1 \quad c_2 \quad d_4 \quad e_8 \quad e_4 \\ \quad e_2 \quad e_7 \quad f_4 \quad g_3 \quad f_1 \\ g_2 \end{array}\right),$$

$$e_4\left(\begin{array}{c} c_4 \\ d_1 \quad c_3 \quad d_5 \quad e_9 \quad e_5 \\ \quad e_3 \quad e_8 \quad f_5 \quad g_4 \quad f_1 \\ g_3 \end{array}\right), \quad e_5\left(\begin{array}{c} c_5 \\ d_1 \quad c_4 \quad d_6 \quad e_{10} \quad e_1 \\ \quad e_4 \quad e_9 \quad f_6 \quad g_5 \quad f_1 \\ g_4 \end{array}\right), \quad e_6\left(\begin{array}{c} c_1 \\ d_2 \quad c_6 \quad d_3 \quad e_2 \quad e_1 \\ \quad e_{11} \quad e_{16} \quad f_3 \quad g_1 \quad f_2 \\ g_6 \end{array}\right).$$

Unter den bis jetzt gefundenen Formeln sind die für d_1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 die einzigen, in denen f_1 vorkommt. Sie geben

$$f_1\left(\begin{array}{c} d_1 \\ e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4 \quad e_5 \\ \quad g_1 \quad g_2 \quad g_3 \quad g_4 \quad g_5 \\ h_1 \end{array}\right),$$

wo wir den neuen Scheitel schon mit h_1 bezeichnet haben, weil es sogleich klar ist, dass er in allen 12 ähnlichen Formeln nur einmal gerade hier vorkommt und daher dem f_1 oder dem Ikosaedereck 1 entspricht.

g_1 kommt vor nur in den Formeln für $e_1, e_2, e_6, f_1, f_2\, f_3$; von diesen sind die zwei letzten:

$$f_2\left(\begin{array}{c} d_2 \\ e_1\quad e_6\quad e_{11}\quad e_{20}\quad e_{10} \\ g_1\quad g_6\quad g_{15}\quad g_{10}\quad g_5 \\ h_2 \end{array}\right),\quad f_3\left(\begin{array}{c} d_3 \\ e_2\quad e_7\quad e_{12}\quad e_{16}\quad e_6 \\ g_2\quad g_7\quad g_{11}\quad g_6\quad g_1 \\ h_3 \end{array}\right).$$

Alle sechs Formeln geben

$$g_1\left(\begin{array}{c} e_1 \\ e_6\quad e_2\quad f_1\quad g_5\quad f_2 \\ f_3\quad g_2\quad h_1\quad h_2\quad g_6 \\ h_3 \end{array}\right);$$

alle Ecken der Basis von g_1 sind also schon vollständig vorhanden.

h_1 kommt bis jetzt vor nur in den Formeln für $f_1, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5$. Sie geben

$$h_1\left(\begin{array}{c} f_1 \\ g_1\quad g_2\quad g_3\quad g_4\quad g_5 \\ h_3\quad h_4\quad h_5\quad h_6\quad h_2 \\ i \end{array}\right).$$

Der neue Scheitel i muss in den Formeln aller benachbarten Scheitel h_2, h_3, h_4, h_5, h_6 sich wieder finden. Er ist daher einzig in seiner Art, hat die vollständige Formel

$$i\left(\begin{array}{c} h_1 \\ h_2\quad h_3\quad h_4\quad h_5\quad h_6 \\ h_7\quad h_8\quad h_9\quad h_{10}\quad h_{11} \\ h_{12} \end{array}\right)$$

und schliesst daher das Polyschem zu.

Die Ecken a und i waren einzeln, die b, d, f, h zu 12, die c und g zu 20, die e zu 30. Das Polyschem hat also 120 Ecken, 720 Kanten, 1200 Dreiecke und 600 Tetraeder; es möge Hexakosioschem heissen.

Die hier ausgeführte Konstruktion ist von der einfachen oder überschlagenen Beschaffenheit der ikosaedrischen Basis eines Ecks unabhängig. Da nun $\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{5} > \cos\frac{\pi}{3}$ und daher die Zusammenfügung eines Ecks möglich ist, so ist durch das vorige auch die Existenz des überschlagenen Hexakosioschems $\left(3, 3, \frac{5}{2}\right)$ bewiesen.

4. Sind x, y, z, w orthogonale Variabeln, so können diese auf 6 Arten zu zweien kombiniert werden; bei zwei Variabeln können die Vorzeichen auf 4 Arten variiert werden. Es giebt also im ganzen 24 Gleichungen von der Form $x + y = 1$; diese nun stellen den Umschluss des Polyschems (3, 4, 3) dar. Das Oktaeder $(x + y = 1)$ hat die Ecken $(1, 0, 0, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2})$, $(0, 1, 0, 0)$. Auf den Axen liegen 8 Ecken, wie $(1, 0, 0, 0)$, $(-1, 0, 0, 0)$, etc.; ausser

diesen giebt es noch 16 Ecken, wie ($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$). Im Eck $(1, 0, 0, 0)$ treffen die 6 Oktaeder, $x \pm y = 1$, $x \pm z = 1$, $x \pm w = 1$, zusammen; im Eck ($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$) die 6 Oktaeder, $x + y = 1$, $x + z = 1$, $z + y = 1$, $y + w = 1$, $w + x = 1$, $z + w = 1$. Der Abstand jedes Ecks vom Ursprung ist 1; jede Kante ist 1. Das Centrum des Oktaeders $(x + y = 1)$ ist ($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0$), sein Abstand vom Ursprung also $\sqrt{\frac{1}{2}}$, gleich dem Radius der dem Oktaeder umschriebenen Kugel. Wir nennen dieses Polyschem (3, 4, 3) nach der Zahl seiner Grenzoktaeder Eikositetraschem. Es hat 24 Ecken, 96 Kanten, 96 Dreiecke und 24 Oktaeder. Will man eines der 16 Ecken $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ als Axenende erscheinen lassen, so braucht man nur die Variabeln mittelst der orthogonalen Formeln

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2} x' + \tfrac{1}{2} y' + \tfrac{1}{2} z' + \tfrac{1}{2} w', \\ y &= \tfrac{1}{2} x' + \tfrac{1}{2} y' - \tfrac{1}{2} z' - \tfrac{1}{2} w', \\ z &= \tfrac{1}{2} x' - \tfrac{1}{2} y' + \tfrac{1}{2} z' - \tfrac{1}{2} w', \\ w &= \tfrac{1}{2} x' - \tfrac{1}{2} y' - \tfrac{1}{2} z' + \tfrac{1}{2} w' \end{aligned}$$

zu transformieren; die Determinante dieser Transformationselemente ist -1. Eine andere orthogonale Transformation ist

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot x' + \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot y' &&, \\ y &= -\sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot x' + \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot y' &&, \\ z &= && \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot z' + \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot w', \\ w &= && -\sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot z' + \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot w'; \end{aligned}$$

im neuen Systeme sind dann alle 24 Ecken auf ähnliche Weise, z. B. durch ($\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, 0, 0$) dargestellt, hingegen von den Grenzkontinuen acht durch Gleichungen, wie $x' = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und die 16 übrigen durch Gleichungen, wie $x' + y' + z' + w' = \sqrt{2}$.

Man wird leicht erkennen, dass dieses Polyschem (3, 4, 3) eine Kombination des Hekkaidekaschems (3, 4, 3) und des sogleich näher zu beschreibenden Oktaschems (4, 3, 3) ist.

5. Das Polyschem (4, 3, 3) ist zum Hekkaidekaschem (3, 3, 4) reciprok; seine Existenz ist hierdurch schon bewiesen; es hat 16 Ecken, 32 Kanten, 24 Quadrate und 8 Würfel, und möge daher Oktaschem heissen. Als Gleichungen der acht Grenzkontinua kann man $w = \pm 1$, $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$ setzen; dann geben z. B. die Bedingungen $w = +1$, $-1 < x > 1$, $-1 < y < 1$, $-1 < z < 1$ einen Würfel. Die Ecken sind $(1, 1, 1, 1)$, und alle übrigen, welche sich hieraus durch Variation der Vorzeichen ergeben. Das Oktaschem ist das vierfache orthogonale Paralleloschem, dessen Kanten alle gleich sind.

6. Die Existenz des Polyschems (5, 3, 3) ist schon durch seine Reciprozität zum Hexakosioschem (3, 3, 5) bewiesen. Das es 600 Ecken, 1200 Kanten, 720 Fünfecke,

120 Dodekaeder hat, so möge es Hekatonkaieikosaschem heissen. Es giebt zwei Arten desselben, ein einfaches, das eigentliche $(5, 3, 3)$, und ein überschlagenes $\left(\frac{5}{2}, 3, 3\right)$, welches von überschlagenen Dodekaedern $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$ umschlossen wird.

Ich lasse hier eine Uebersicht der Massverhältnisse der vierfachen regulären Polyscheme folgen. Die Kante eines jeden ist als lineare Einheit angenommen. Es sei O das Centrum des Polyschems, AB eine Kante eines Grenzpolyeders, N dessen Centrum, $OA = R$, $NA = K$, $ON = r$, $\angle AOB = a$; ferner sei $\varrho = \cos\frac{a}{2}$ der Radius der einer Basis eines Ecks umschriebenen Kugel, K' der Radius der einem Grenzpolyeder eingeschriebenen Kugel, n die Zahl der Grenzpolyeder, P der räumliche Inhalt eines solchen, und S das Mass der vom Polyschem umschlossenen Totalität; endlich sei δ der Winkel zwischen zweien benachbarten Grenzkontinuen, d. h., wenn $ax + by + cz + dw = r$, $a'x + b'y + c'z + d'w = r$, (wo $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, $a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2 = 1$) die Gleichungen dieser Grenzkontinuen sind, so sei $aa' + bb' + cc' + dd' = -\cos\delta$. Dann ist

$$R = \frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}, \quad r = \sqrt{R^2 - K^2}, \quad \operatorname{cotg}\frac{\delta}{2} = \frac{K'}{r}, \quad S = \frac{n}{4}Pr.$$

1. Pentaschem. $\varrho = \sqrt{\frac{3}{8}}$, $\cos a = -\frac{1}{4}$, $R = \sqrt{\frac{2}{5}}$, $K = \sqrt{\frac{3}{8}}$, $K' = \sqrt{\frac{1}{24}}$, $r = \sqrt{\frac{1}{40}} = \frac{1}{4}R$, $\cos\delta = \frac{1}{4}$, $S = \frac{\sqrt{5}}{96} = \frac{25\sqrt{5}}{384}R^4$.

2. Hekkaidekaschem. $\varrho = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $a = \frac{\pi}{2}$, $R = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $K = \sqrt{\frac{3}{8}}$, $K' = \sqrt{\frac{1}{24}}$, $r = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}R$, $\delta = \frac{2\pi}{3}$, $S = \frac{1}{6} = \frac{2}{3}R^4$.

3. Einfaches Hexakosioschem. $\varrho = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$, $a = \frac{\pi}{5}$, $R = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $r = \frac{\sqrt{5}+2}{2\sqrt{2}}$. $\operatorname{cotg}\frac{\delta}{2} = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{3}} \sin\delta = \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{10}$, $S = \frac{25(\sqrt{5}+2)}{4} = \frac{25(\sqrt{5}-1)}{8}R^4$.

4. Ueberschlagenes Hexakosioschem. $a = \frac{3\pi}{5}$, $R = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $r = \frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{2}}$, $\operatorname{cotg}\frac{\delta}{2} = \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}}$.

5. Eikositetraschem. $\varrho = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a = \frac{\pi}{3}$, $R = 1$, $K = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $K' = \sqrt{\frac{1}{6}}$, $r = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\delta = \frac{2\pi}{3}$, $S = 2 = 2R^4$.

6. Oktaschem. $\varrho = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a = \frac{\pi}{3}$, $R = 1$, $K = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $K' = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2}$, $\delta = \frac{\pi}{2}$, $S = 1$.

7. Einfaches Hekatonkaieikosaschem. $\varrho = \sqrt{\frac{3}{8}} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\tang \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{3}}$, $R = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$, $K = \frac{\sqrt{5}+1}{4}\sqrt{3}$, $K' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^5}$, $r = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^4$, $\delta = \frac{4\pi}{5}$, $S = \frac{15\sqrt{5}}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^8 = \frac{15\sqrt{5}}{8} R^4$.

8. Ueberschlagenes Hekatonkaieikosaschem. $\tang \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}}$, $R = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$, $r = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^4$, $\delta = \frac{2\pi}{5}$.

Wie das Eck des Polyschems (m, n, p) durch seine Basis (n, p) und den Wert von ϱ bestimmt war, ebenso ist das centrale Eck O, welches das Grenzpolyeder (m, n) zur Basis hat, durch diese und durch den Wert von $\frac{K}{R}$ bestimmt. Ist nun eines jener äusserlichen Ecken mit irgend einem der centralen kongruent, so ist das jenem angehörige Polyeder geeignet, durch Aneinanderreihung die vierfache Totalität auszufüllen. Nun ist $\varrho\,(3, 3, 4) = \frac{K}{R}(3, 4, 3) = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\varrho\,(3, 4, 3) = \frac{K}{R}\,(4, 3, 3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varrho\,(4, 3, 3) = \frac{K}{R}(3, 3, 4)$. Die vierfache Totalität wird also stetig erfüllt: 1. durch Hekkaidekascheme, indem deren 24 um eine Lösung herumliegen, und die oktaedrischen Basen der hier zusammenstossenden Ecken ein Eikositetraschem bilden, Charakter $(3, 3, 4, 3)$; 2. durch Eikositetrascheme, indem deren 8 um eine Lösung herumliegen, und die hexaedrischen Basen der vereinigten Ecken ein Oktaschem bilden, Charakter $(3, 4, 3, 3)$; 3. durch Oktascheme, indem deren 16 um eine Lösung herumliegen, und die tetraedrischen Basen der vereinigten Ecken ein Hekkaidekaschem bilden, Charakter $(4, 3, 3, 4)$.

§ 18. Reguläre Polyscheme der fünffachen und aller mehrfachen Totalitäten.

Was in der fünffachen Totalität der Charakter (m, n, p, q) eines regulären Polyschems bedeuten soll, ist nach dem Vorhergegangenen wohl ohne Erklärung zu verstehen. Damit nun ein solches Polyschem existieren könne, müssen in der vierfachen Totalität die regulären Polyscheme (m, n, p) und (n, p, q) schon existieren, und der Ausdruck

$$\left(\sin^2 \frac{\pi}{m} - \cos^2 \frac{\pi}{n}\right)\left(\sin^2 \frac{\pi}{q} - \cos^2 \frac{\pi}{p}\right) - \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{\pi}{p}$$

muss positiv sein. Für ganze Zahlen m, n, p, q entsprechen diesen Bedingungen nur

die drei Charaktere (3, 3, 3, 3), (3, 3, 3, 4) und (4, 3, 3, 3). (Es giebt auch nur drei Charaktere, für welche der letzte Ausdruck verschwindet, nämlich (3, 4, 3, 3), (3, 3, 4, 3) und (4, 3, 3, 3), welche, wie wir schon wissen, alle Arten anzeigen, auf welche die vierfache Totalität durch reguläre Polyscheme ausgefüllt werden kann.) Die Existenz der entsprechenden Polyscheme ist leicht zu beweisen. Das erste ist die Pyramide mit lauter gleichen Kanten; das letzte ist das orthogonale Paralleloschem mit gleichen Kanten, und das zweite das reciproke des letzten.

Ueberhaupt existieren in der $n$fachen Totalität drei reguläre Polyscheme: 1. die Pyramide vom Charakter (3, 3, 3 . . . 3, 3), 2. das orthogonale Paralleloschem vom Charakter (4, 3, 3 . . . 3, 3), 3. das diesem reciproke Polyschem (3, 3, 3 . . . 3, 4).

Es leuchtet auch sogleich ein, dass durch das Paralleloschem die Totalität erfüllt werden kann, und dass diese Erfüllung durch den Charakter (4, 3, 3 . . . 3, 3, 4) dargestellt wird.

Wenn nun für die $(n-1)$fache Totalität nur die drei angeführten regulären Polyscheme existieren, so sind für die $n$fache Totalität nur vier Charaktere denkbar: 1. wo alle Elemente gleich 3 sind, 2. wo die $n-2$ ersten 3 und das letzte 4 sind, 3. wo dieselben Elemente in umgekehrter Ordnung stehen, 4. wo das erste und letzte Element 4, alle übrigen 3 sind. Da aber der letzte Charakter die Erfüllung der $(n-1)$-fachen Totalität anzeigt, so giebt es auch für die $n$fache Totalität nur drei reguläre Polyscheme.

Da nun schon in der fünffachen Totalität nur die drei erwähnten regulären Polyscheme existieren, so existieren überhaupt in der $n$fachen Totalität nur diese drei, sobald $n > 4$ ist. Wir wollen nun diese regulären Polyscheme etwas näher betrachten.

1. Reguläre Pyramide. Die $n+1$ Grenzkontinuen sind durch ebenso viele Gleichungen dargestellt. Zur Bildung eines $i$fachen Grenzkontinuums werden $n-i$ von diesen Gleichungen erfordert; es giebt $\binom{n+1}{n-i}$ Kombinationen dieser Art; wenn also a_i die Zahl der $i$fachen Grenzkontinuen bezeichnet, so ist $a_i = \binom{n+1}{i+1}$. Sind ferner S, B, h resp. das Mass, die Basis und die Höhe der $n$fachen Pyramide, so ist nach dem Schlusse von § 8:

$$S = \frac{1}{1.2\ldots n}\sqrt{\frac{n+1}{2^n}} = \frac{1}{n}Bh, \quad B = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}};$$

folglich $h = \sqrt{\frac{n+1}{2n}} = \sin\frac{a}{2}$, wenn a den Winkel bezeichnet, unter dem die Kante vom Centrum aus erscheint, also auch $\cos a = -\frac{1}{n}$, und, wenn δ den Winkel zwischen zweien $(n-1)$fachen Grenzkontinuen bedeutet, $\cos\delta = \frac{1}{n}$. Wird die Kante als lineare Einheit angenommen, der Abstand eines Ecks vom Centrum durch R, derjenige eines

$(n-1)$fachen Grenzkontinuums durch r bezeichnet, so ist $R = \frac{\frac{1}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$, $r = h - R = \frac{1}{\sqrt{2n(n+1)}} = \frac{R}{n}$, $S = \frac{1}{n!}\sqrt{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}} \cdot R^n$. Setzt man abkürzend $\frac{1}{n} = \cos\delta$, $\frac{1}{n-1} = \cos\delta_1$, $\frac{1}{n-2} = \cos\delta_2, \ldots \frac{1}{2} = \cos\delta_{n-2}$, bezeichnet die Variabeln mit $x_1, x_2, \ldots x_n$ und die Polynome der Gleichungen der Grenzkontinuen mit $p, p_1, p_2, \ldots p_n$, so kann man setzen: $p_o = x_1$,

$$\frac{p_m}{\cos\frac{\delta}{2}} = -\cos\delta\,\frac{x_1}{\cos\frac{\delta}{2}} - \cos\delta_1\,\frac{x_2}{\cos\frac{\delta_1}{2}} - \cdots - \cos\delta_i\,\frac{x_{i+1}}{\cos\frac{\delta_i}{2}} - \cdots - \cos\delta_{m-1}\,\frac{x_m}{\cos\frac{\delta_{m-1}}{2}}$$

$$+\frac{x_{m+1}}{\cos\frac{\delta_m}{2}} \text{ für } m = 1, 2, 3, \ldots n-1;$$

$$\frac{p_n}{\cos\frac{\delta}{2}} = -\cos\delta\,\frac{x_1}{\cos\frac{\delta}{2}} - \cos\delta_1\,\frac{x_2}{\cos\frac{\delta_1}{2}} - \cdots - \cos\delta_{n-2}\,\frac{x_{n-1}}{\cos\frac{\delta_{n-2}}{2}} - x_n + 1.$$

Das durch die Gleichungen $p = o$, $p_1 = o$, $p_2 = o, \ldots$, $p_{m-1} = o$, $p_{m+1} = o, \ldots p = o$ bestimmte Eck hat dann folgende Werte der Variabeln:

$x_1 = x_2, = \cdots = x_m = o$, $x_{m+1} = \cos\frac{\delta_m}{2}$, $x_{m+2} = \cos\delta_m \cos\frac{\delta_{m+1}}{2}, \ldots . x_{i+1} = \cos\delta_{i-1}\cos\frac{\delta_i}{2}$, $\ldots . x_{n-1} = \cos\delta_{n-3}\cos\frac{\delta_{n-2}}{2}$, $x_n = \cos\delta_{n-2}$.

2. Reciprok-Paralleloschem (3, 3, ... 3, 4). Sein Umschluss kann durch Gleichungen wie

$$-x_1 - x_2 - x_3 - \cdots - x_n + \sqrt{\frac{1}{2}} = o$$

dargestellt werden, wo die Vorzeichen der Variabeln auf alle möglichen Arten zu variieren sind. Es giebt also 2^n solche Gleichungen. Die Ecken sind z. B. $x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = o$; da die Vorzeichen der nicht verschwindenden Variabeln nach Belieben zu nehmen sind, so giebt es $2n$ Ecken. Irgend ein $i$faches Grenzkontinuum geht durch $i+1$ Ecken, von denen keine zwei einander diametral entgegengesetzt sind; sieht man von den Vorzeichen ab, so giebt es $\binom{n}{i+1}$ Kombinationen; die $i+1$ Vorzeichen aber können auf 2^{i+1} Arten variiert werden; folglich ist die Zahl der $i$fachen Grenzkontinuen

$$a_i = 2^{i+1}\binom{n}{i+1}.$$

Gilt die Kante als lineare Einheit, so ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{1}{n}}$, $R = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $r = \sqrt{\frac{1}{2n}}$, $S = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{1.2\ldots n} = \frac{2^n}{1.2\ldots n} R^n$.

3. Reguläres Parallelschem $(4, 3, \ldots 3, 3)$. Sein Umschluss wird durch die $2n$ Gleichungen $x_1 = \pm \frac{1}{2}$, $x_2 = \pm \frac{1}{2}, \ldots x_n = \pm \frac{1}{2}$ dargestellt, wenn die Kante als lineare Einheit gilt. Die Zahl der $i$fachen Grenzkontinua (lauter Parallelscheme) ist $a_i = 2^{n-i}\binom{n}{i}$. Eines der 2^n Ecken ist $(x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, \ldots x_n = \frac{1}{2})$; die übrigen erhält man durch Variation der Vorzeichen.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{n}}\,,\quad \delta = \frac{\pi}{2}\,,\quad R = \frac{\sqrt{n}}{2}\,,\quad r = \frac{1}{2}\,,\quad S = 1 = \frac{2^n}{n^{\frac{n}{2}}} R^n.$$

Zweiter Teil.

Lehre von den sphärischen Kontinuen.

§ 19. *Einleitung. — Begriff der Polysphäre, Mass derselben und ihres Umschlusses.*

Dieser Abschnitt ist der Betrachtung des $n$fachen Integrals $P_n = \int^n dx dy dz \ldots$, begrenzt durch $x^2 + y^2 + \cdots < 1$ und durch n lineare und homogene, unter sich unabhängige Polynome, welche z. B. nie negativ werden dürfen, gewidmet. Obschon P_n zunächst als Funktion der nn Koeffizienten dieser Grenzpolynome erscheint, so ist doch leicht zu zeigen, dass nur $\frac{1}{2} n (n-1)$ Unabhängige vorhanden sind, die sich immer gleich bleiben, welche orthogonale Transformation auch mit den Variabeln vorgenommen werden mag; eine solche Unabhängige ist nämlich die Summe der Produkte der gleichnamigen Koeffizienten je zweier Grenzpolynome, vorausgesetzt, dass die Summe der Quadrate der Koeffizienten eines jeden Polynoms der Einheit gleich sei. Wird für $n=2$ das Integral P_2 geometrisch aufgefasst, so stellt es den Inhalt eines Kreisausschnitts dar, und die einzige Unabhängige ist der Kosinus des Mittelpunktswinkels; wir werden der Konsequenz wegen in diesem Falle eine notwendige Integration annehmen, da der Ausschnitt, oder, wenn man lieber will, der Kreisbogen eine transcendente Funktion seines Kosinus ist. In diesem Sinne können wir sagen, dass das ursprüngliche $n$fache Integral P_n nur $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$ notwendige Integrationen erfordert, je nachdem seine Dimensionszahl n gerade oder ungerade ist. Es wird sich nämlich zeigen, dass im letzten Fall das Integral P_{2n+1} als lineare Funktion von Integralen $P_{2n}, P_{2n-2}, \ldots P_4, P_2$ dargestellt werden kann. Während diese Reduktion ungerade Dimensionszahlen betrifft, bringt eine andere nicht minder merkwürdige die Zahl $\frac{1}{2} n (n-1)$ der Unabhängigen auf $n-1$ herunter. Die allgemeine Funktion P_n kann nämlich auf n Arten als ein Aggregat von $1 . 2 . 3 . 4 \ldots (n-1)$ speziellen Funktionen Q_n dargestellt werden; wenn bei einer solchen Q_n die Grenzpolynome passend geordnet sind, so ist die Summe der Produkte der Koeffizienten je zweier benachbarter im allgemeinen eine von Null verschiedene Unabhängige, die Zahl dieser Unabhängigen demnach $n-1$; alle anderen

Produktsummen dagegen sind Null. Nachdem einige diese besondere Klasse von Funktionen betreffende Sätze, finite Relationen zwischen denselben enthaltend, bewiesen und zu Wertbestimmungen benutzt worden sind, werden diese letzten noch mit Hilfe der regulären Polyscheme des vorigen Abschnitts verifiziert, und nehmen wir hievon Anlass, ganz besonders die Theorie der regulären Polyscheme der vierfachen Totalität zu vervollständigen.

Erklärung. Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ orthogonale Variabeln, so ist die durch die Bedingung

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < a^2$$

umschlossene Totalität eine n-Sphäre oder Polysphäre; a ist ihr Radius, und die Lösung mit den Nullwerten sämtlicher Variabeln ihr Centrum. Demnach würde der Kreis Disphäre, die Kugel Trisphäre heissen.

Wir sagen, eine Lösung sei innerhalb, auf oder ausserhalb einer Polysphäre, wenn ihr Abstand vom Centrum kleiner, gleich oder grösser als der Radius ist. Das $(n-1)$fache höhere Kontinuum, welches alle auf der Polysphäre befindlichen Lösungen enthält, also dieselbe umschliesst, heisst totales sphärisches Kontinuum; ein Stück desselben, welches von $(n-1)$fachen durchs Centrum gehenden linearen Kontinuen begrenzt wird, sphärisches Polyschem, und im Besondern Plagioschem, wenn die Zahl der begrenzenden Kontinuen n ist. (Dieses ist nämlich die kleinste Zahl, wo die Eigentümlichkeit der n-Sphäre sich offenbaren kann; für eine noch kleinere Zahl begrenzender Kontinuen sinkt das Polyschem, als analytische Funktion betrachtet, auf eine niedrigere Stufe herab.) Die einzelnen Stücke, aus denen die ganze Begrenzung besteht, nennen wir Perischeme, und zwar haben wir zunächst $(n-1)$sphärische Perischeme, deren jedes wiederum von einer Menge $(n-2)$sphärischer Perischeme begrenzt ist, u. s. f. Die disphärischen Perischeme endlich mögen Seiten und die monosphärischen Ecken heissen.

Jedes Element des sphärischen Kontinuums ist zu seinem Abstand vom Centrum (seinem Radius) normal, weil

$$x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + \cdots + x_n\,dx_n = o$$

ist; seine Projektionsfaktoren sind also

$$\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{a}, \ldots, \frac{x_n}{a},$$

daher kann es durch

$$\frac{a}{x_1}\,dx_2\,dx_3 \ldots dx_n, \quad \frac{a}{x_2}\,dx_1\,dx_3\,dx_4 \ldots dx_n, \ldots$$

ausgedrückt werden.

Setzt man

$$x_1 = r\cos\varphi_1, \; x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \; x_3 = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, \ldots,$$
$$x_m = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{m-1}\cos\varphi_m, \ldots\ldots, x_n = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\ldots\sin\varphi_{n-1},$$

so heissen $r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ sphärische Variabeln. Variiert man immer nur eine dieser neuen Variabeln, während alle übrigen konstant bleiben, so durchläuft die Lösung die Wegelemente

$$dr,\ r d\varphi_1,\ r \sin\varphi_1\, d\varphi_2,\ r\sin\varphi_1 \sin\varphi_2\, d\varphi_3, \ldots,\ r\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-1},$$

deren Projektionsfaktoren das orthogonale System

$$\begin{array}{llllll}
\cos\varphi_1, & \sin\varphi_1\cos\varphi_2, & \sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, \ldots, & \sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, & \sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}. \\
-\sin\varphi_1, & \cos\varphi_1\cos\varphi_2, & \cos\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, \ldots, & \cos\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, & \cos\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}. \\
0, & -\sin\varphi_2, & \cos\varphi_2\cos\varphi_3, \ldots, & \cos\varphi_2\sin\varphi_3\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, & \cos\varphi_2\sin\varphi_3\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}. \\
0, & 0, & -\sin\varphi_3, \ldots, & \cos\varphi_3\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, & \cos\varphi_3\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}. \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0, & 0, \ldots, & -\sin\varphi_{n-1}, & \cos\varphi_{n-1}
\end{array}$$

bilden. Das Element $dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ der Totalität verwandelt sich demnach in

$$r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1 \sin^{n-3}\varphi_2 \ldots \sin^2\varphi_{n-3}\sin\varphi_{n-2}\, dr\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_{n-1},$$

und, wenn man hier den Faktor dr weglässt, so hat man einen Ausdruck für das Element des sphärischen Kontinuums vom Radius r anstatt des früheren $\frac{r}{x_1} dx_2\, dx_3 \ldots dx_n$.

Ist nun

$$K = \underset{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < a^2)}{\int^n dx_1\, dx_2 \ldots dx_n}, \qquad S = \underset{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 = a^2)}{\int^{n-1} \frac{a}{x_1} dx_2\, dx_3 \ldots dx_n},$$

d. h. sind K, S die Masse der Polysphäre und des totalen sphärischen Kontinuums, so hat man auch

$$S = a^{n-1}\int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_1\, d\varphi_1 \int_0^\pi \sin^{n-3}\varphi_2\, d\varphi_2 \ldots \int_0^\pi \sin\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-2}\int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1},$$

$$K = \frac{S}{a^{n-1}}\int_0^a r^{n-1}\, dr,$$

oder, weil

$$\int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi\, d\varphi = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

ist,

$$S = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} a^{n-1}, \quad K = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} a^n.$$

Für $a = 1$ und $n = 4, 5, 6$ ist S resp. $2\pi^2, \frac{8}{3}\pi^2, \pi^3$.

§ 20. *Gegenseitige Abhängigkeit der Stücke eines sphärischen Plagioschems.*

Es sei $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ die Gleichung des sphärischen Kontinuums,

$$S = \int^{n-1} \frac{dx_2\, dx_3 \ldots dx_n}{x_1}$$

das Mass eines Teils, welcher alle den Bedingungen $p_1 > o, p_2 > o, \ldots, p_n > o$ genügenden Lösungen enthält, wenn $p_1, p_2, \ldots, p_n$ unter sich unabhängige lineare und homogene Polynome bezeichnen. Es steht frei, anzunehmen, dass in jedem Polynom die Summe der Quadrate der Koeffizienten gleich 1 sei. Dann sei z. B. — cos (12) die Summe der Produkte der gleichnamigen Koeffizienten in den Polynomen p_1, p_2, und (12) heisse der Winkel dieser zwei Polynome. Es giebt im ganzen $\frac{1}{2} n(n-1)$ solche Winkel (12), (13), ... ($(n-1)\, n$); ich nenne sie die Argumente des Plagioschems S; sein Mass ist eine Funktion von nur diesen $\frac{1}{2} n(n-1)$ unter sich unabhängigen Argumenten. Denn die Zahl aller unter sich unabhängigen Elemente der n Polynome p ist $n(n-1)$, und, wenn man hievon die Zahl $\frac{1}{2} n(n-1)$ der unabhängigen Elemente einer orthogonalen Transformation abzieht, so bleiben nur $\frac{1}{2} n(n-1)$ wesentliche Elemente des Plagioschems übrig; als solche können wir daher jene der Zahl nach übereinstimmenden Argumente annehmen.

Das $(n-m)$fache lineare Kontinuum, das durch $p_1 = o, p_2 = o, \ldots p_{m-1} = o, p_m = o$ bestimmt ist, werde durch $(\overline{1\,2\,3 \ldots m})$ bezeichnet. Man kann die Variabeln immer so orthogonal transformieren, dass für dieses Kontinuum m der neuen Variabeln verschwinden. Man unterdrücke dann diese Variabeln in den Polynomen $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots p_n$, dividiere jedes durch die positive Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der in ihm übrig gebliebenen Koeffizienten und bezeichne sie dann mit

$$p\,(\overline{1\,2\,3 \ldots m}, m+1),\; p\,(\overline{1\,2\,3 \ldots m}, m+2), \ldots,\; p\,(\overline{1\,2\,3 \ldots m}, n)$$

als Grenzpolynome des $(n-m)$sphärischen Perischems $S\,(\overline{1\,2\,3 \ldots m})$; die Winkel dieser neuen Polynome oder die Argumente des von ihnen begrenzten Perischems mögen z. B. durch $(\overline{1\,2\,3 \ldots m}, (m+1)\,(m+2))$ dargestellt werden. Ihre Zahl ist $\binom{n-m}{2}$, und da $\binom{n}{m}$ die Zahl aller $(n-m)$sphärischen Perischeme von S ist, so kommen an diesem im im ganzen $\binom{n}{m}\binom{n-m}{2} = \binom{n}{2}\binom{n-2}{m}$ Stücke der erwähnten Ordnung vor ($(n-m)$sphärische Stücke). Gegen das Ende treten Kugeldreiecke, wie $(\overline{4\,5 \ldots n})$, auf; die Argumente eines solchen (trisphärische Stücke) sind seine Winkel $(\overline{4\,5 \ldots n}, 2\,3)$, $(\overline{4\,5 \ldots n}, 1\,3)$, $(\overline{4\,5 \ldots n}, 1\,2)$. Endlich kommen Kreisbogen (disphärische

Stücke oder Seiten), wie $(\overline{345\ldots n})$, von denen jeder selbst sein einziges Argument ist; d. h. es ist $S\,(\overline{345\ldots n}) = (\overline{345\ldots n}, 12)$; hingegen $S\,(\overline{45\ldots n}) = (\overline{45\ldots n}, 23) + (\overline{45\ldots n}, 13) + (\overline{45\ldots n}, 12) - \pi$. Da die Zahl der Seiten $\frac{1}{2}\,n\,(n-1)$ ist, so kann man das Plagioschem S auch als Funktion seiner Seiten auffassen. Die Zahl aller seiner Stücke mit Einschluss der Argumente und Seiten ist

$$\sum_{m=0}^{m=n-2} \binom{n}{2}\binom{n-2}{m} = \binom{n}{2}\cdot 2^{n-2}.$$

Ihre Abhängigkeit von den Argumenten ist folgende. Da man die Variabeln immer so orthogonal transformieren kann, dass in den drei Polynomen p_1, p_2, p_3 nur drei Variabeln erscheinen, so kann man die Argumente (23), (13), (12) als Winkel eines Kugeldreiecks auffassen, welches die $(n-1)$sphärischen Stücke $(\overline{1}, 23)$, $(\overline{2}, 13)$, $(\overline{3}, 12)$ zu Seiten hat; diese sind somit durch die bekannten trigonometrischen Relationen in Funktion jener gesetzt. Man kennt also alle $(n-1)$sphärischen Stücke in Funktion der Argumente. Wiederum sind z. B. $(\overline{1}, 34)$, $(\overline{1}, 24)$, $(\overline{1}, 23)$ als Winkel, und $(\overline{12}, 34)$, $(\overline{13}, 24)$, $(\overline{14}, 23)$ als entsprechende Seiten eines Kugeldreiecks anzusehen und dadurch mittelbar alle $(n-2)$sphärischen Stücke in Funktion der Argumente gesetzt. Dies geht so fort, bis endlich die Seiten in Funktion der Argumente gefunden sind. Es ist klar, dass die Supplemente der Argumente dieselben Funktionen der Supplemente der Seiten sein werden, wie die Seiten von den Argumenten sind.

Um diesen Vorstellungen ein analytisches Gewand zu leihen, suchen wir zuerst ein Grenzpolynom eines Perischems so auszudrücken, dass wir keiner Transformation der Variabeln bedürfen. Denkt man sich im Ausdruck eines solchen die anfänglichen Variabeln restituiert, und ist die Ziffer i von $1, 2, \ldots m$ verschieden, so muss man setzen

$$\varrho \,.\, p\,(\overline{12\ldots m},\ i) = p_i + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_m p_m; \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

die Faktoren λ sind dann durch die Bedingung bestimmt, dass das neue Polynom zu jedem der m Polynome $p_1, p_2, \ldots p_m$ orthogonal sein muss, also zusammen mit ϱ durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
1 - \varrho^2 - \lambda_1 \cos\,(i\,1) - \lambda_2 \cos\,(i\,2) - \ldots - \lambda_m \cos\,(i\,m) = 0,\\
-\cos\,(1\,i) + \lambda_1 - \lambda_2 \cos\,(1\,2) - \ldots - \lambda_m \cos\,(1\,m) = 0,\\
-\cos\,(2\,i) - \lambda_1 \cos\,(2\,1) + \lambda_2 - \ldots - \lambda_m \cos\,(2\,m) = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-\cos\,(m\,i) - \lambda_1 \cos\,(m\,1) - \lambda_2 \cos\,(m\,2) - \ldots\ldots + \lambda_m = 0.
\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

Gehen i, ϱ, λ in k, σ, μ über, so ist offenbar die Produktsumme der Koeffizienten der Polynome $p_i + \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_m p_m$ und $p_k + \mu_1 p_1 + \cdots + \mu_m p_m$ gleich, wie wenn das zweite Polynom bloss durch p_k ersetzt wird, da die Polynome $p_1, p_2, \ldots p_m$ zum ersten orthogonal sein sollen. Man hat demnach

$$\varrho\sigma \cos\,(\overline{12\ldots m},\ i\,k) = \cos\,(i\,k) + \lambda \cos\,(1\,k) + \lambda_2 \cos\,(2\,k) + \ldots + \lambda_m \cos\,(m\,k).$$

Bringt man in dieser Gleichung alle Glieder auf die linke Seite und setzt sie dann im Systeme (2) an die Stelle der ersten Gleichung, so wird man durch Elimination der Grössen λ den Wert von $\varrho\,\sigma \cos(\overline{1\,2\ldots m}, i\,k)$ bekommen, während der von ϱ^2 sich unmittelbar aus (2) ergiebt, und der von σ^2 aus diesem durch Vertauschung von i und k. Setzt man abkürzend

$$\varDelta\left({}^{i}_{k}\,1\,2\,3\ldots m\right) = \begin{vmatrix} -\cos(i\,k) & -\cos(i\,1) & -\cos(i\,2) & -\cos(i\,3) & \cdots & -\cos(i\,m) \\ -\cos(1\,k) & 1 & -\cos(1\,2) & -\cos(1\,3) & \cdots & -\cos(1\,m) \\ -\cos(2\,k) & -\cos(2\,1) & 1 & -\cos(2\,3) & \ldots & -\cos(2\,m) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\cos(m\,k) & -\cos(m\,1) & -\cos(m\,2) & -\cos(m\,3) & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

und hiefür einfach $\varDelta\,(i\,1\,2\,3\ldots m)$, wenn $k = i$ und daher $\cos(i\,k) = -1$ ist, so hat man

$$\varDelta(1\,2\,3\ldots m)\,.\,\varrho\,\sigma \cos(\overline{1\,2\ldots m},\ i\,k) + \varDelta\left({}^{i}_{k}\,1\,2\,3\ldots m\right) = 0,$$

$$\varDelta\,(i\,1\,2\,3\ldots m) - \varrho^2\,\varDelta\,(1\,2\,3\ldots m) = 0, \quad \varDelta(k\,1\,2\,3\ldots m) - \sigma^2\,\varDelta(1\,2\,3\ldots m) = 0,$$

und hieraus

$$\cos(\overline{1\,2\ldots m}, i\,k) = -\frac{\varDelta\left({}^{i}_{k}\,1\,2\,3\ldots m\right)}{\sqrt{\varDelta\,(i\,1\,2\,3\ldots m)}\ \sqrt{\varDelta\,(k\,1\,2\,3\ldots m)}}, \quad \ldots \quad (3)$$

wo die Quadratwurzeln positiv zu verstehen sind, weil in der Gleichung (1) für $p_1 = o$, $p_2 = o, \ldots p_m = o$ die Polynome p_i und $p\;(\overline{1\,2\ldots m},\ i)$, grösser als Null gesetzt, dieselbe Grenzbedingung ausdrücken sollen, wodurch ϱ (und ebenso σ) notwendig positiv werden. Die drei in diesem Ausdruck vorkommenden Determinanten sind reciproke Elemente der symmetrischen Determinante $\varDelta\,(i\,k\,1\,2\,3\ldots m)$; und wenn wir diese auf leicht verständliche Weise durch die Ziffern der fehlenden Horizontal- und Vertikalzeile bezeichnen, so bekommen wir

$$\begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix} \cos^2(\overline{1\,2\ldots m}, i\,k) = \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix} \sin^2(\overline{1\,2\ldots m}, i\,k) = \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix} \end{vmatrix} = \varDelta\,(i\,k\,1\,1\ldots m) \cdot \begin{bmatrix} i\,k \\ i\,k \end{bmatrix},$$

oder

$$\sin^2(\overline{1\,2\ldots m}, i\,k) = \frac{\varDelta(i\,k\,1\,2\,3\ldots m)\ \varDelta(\ \ 1\,2\,3\ldots m)}{\varDelta(i\ \ 1\,2\,3\ldots m)\ \varDelta(k\,1\,2\,3\ldots m)}. \quad \ldots \quad (4)$$

Man kann diese Formel auch durch Betrachtung eines Paralleloschems beweisen, dessen Kanten zu den linearen Kontinuen $(\overline{1}), (\overline{2}), \ldots (\overline{m}), (\overline{i}), (\overline{k})$ normal sind. Der hierzu erforderliche Satz würde heissen:

Das Mass eines $n$fachen Paralleloschems ist gleich dem Produkt zweier begrenzender $(n-1)$facher Paralleloscheme, welche in einem $(n-2)$fachen Paralleloschem sich

schneiden, dividiert durch dieses letzte, und multipliziert mit dem Sinus des von den beiden ersten gebildeten Winkels.

Um ihn zu beweisen, bezeichnen wir die erwähnten vier Parallelscheme mit P, A, B, C, den Winkel zwischen A und B mit Θ, betrachten A als Basis von P, und C als Basis von B, und setzen h, k als entsprechende Höhen. Denkt man sich nun das Parallelschem P von einem auf C normalen zweifachen linearen Kontinuum geschnitten, so liegt in diesem ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse k, der Winkel, dessen Scheitel in C fällt, Θ, und die gegenüberliegende Kathete h ist. Es ist also $h = k \sin \Theta$. Aber $P = Ah$, $B = Ck$. Also $CP = AB \sin \Theta$.

Die independenten Formeln (3) und (4) verwandeln sich in bekannte Relationen der sphärischen Trigonometrie, wenn $m = 1$ angenommen wird. Die erste z. B. giebt

$$\cos(\overline{1},\ ik) = \frac{\cos(ik) + \cos(1i)\cos(1k)}{\sin(1i)\sin(1k)}.$$

Das orthogonale System der Variabeln kann immer so gewählt werden, dass die Grenzpolynome in folgender Gestalt erscheinen:

$$p_1 = x_1,$$
$$p_2 = -x_1 \cos(12) + x_2 \sin(12),$$
$$p_3 = -x_1 \cos(13) - x_2 \sin(13) \cos(\overline{1},23) + x_3 \sin(13) \sin(\overline{1},23),$$

. . . .

$$p_m = -x_1 \cos(1m) - x_2 \sin(1m)\cos(\overline{1},2m) - x_3 \sin(1m)\sin(\overline{1},2m)\cos(\overline{12},3m) - \cdots$$
$$\cdots - x_{m-1} \sin(1m)\sin(\overline{1},2m)\sin(\overline{12},3m)\ldots\sin(\overline{123\ldots(m-3)},(m-2)m)\cos(\overline{12\ldots(m-2)},(m-1)m)$$
$$+ x_m \sin(1m)\sin(\overline{1},2m)\ldots\sin(\overline{12\ldots(m-3)},(m-2)m)\sin(\overline{12\ldots(m-2)},(m-1)m),$$

. . . .

Bei dieser Darstellung ist die Lösung $(x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = o,\ x_n = 1)$ das mit $(\overline{123\ldots(n-1)})$ zu bezeichnende Eck des Plagioschems S; nennen wir dieses Spitze A, so entspricht ihr das Perischem $(\overline{n})$ als Basis. Von A aus gehe ein Strahl normal zum linearen Kontinuum der Basis $(p_n = o)$ und treffe dieses in der Lösung B; die Länge des Strahls oder der Abstand AB der Spitze vom linearen Kontinuum $p_n = o$ sei $\sin h$. Vom Centrum O aus gehe ein Radius durch B und treffe die sphärische Basis selbst in C; diese Lösung heisse Fusspunkt; der Kreisbogen, welcher A und C verbindet, ist h und soll Höhe heissen. Endlich sei P irgend eine auf der sphärischen Basis befindliche Lösung, φ ihr sphärischer Abstand von der Spitze A oder der Winkel der Radien OA und OP. Da wir jetzt nur drei Strahlen OA, OC, OP vor Augen haben, so können wir uns durch dieselben ein lineares dreifaches Continuum (Raum) gelegt denken, und die Lösungen A, C, P werden als Ecken eines rechtwinkligen Kugeldreiecks erscheinen, worin $AP = \varphi$ die Hypotenuse ist. Ist der Winkel $APC = \Theta$, so ist $\sin h = \sin \varphi \sin \Theta$. Um P herum liege ein unendlich kleines Element σ der sphärischen

Basis; alle darin enthaltenen Lösungen werden mit der Spitze A durch Kreisbogen verbunden; dadurch entsteht ein partielles sphärisches Kontinuum, welches die einzige endliche Ausdehnung von A bis P hat, während die übrigen unendlich klein sind. Wird nun dieses in P normal durchschnitten, so ist der Querschnitt ein $(n-2)$faches unendlich kleines Kontinuum, dessen Mass $\sigma \sin \Theta$ beträgt.

Da $AB = \sin h$ der der Spitze entsprechende Wert des Polynoms p_n, so ist nach (5)

$$\sin h = \sin(1n) \sin(\overline{1,2n}) \sin(\overline{12,3n}) \ldots \sin(\overline{12 \ldots (n-3),(n-2)n}) \sin(\overline{12 \ldots (n-2,(n-1)n}). \quad (6)$$

wo die Ziffern $1, 2, 3, \ldots n-1$ permutiert werden dürfen; die Werte des Fusspunkts C sind:

$$x_1 = \operatorname{tang} h \cos(1n), \; x_2 = \operatorname{tang} h \sin(1n) \cos(\overline{1, 2n}), \ldots, x_n = \cos h.$$

§ 21. *Hilfssatz.*

Wird jedes Element des n-sphärischen Plagioschems S mit dem Kosinus seines sphärischen Abstandes von der Spitze multipliziert, so ist die Summe dieser Produkte der $(n-1)$te Teil des Produkts des Masses der Basis und des Sinus der Höhe.

Beweis. Es seien

$$x_1 = \sin \varphi \,.\, x_1', \; x_2 = \sin \varphi \,.\, x_2', \ldots, x_{n-1} = \sin \varphi \,.\, x_{n-1}', \; x_n = \cos \varphi,$$

so wird das Element des sphärischen Kontinuums

$$\sin^{n-2} \varphi \, d\varphi \,.\, \omega,$$

wo ω das äquatoriale Element bezeichnet, welches man auch durch

$$\frac{dx_2' \, dx_3' \ldots dx_{n-1}'}{x_1'} \text{ für } x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + \cdots + x_{n-1}'^2 = 1$$

ausdrücken kann. Wenn wir nun das Integral

$$\int^{n-1} \cos \varphi \,.\, \sin^{n-2} \varphi \, d\varphi \,.\, \omega$$

bestimmen wollen, so setzen wir zuerst $x_1', x_2', \ldots x_{n-1}'$ als konstant voraus und integrieren von $\varphi = o$ bis zu dem durch die Basis $p_n = o$ bestimmten Werte von φ, für den wir diesen Buchstaben behalten wollen. Wir bekommen

$$\frac{1}{n-1} \int^{n-2} \sin^{n-1} \varphi \,.\, \omega,$$

oder, da, wie wir oben gesehen haben, für eine auf der Basis befindliche Lösung P der normale Querschnitt

$$\sin^{n-2} \varphi \,.\, \omega = \sin \Theta \,.\, \sigma = \sin h \cdot \frac{\sigma}{\sin \varphi}$$

ist, zuletzt

$$\int^{n-1} \cos \varphi \,.\, \sin^{n-2} \varphi \, d\varphi \,.\, \omega = \frac{\sin h}{n-1} \int^{n-2} \sigma,$$

d. h. gleich dem $(n-1)$ten Teile des Sinus der Höhe, multipliziert mit der Basis.

§ 22. *Mass eines sphärischen Plagioschems.*

Satz. Die in Beziehung auf die Argumente genommenen Differentialkoeffizienten des Masses eines n-sphärischen Plagioschems sind gleich den Massen der mit den Argumenten gleichnamigen $(n-2)$-sphärischen Perischeme, dividiert durch $n-2$:

$$dS = \frac{1}{n-2}\left\{ S\left(\overline{1\,2}\right) d\,(12) + S\left(\overline{1\,3}\right) d\,(13) + \cdots + S\left(\overline{n-1\;n}\right) d\left((n-1)\,n\right) \right\}.$$

Beweis. Um das einzige Argument (12) zu variieren, variieren wir nur das Polynom p_1, die Darstellung (5) in § 20 voraussetzend. Dasselbe verwandle sich in

$$(1+k_1)\,x_1 + k_2\,x_2 + k_3\,x_3 + \cdots + k_n\,x_n,$$

wo $k_1, k_2, \ldots k_n$ unendlich kleine Grössen bezeichnen. Da die Summe der Quadrate der Koeffizienten gleich 1 bleiben und die Argumente (1 3), (1 4), . . . (1 n) konstant sein sollen, so hat man $n-1$ Bedingungsgleichungen, welche gerade hinreichen, um die $n-1$ Verhältnisse $k_1 : k_2 : \ldots : k_n$ zu bestimmen. Die erste Gleichung

$$(1+k_1)^2 + k_2^2 + k_3^2 + \cdots + k_n^2 = 1$$

reduziert sich, da es nur auf unendlich kleine Grössen erster Ordnung ankommt, auf $2\,k_1 = o$. Dann sind aber sämtliche Bedingungsgleichungen gerade so beschaffen, wie wenn die Werte der Variabeln für das Eck $\left(\overline{1\,3\,4\,5\ldots n}\right)$ zu bestimmen sind. Versetzen wir uns aber in das $(n-1)$-sphärische Kontinuum $\left(\overline{1}\right)$ hinein, indem wir die durch x_1 bezeichnete Dimension aufheben, und fassen $\left(\overline{1\,2}\right)$ als Basis des Perischems $S\left(\overline{1}\right)$, folglich jenes Eck als dessen Spitze auf, so tritt der für diese geltende Wert von x_2 als Sinus der Höhe, $\sin h$, auf. Da man ferner für den Winkel zwischen dem variierten Polynome $p_1 = x_1 + k_2\,x_2 + k_3\,x_3 + \cdots + k_n\,x_n$ und dem unveränderten Polynom

$$p_2 = -\,x_1 \cos\,(1\,2) + x_2 \sin\,(1\,2) \text{ die Gleichung}$$

$$-\cos\left((1\,2) + d\,(1\,2)\right) = -\cos\,(1\,2) + k_2 \sin\,(1\,2)$$

hat, so muss $k_2 = d\,(1\,2)$ sein. Folglich verhalten sich $k_2, k_3, \ldots k_n$ zu den gleichnamigen der Spitze $\left(\overline{1\,3\,4\,5\,\ldots\,n}\right)$ zukommenden Werten der Variabeln, wie $d\,(1\,2) : \sin h$. Ist nun φ der sphärische Abstand der Spitze von irgend einer im Perischem $S\left(\overline{1}\right)$ enthaltenen Lösung $(0, x_2\,x_3, \ldots x_n)$, so ist demnach

$$k_2\,x_2 + k_3\,x_3 + \cdots + k_n\,x_n = \frac{\cos\varphi}{\sin h}\,d\,(1\,2),$$

und das partielle n-sphärische Kontinuum $d\,S$ bekommt ausser den Grenzen von $S\left(\overline{1}\right)$ noch die unendlich nahen Grenzen: ursprüngliches $p_1 < o$, und variiertes $p_1 > o$, oder

$$x_1 + \frac{\cos\varphi}{\sin h}\,d\,(1\,2) > o > x_1,$$

oder
$$o < -x_1 > \frac{\cos\varphi}{\sin h} d(1\,2).$$

Weil somit x_1 unendlich klein ist, so sind im Ausdruck für dS die auf $x_2, x_3, \ldots x_n$ bezüglichen Integrationsgrenzen so zu nehmen, wie wenn $x_1 = o$ wäre, also dieselben wie für das Perischem $S(\overline{1})$. Integriert man nun die Formel für dS in Beziehung auf x_1, so ergiebt sich dS gleich der Summe sämtlicher Elemente von $S(\overline{1})$, jedes multipliziert mit $\frac{\cos\varphi}{\sin h} d(1\,2)$; und da φ der sphärische Abstand dieses Elements von der Spitze $(\overline{1\,3\,4\,5\ldots n})$, so ist nach dem vorigen Hilfssatz:

$$dS = \frac{d(1\,2)}{\sin h} \times \frac{1}{n-2} \text{Basis } S(\overline{1\,2}) \,.\, \sin h = \frac{1}{n-2} S(\overline{1\,2}) \,.\, d(1\,2)\,.$$

Bemerkung. Diese Form des Satzes hat das Unbequeme, dass man ihn nicht bis auf $n = 2$ hinunter verfolgen kann. Dies wird jedoch durch eine leichte Umgestaltung möglich gemacht.

Es sei
$$P = \int^{n} dx_1\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_n \quad \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < 1 \\ p_1 > o,\, p_2 > o, \ldots p_n > o \end{pmatrix}$$

ein von n durchs Centrum gehenden linearen Kontinuen begrenztes Stück der n-Sphäre, das wir allenfalls n-sphärische Pyramide nennen können, so ist offenbar

$$P = S\int_o^1 r^{n-1} dr, \text{ oder } P = \frac{1}{n} S.$$

Bezeichnet dann z. B. $P(\overline{1\,2})$ die im $(n-2)$fachen linearen Kontinuum $(p_1 = o,\ p_2 = o)$ befindliche $(n-2)$-sphärische Pyramide, so ist ebenso

$$P(\overline{1\,2}) = \frac{1}{n-2} S(\overline{1\,2}).$$

Wenn man also im gegenwärtigen Satze sphärische Pyramiden statt der sphärischen Plagioscheme einführt, so erhält man

$$dP = \frac{1}{n}\left\{P(\overline{1\,2})\, d(1\,2) + P(\overline{1\,3})\, d(1\,3) + \cdots + P(\overline{(n-1)\,n})\, d((n-1)\,n)\right\}.$$

Setzen wir jetzt $n = 2$, so wird die dissphärische Pyramide zum Kreisausschnitt, und in der Formel $dP = \frac{1}{2} P(\overline{1\,2})\, d(1\,2)$ bezeichnet $(1\,2)$ den Mittelpunktwinkel und $P(\overline{1\,2})$ das Mass des nullfachen Kontinuums, welches die begrenzenden Radien $(p_1 = o,$ $p_2 = o)$ innerhalb des Kreises gemein haben, d. h. das Mass des Centrums. Nun sind

leicht Gründe aufzufinden, die uns berechtigen, 1 als Mass einer nullfachen Totalität anzunehmen. Wir bekommen also $dP = \frac{1}{2}\, d\,(1\,2)$, und durch Integration $P = \frac{1}{2}(1\,2)$, als Inhalt eines Kreisausschnitts vom Radius 1.

Setzen wir $n = 3$, so wird die trisphärische Pyramide zur Kugelpyramide; in der Formel

$$d\,P = \frac{1}{3}\left\{P(\overline{1\,2})\,d\,(1\,2) + P\,(\overline{1\,3})\,d\,(1\,3) + P\,(\overline{2\,3})\,d\,(2\,3)\right\}$$

sind (1 2), (1 3), (2 3) die Flächenwinkel der Pyramide oder die Winkel des Kugeldreiecks S; $P\,(\overline{1\,2})$ ist das Mass des einfachen Kontinuums ($p_1 = o$, $p_2 = o$), welches durch die Bedingungen $p_3 > o$ und $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$ begrenzt wird, d. h. das Mass des vom Centrum nach dem Eck $(\overline{1\,2})$ gehenden Radius, also gleich 1. Bezeichnen wir die drei Argumente mit α, β, γ, so ist demnach $d\,P = \frac{1}{3}\,(d\alpha + d\beta + d\gamma)$. Um die Integrationskonstante bestimmen zu können, lassen wir P verschwinden, was dadurch geschieht, dass wir $p_1 = p_2 = -p_3$ annehmen; dann wird aber $(1\,2) = \pi$, $(1\,3) = (2\,3) = o$. Wir haben also

$$P = \frac{1}{3}\,(\alpha + \beta + \gamma - \pi), \quad \text{oder:} \quad S = \alpha + \beta + \gamma - \pi,$$

wenn S das Mass des Kugeldreiecks bezeichnet.

Von jetzt an halten wir uns wieder an die erste Form des Satzes. Für $n = 4$ oder für das tetrasphärische Plagioschem S ist das disphärische Perischem $S\,(\overline{1\,2})$ ein Kreisbogen, dessen Mass mit seinem Argument $(\overline{1\,2}, 3\,4)$ ein und dasselbe ist. Also ist

$$d\,S = \frac{1}{2}\left\{(\overline{1\,2}, 3\,4)\,d\,(1\,2) + (\overline{1\,3}, 2\,4)\,d\,(1\,3) + (\overline{1\,4}, 2\,3)\,d\,(1\,4) + (\overline{2\,3}, 1\,4)\,d\,(2\,3)\right.$$
$$\left. + (\overline{2\,4}, 1\,3)\,d\,(2\,4) + (\overline{3\,4}, 1\,2)\,d\,(3\,4)\right\},$$

oder: das Mass des tetrasphärischen Plagioschems hat seine halben Seiten zu Differentialkoeffizienten. Sind diese Seiten unendlich klein, so verwandelt sich S in eine dreiseitige Pyramide des Raums; man kann nun wirklich nachweisen, dass das Integral des vorliegenden Ausdrucks sich alsdann auf die bekannte Formel für den Inhalt einer räumlichen Pyramide reduziert.

Für das pentasphärische Plagioschem S wird das trisphärische Perischem $S\,(\overline{1\,2})$ zum Kugeldreieck, dessen Mass gleich der Summe seiner Winkel weniger π ist. Die Funktion S hat 10 Argumente, und von den bezüglichen Differentialkoeffizienten ist z. B.

$$\frac{\partial S}{\partial (1\,2)} = \frac{1}{3}\left\{(\overline{1\,2}, 3\,4) + (\overline{1\,2}, 3\,5) + (\overline{1\,2}, 4\,5) - \pi\right\},$$

und, wenn man die 30 Glieder wie $(\overline{12}, 34)\, d\,(1\,2)$ nach den Kombinationen $(1\,2\,3\,4)$ vierter Klasse ordnet:

$$3\,d\,S = \Big\{(\overline{12}, 34)\, d\,(1\,2) + (\overline{13}, 24)\, d\,(1\,3) + (\overline{14}, 23)\, d\,(1\,4)$$

$$+ (\overline{23}, 14)\, d\,(2\,3) + (\overline{24}, 13)\, d\,(2\,4) + (\overline{34}, 12)\, d\,(3\,4)\Big\} + \text{etc.}$$

$$\pi\, d\,\Big\{(1\,2) + (1\,3) + \cdots + (4\,5)\Big\}$$

$$= 2\,d\Big\{S\,(1\,2\,3\,4) + S\,(1\,2\,3\,5) + S\,(1\,2\,4\,5) + S\,(1\,3\,4\,5) + S\,(2\,3\,4\,5)\Big\}$$

$$- \pi\, d\Big\{(1\,2) + (1\,3) + \cdots (4\,5)\Big\},$$

wo $S\,(1\,2\,3\,4)$ z. B. ein tetrasphärisches Plagioschem bezeichnet, dessen Argumente $(1\,2)$, (13), (14), (23), (24), (34) sind. Um die Integrationskonstante zu bestimmen, nehmen wir an, alle Argumente des pentasphärischen Plagioschems seien rechte. Dann wird

$$S\,(1\,2\,3\,4\,5) = \frac{1}{2^5}\,\frac{8\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{12}, \quad S\,(1\,2\,3\,4) = \frac{2\,\pi^2}{2^4} = \frac{\pi^2}{8},$$

und wir bekommen

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{5\pi^2}{4} - \pi\,.\,1\,0\,.\,\frac{\pi}{2} + \text{Const., also Const.} = 4\,\pi^2,$$

und endlich

$$S\,(1\,2\,3\,4\,5) = \frac{2}{3}\,\Big\{S(2\,3\,4\,5) + S(1\,3\,4\,5) + S(1\,2\,4\,5) + S\,(1\,2\,3\,5) + S\,(1\,2\,3\,4)\Big\}$$

$$-\frac{\pi}{3}\Big\{(1\,2) + (1\,3) + (1\,4) + (1\,5) + (2\,3) + (2\,4) + (2\,5) + (3\,4) + (3\,5) + (4\,5)\Big\} + \frac{4\pi^2}{3}.$$

Wir sehen hieraus, dass, wie das Mass des Kugeldreiecks auf Kreisbogen zurückkommt, so dasjenige des pentasphärischen Plagioschems auf tetrasphärische Plagioscheme und Kreisbogen. Wollten wir diese Wahrnehmung weiter verfolgen, so würden Gammafunktionen und Potenzen von π den an sich einfachen Satz „über die Reduktion perissosphärischer Plagioscheme auf artiosphärische“ *) ohne Not verwickeln. Wir ziehen es daher vor, zuerst statt der allgemeinen Masseinheit eine besondere für sphärische Plagioscheme passende Einheit einzuführen, von ähnlicher Bedeutung wie die des Quadranten für Kreisbogen.

§ 23. *Plagioschematische Funktionen; reduzierbare Fälle von Orthogonalität*

Wir setzen fortan

$$\int^{(n)}_{\left(\substack{x^2 + y^2 + \cdots < 1 \\ p_1 > o,\ \ldots\ p_n > o}\right)} dx\,dy\,dz\ldots = f(1\,2\,3\ldots n) \times \int^{(n)}_{\left(\substack{x^2 + y^2 + \cdots < 1 \\ x > o,\ y > o,\ \ldots}\right)} dx\,dy\,dz\ldots \quad .$$

*) [Die Ausdrücke „perissosphärisch“ und „artiosphärisch“ werden S. 70 erklärt.]

oder, was dasselbe ist

$$P(1\,2\,3\ldots n) = \frac{1}{2^n}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} f(1\,2\,3\ldots n),\quad S(1\,2\,3\ldots n) = \frac{1}{2^{n-1}}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} f(1\,2\,3\ldots n),$$

und nennen $f(1\,2\,3\ldots n)$ eine n-sphärische plagioschematische Funktion, $p_1, p_2, \ldots p_n$ ihre Grenzpolynome, und die von diesen gebildeten Winkel (12), ... ihre Argumente. Jede solche Funktion bekommt die Einheit als Wert, wenn alle Argumente $\frac{\pi}{2}$ sind. Es ist dann z. B.

$$f(1\,2) = \frac{2}{\pi}(1\,2),\quad f(1\,2\,3) = f(1\,2) + f(1\,3) + f(2\,3) - 2,$$

$$f(1\,2\,3\,4\,5) = f(2\,3\,4\,5) + \cdots \text{etc.} - 2\left\{f(1\,2) + \text{etc.}\right\} + 16.$$

Da $\frac{2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}}} : \frac{2^{n-3}\Gamma(\frac{n-2}{2})}{\pi^{\frac{n-2}{2}}} = (n-2)\cdot\frac{2}{\pi}$ ist, so wird die allgemeine Differentialgleichung des vorigen §:

$$d f(1\,2\,3\ldots n) = f(1\,2\,,3\,4\ldots n)\, d f(1\,2) + f(1\,3\,,2\,4\,5\ldots n)\, d f(1\,3) + \text{etc.}$$

Nehmen wir jetzt an, jedes der m ersten Polynome $p_1, p_2, \ldots p_m$ sei zu jedem der übrigen $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots p_n$ orthogonal. Man wird überhaupt die Variabeln so wählen können, dass in jenen nur die m Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_m$ erscheinen. Kämen nun diese auch in einem der folgenden Polynome vor, so würde aus den entsprechenden m Orthogonalitätsbedingungen das Verschwinden der Determinante der Koeffizienten jener m ersten Polynome folgen, was wir nicht zugeben dürfen, da diese unter sich unabhängig sein sollen. Also können die $n-m$ letzten Polynome nur die übrigen Variabeln $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n$ enthalten. Es sei nun

$$\cos^2\Theta = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2,\ x_{m+1} = \sin\Theta\,.\,y_1,\ x_{m+2} = \sin\Theta\,.\,y_2, \ldots, x_n = \sin\Theta\,.\,y_{n-m},$$

und man denke sich die m ersten Variabeln, also auch Θ, zuerst als konstant, und die Integration nur in Beziehung auf die $n-m$ letzten Variabeln vollzogen, so werden die auf diese bezüglichen linearen Integrationsgrenzen durch die Einführung der Variabeln y nicht geändert, und es kommt noch die Grenze $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-m}^2 < 1$ hinzu. Da das Produkt $d x_{m+1}\, d x_{m+2} \ldots d x_n$ sich in

$$\sin^{n-m}\Theta\,.\,d y_1\, d y_2 \ldots d y_{n-m}$$

verwandelt, so hat man:

$$P(1\,2\,3\ldots n) = f\big((m+1)(m+2)\ldots n\big) \times \int^{n} \sin^{n-m}\Theta\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_m\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-m}$$
$$(p_1 > o, p_2 > o, \ldots p_m > o, y_1 > o, y_2 > o, \ldots y_{n-m} > o)$$

$$= f\big((m+1)(m+2)\ldots n\big) \times \int^{n} dx_1\, dx_2 \ldots dx_m\, dx_{m+1}\, dx_{m+2} \ldots dx_n \quad ;$$
$$(p_1 > o, \ldots p_m > o, x_{m+1} > o, \ldots x_n > o)$$

Denkt man sich hier die $n-m$ letzten Variabeln $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n$ zuerst als konstant, und die Integration nur in Beziehung auf die m ersten Variabeln vollzogen, so erhält man auf demselben Wege wie vorhin:

$$P(1\,2\,3\ldots n) = f\big((m+1)(m+2)\ldots n\big) \times f(1\,2\,3\ldots m) \times \int\limits_{\left(\substack{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<1 \\ x_1>o,\, x_2>o,\ldots x_n>o}\right)}^{n} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \quad ;$$

also endlich:

$$f(1\,2\,3\ldots n) = f(1\,2\,3\ldots m)\, f\big((m+1)(m+2)\ldots n\big);$$

d. h., sind m Grenzpolynome einer n-sphärischen Funktion sämtlich zu den $n-m$ übrigen orthogonal, so ist dieselbe das Produkt der von jenen begrenzten m-sphärischen Funktion und der von diesen begrenzten $(n-m)$-sphärischen. Hierbei ist zu bemerken, dass $f(1) = 1$, weil auch für die Grenzen $x^2 < 1$, $x > o$, $\int dx = 1$ ist. Wenn also das erste Grenzpolynom zu allen übrigen orthogonal ist, so hat man $f(1\,2\,3\ldots n) = f(2\,3\,4\ldots n)$; und wenn überhaupt die m ersten Polynome nicht nur zu allen übrigen, sondern auch alle unter sich orthogonal sind, so hat man $f(1\,2\,3\ldots n) = f\big((m+1)(m+2)\ldots n\big)$.

Wenn zwei plagioschematische Funktionen sich bloss dadurch unterscheiden, dass ein bei der ersten positiv genommenes Grenzpolynom bei der andern negativ genommen wird, so ist die Summe dieser Funktionen doppelt so gross als die nur von allen übrigen Polynomen begrenzte Funktion; oder

$$f(p_1, p_2, p_3, \ldots p_n) + f(-p_1, p_2, p_3, \ldots p_n) = 2 f(p_2, p_3, \ldots p_n).$$

Wenn man sich nämlich die zwei ersten Funktionen durch die entsprechenden Integrale ersetzt denkt, so ist deren Summe ein ähnliches Integral, worin die Grenzbedingung $p_1 > o$ oder $-p_1 > o$ wegfällt; diese Summe bleibt sich daher gleich, wenn auch das Polynom p_1 sich ändert, z. B. zu allen übrigen Polynomen orthogonal wird; dann hat aber jede der Funktionen, aus denen die Summe besteht, den Wert $f(2\,3\,4\ldots n)$; folglich ist diese $2f(2\,3\,4\ldots n)$.

§ 24. *Reduktion der perissosphärischen Plagioscheme auf artiosphärische.*

Um die zwei Fälle einer geraden und einer ungeraden Dimensionszahl zu unterscheiden, gebrauchen wir die Ausdrücke Artiosphäre und Perissosphäre. Wir haben schon gesehen, dass die trisphärischen und pentasphärischen Plagioscheme sich linear durch artiosphärische Plagioscheme niedrigerer Ordnung ausdrücken lassen, und stellen nun folgenden allgemeinen Satz hin:

Wenn f_{2n+1} eine von den Polynomen $p_1, p_2, \ldots p_{2n+1}$ begrenzte plagioschematische Funktion ist, und man mit Σf_{2m} die Summe aller $2m$-sphärischen

Funktionen bezeichnet, welche von irgend $2m$ jener Polynome begrenzt werden ($f_o = 1$ angenommen), so ist

$$f_{2n+1} = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i a_i \Sigma f_{2n-2i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo die Koeffizienten a durch die Gleichung

$$\operatorname{tang} x = \sum_{i=o}^{i=\infty} a_i \frac{x^{2i+1}}{1.2.3\ldots(2i+1)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

definiert sind.

Beweis. Differentiiert man die Gleichung (1) nach irgend einem Argument von f_{2n+1}, z. B. nach $(1\,2)$, so fällt rechts das letzte Glied $(-1)^n a_n$ weg, und man erhält

$$f_{2n-1}(\overline{12}) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_i \Sigma f_{2n-2i-2}(\overline{12}),$$

eine ähnliche Gleichung, worin nur die Dimensionszahl $2n+1$ durch $2n-1$, und die Grenzpolynome durch $p(\overline{1\,2}, 3)$, $p(\overline{1\,2}, 4)$, $\ldots p(\overline{1\,2}, n)$ ersetzt sind. Wäre nun der Satz für die $(2n-1)$-Sphäre schon zugegeben, so könnte man durch Integration von dieser Gleichung auf (1) zurückschliessen, und brauchte nur noch nachzuweisen, dass die Integrationskonstante $(-1)^n a_n$ richtig bestimmt ist. In der That, wenn wir annehmen, dass alle Argumente von f_{2n+1} rechte seien, und edenken, dass die Summe Σf_{2n-2i} so viele Glieder zählt, als $2n+1$ Elemente zu je $2n-2i$ kombiniert werden können, so wird die Gleichung (1)

$$1 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i \binom{2n+1}{2i+1},$$

oder, wenn man mit $1.2.3\ldots(2n+1)$ dividiert,

$$\sum_{i=o}^{i=n} \frac{(-1)^{n-i}}{1.2.3\ldots(2n-2i)} \cdot \frac{a_i}{1.2.3\ldots(2i+1)} = \frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots(2n+1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Dieselbe Rekursionsgleichung (3) findet man aber auch, wenn man die Gleichung (2) mit

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \cdots$$

multipliziert, und in der Entwickelung die Koeffizienten von x^{2n+1} auf beiden Seiten einander gleich setzt. Die Integrationskonstante wäre also richtig bestimmt, wenn der Satz für die Dimensionszahl $2n-1$ wahr wäre. Da aber für die Trisphäre wirklich $f_3 = \Sigma f_2 - 2$, und $a_o = 1$, $a_1 = 2$ ist, so ist der Satz allgemein bewiesen.

Wir wollen die Gleichung (1) noch einer andern Probe unterwerfen, indem wir annehmen, ein Grenzpolynom von f_{2n+1} sei zu allen übrigen orthogonal; jenes mag

äquatorial, diese meridian heissen. Scheiden wir nun alle Funktionen f_{2m} in zwei Gruppen, je nachdem das äquatoriale Polynom in der entsprechenden Kombination vorkommt oder nicht, und versehen im ersten Falle den Funktionsbuchstaben mit dem Zeichen des senkrechten $\perp$, und bei der ungeschiedenen Summe das Symbol Σ mit demselben Beisatz, um anzuzeigen, dass das äquatoriale Polynom sich unter den Elementen befinde, über deren Kombinationen die Summe sich erstreckt, so haben wir

$$f_{2n+1} = f_{2n},\ \Sigma^{\perp} f_{2m} = \Sigma f_{2m} + \Sigma^{\perp} f_{2m} = \Sigma^{\perp} f_{2m} + \Sigma f_{2m+1},$$

wo auf der rechten Seite der letzten Gleichung die erste Summe $\binom{2n}{2m}$, die zweite $\binom{2n}{2m-1}$ Glieder zählt. Nach (1) ist

$$f_{2m-1} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} (-1)^{\lambda-1} a_{\lambda-1} \Sigma f_{2-m2\lambda}.$$

Will man nun dieses in der vorigen Gleichung substituieren, so frägt es sich, wie oft eine und dieselbe Kombination von $2m - 2\lambda$ meridianen Polynomen, oder vielmehr die entsprechende $f_{2m-2\lambda}$ im entwickelten Ausdruck für Σf_{2m-1} sich wiederhole. Da $2m-2\lambda$ meridiane Polynome schon gesetzt sind, so bleiben deren noch $2n - 2m + 2\lambda$ übrig, und daraus können $2\lambda - 1$ gewählt und mit jenen zu einer Kombination vereinigt werden, welche einer gewissen Funktion f_{2m-1} entspricht. Dies kann aber auf $\binom{2n-2m+2\lambda}{2\lambda-1}$ Arten geschehen, und eben so oft wird also jede einzelne Funktion $f_{2m-2\lambda}$ wiederholt. Demnach ist

$$\Sigma^{\perp} f_{2m} = \Sigma f_{2m} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} (-1)^{\lambda-1} \binom{2n-2m+2\lambda}{2\lambda-1} a_{\lambda-1} \Sigma f_{2m-2\lambda}.$$

Setzen wir nun, indem wir diese Formel in der Gleichung (1) substituieren, $m = n - i$ und $\lambda = k - i$, so bekommen wir

$$f_{2n} = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^{i} a_i \Sigma . f_{2n-i} + \sum_{i=0}^{i=n-1} \sum_{k=i+1}^{k=n} (-1)^{k-1} \binom{2k}{2i+1} a_i\, a_{k-i-1} \Sigma f_{2n-2k}.$$

Kehrt man in der Doppelsumme rechts die Ordnung der Summationen um, so durchläuft, wenn man k als konstant voraussetzt, i die Werte $0, 1, 2, \ldots k-1$; und dann ist nach und nach $k = 1, 2, \ldots n$ zu setzen. Man bekommt daher

$$0 = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k} \left\{ a_k - \sum_{i=0}^{i=k-1} \binom{2k}{2i+1} a_i\, a_{k-i-1} \right\} \Sigma f_{2n-2k}.$$

Zur identischen Giltigkeit dieser Gleichung wird erfordert, dass überhaupt

$$a_n = \sum_{i=0}^{i} \binom{2n}{2i+1} a_i a_{n-i-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

sei. Dividiert man diese Gleichung durch $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots 2n$, so sieht man leicht, dass sie aus der Gleichung des Koeffizienten von $x^{2n}\, dx$ in der Entwicklung von $d \operatorname{tang} x = dx + \operatorname{tang}^2 x \,.\, dx$ hervorgeht.

Setzt man $a_n = 2^n c_n$, so erhält die Rekursionsgleichung (4), indem man die Fälle von geradem und ungeradem n unterscheidet, die Formen

$$c_{2n} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \binom{4n}{2i+1} c_i c_{2n-i-1}, \quad c_{2n+1} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \binom{4n+2}{2i+1} c_i c_{2n-i} + \frac{1}{2} \binom{4n+2}{2n+1} c_n^2.$$

Man braucht also nur zu zeigen, dass $\binom{4n+2}{2n+1}$ immer durch 2 teilbar sei, um daraus schliessen zu dürfen, dass alle c ganze und positive Zahlen seien. Dieses ist nun wirklich in folgendem allgemeinen Satze enthalten.

Wenn p eine Primzahl, n, i, k überhaupt ganze positive Zahlen sind, $o < k < p$, so ist $\binom{np}{ip+k}$ durch p teilbar. Denn es ist

$$\binom{np}{ip} . p . (n-i)(np-ip-1)(np-ip-2) \ldots (np-ip-k+1) = \binom{np}{ip+k} . (ip+1)(ip+2) \ldots (ip+k);$$

da die linke Seite den Faktor p hat, und rechts die k letzten Faktoren durch p nicht teilbar sind, so muss der erste Faktor $\binom{np}{ip+k}$ es sein.

Man findet $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 4$, $c_3 = 2 \,.\, 17$, $c_4 = 16 \,.\, 31$, $c_5 = 16 \,.\, 691$, $c_6 = 64 \,.\, 43 \,.\, 127$, $c_7 = 16 \,.\, 257 \,.\, 3617, \ldots$

Sind die Bernoullischen Zahlen B_n durch die Gleichung

$$\frac{x}{2} \operatorname{cotg} \frac{x}{2} = 1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \frac{x^{2n}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots 2n}$$

definiert, so folgt

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{cotg} x - 2 \operatorname{cotg} 2x = \sum_{n=0}^{n=\infty} 2^{2n+2} \frac{2^{2n+2} - 1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (2n+2)} B_{1+n}\, x^{2n+1},$$

also

$$c_n = 2^{n+1} \frac{2^{2n+2} - 1}{n+1} B_{n+1}.$$

Endlich möge noch eine leichte Probe der Gleichung (1) erwähnt werden. Wird das von $n+1$ linearen Kontinuen umschlossene reguläre Polyschem der n-fachen Totalität auf die konzentrische Sphäre projiziert, so zerfällt ihr Umschluss in $n+1$ reguläre Plagioscheme, und die Argumente eines solchen sind sämtlich gleich $\frac{2\pi}{3}$. Wenn

also alle Grenzpolynome der Funktion f_n miteinander Argumente $\frac{2\pi}{3}$ bilden, so ist $f_n = \frac{2n}{n+1}$. Setzt man diese Werte in die Gleichung (1), so erhält man

$$\frac{2^{2n+1}}{2n+2} = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \binom{2n+1}{2n-2i} \frac{2^{2n-2i}}{2n-2i+1} a_i .$$

Multipliziert man diese Formel mit $\frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots(2n+1)}$, so fällt sie zusammen mit derjenigen, welche man durch die Gleichsetzung des Koeffizienten von x^{2n+2} in der Entwicklung der Gleichung $1 - \cos 2x = \sin 2x \times \operatorname{tang} x$ erhält.

§ 25. *Zerlegung der sphärischen Plagioscheme in Orthoscheme.*

Sind die Grenzpolynome $p_1, p_2, \ldots p_n$ eines Plagioschems S so beschaffen, dass nur die $n-1$ Argumente $(12), (23), (34), (45), \ldots ((n-1)n)$ frei bleiben, alle $\binom{n-1}{2}$ übrigen aber rechte sind, so nennen wir S ein Orthoschem und betrachten sein Mass als Funktion der $n-1$ freien Argumente, bei denen die obige Ordnung wesentlich ist, aber auch umgekehrt werden darf, ohne dass die Funktion sich ändert. Es soll nun gezeigt werden, dass jedes n-sphärische Plagioschem in $1.2.3\ldots(n-1)$ Orthoscheme zerlegt werden kann, deren Argumente durch trigonometrische Relationen aus denen des Plagioschems herzuleiten sind.

Wir wollen zuerst sehen, wie die orthogonalen Variabeln gewählt werden müssen, damit die Grenzpolynome eines Orthoschems in der einfachsten Gestalt erscheinen. Ich setze voraus, man habe die in § 20 gegebene Darstellung (5) der Grenzpolynome vor Augen, wo das erste nur eine Variable und jedes folgende immer eine neue Variable mehr als das vorhergehende enthält. Weil nun $(13) = (14) = \cdots = (1n) = \frac{\pi}{2}$ sein soll, so muss x_1 in den Polynomen $p_3, p_4, \ldots p_n$ fehlen. Da p_2 nur x_1 und x_2 enthält, so folgt ferner aus $(24) = (25) = \cdots = (2n) = \frac{\pi}{2}$, dass in den Polynomen $p_4, p_5, \ldots p_n$ die Variable x_2 fehlen muss. Also ist nicht nur $(13) = (14) = \cdots = (1n) = \frac{\pi}{2}$, sondern auch $(\overline{1}, 24) = (\overline{1}, 25) = \cdots = (\overline{1}, 2n) = \frac{\pi}{2}$. Wird diese Schlussweise fortgesetzt, so sieht man, dass das Polynom p_m nur die Variabeln x_{m-1} und x_m enthält, und dass

$$(\overline{123\ldots m}, (m+1)(m+3)) = (\overline{123\ldots m}, (m+1)(m+4)) = \cdots = (\overline{123\ldots m}, (m+1)n) = \frac{\pi}{2}$$

ist; die Grenzpolynome erhalten folgende Form:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= x_1,\\
p_2 &= -x_1 \cos(12) + x_2 \sin(12),\\
p_3 &= \qquad\qquad -x_2 \cos(\overline{1},\ 23) + x_3 \sin(\overline{1},\ 23),\\
p_4 &= \qquad\qquad\qquad\qquad -x_3 \cos(\overline{12},\ 34) + x_4 \sin(\overline{12},\ 34),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
p_n &= -x_{n-1} \cos(\overline{123\ldots(n-2},(n-1)n) + x_n \sin(\overline{123\ldots(n-2)},\ (n-1)n).
\end{aligned}
$$

Werden die allgemeinen Formeln (1) bis (4) des § 20 auf die Grenzpolynome und Argumente des Perischems $S(\overline{m})$ angewandt, so erhält man

$$p(\overline{m},\ m-1) = \frac{p_{m-1} + p_m \cos((m-1)m)}{\sin((m-1)m)},\quad p(\overline{m},\ m+1) = \frac{p_{m+1} + p_m \cos(m(m+1))}{\sin(m(m+1))},$$

und für jedes von $m-1,\ m,\ m+1$ verschiedene i, $p(m,\ i) = p_i$,

$$\cos(\overline{m},\ (m-2)(m-1)) = \frac{\cos((m-2)(m-1))}{\sin((m-1)m)},\ \cos(\overline{m},\ (m+1)(m+2)) = \frac{\cos((m+1)(m+2))}{\sin(m(m+1))}.$$

$$\cos(\overline{m},\ (m-1)(m+1)) = -\operatorname{cotg}((m-1)m)\operatorname{cotg}(m(m+1)),$$

sonst $(\overline{m},\ i(i+1)) = (i(i+1))$ für $i = 1, 2, 3, \ldots m-3;\ m+2,\ m+3, \ldots n-1$; ausser diesen $n-2$ Argumenten von $S(\overline{m})$ sind alle übrigen rechte; also ist $S(\overline{m}, 123\ldots(m-1)\,m+2)(m+3)\ldots n)$ ein $(n-1)$-sphärisches Orthoschem. Der Beweis gilt für alle $(n-1)$-sphärischen Perischeme und kann an jedem von diesen in Beziehung auf seine $(n-2)$-sphärischen Perischeme wiederholt werden, und so fort. Folglich sind alle Perischeme von jeder beliebigen Ordnung Orthoscheme, und bei jedem die Ziffern seiner Grenzpolynome in derselben Ordnung zu nehmen, wie sie im Ausdruck des ursprünglichen Orthoschems auf einander folgen.

Denken wir uns nun das soeben betrachtete Orthoschem $S(123\ldots n)$ auf eine $(n+1)$-sphäre gesetzt, und x_o als neue Variable, so dürfen wir immerhin $x_o = 0$ als Gleichung des Kontinuums, in dem jenes Orthoschem sich befindet, annehmen und alle vorigen Ausdrücke für die Grenzpolynome $p_1, p_2, \ldots p_n$ beibehalten. Dann seien x'_1, $x'_2, \ldots x'_n$ die Werte der Variabeln, welche die Gleichungen $p_2 = 0,\ p_3 = 0, \ldots p_n = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ genügen, oder die Werte des Ecks $(\overline{0234\ldots n})$. Durch dieses Eck und durch die Normale $(x_1 = x_2 = \cdots x_n = 0)$ oder den Pol jenes Orthoschems gehe ein lineares zweifaches Kontinuum $(x_1 : x_2 : \ldots : x_n = x'_1 : x'_2 : \ldots : x'_n)$, welches das $(n+1)$-sphärische Kontinuum in einem Kreisbogen schneidet, der jenes Eck mit dem Pol verbindet. Oder kurz gesagt: man ziehe durch jenes Eck einen zum Orthoschem normalen Kreisbogen. Auf diesem nehme man eine beliebige Lösung A, so sind deren Werte

$$x_o = \sin h,\ x_1 = x'_1 \cos h,\ x_2 = x'_2 \cos h, \ldots x_n = x'_n \cos h,$$

wo h ihre Höhe über dem n-sphärischen Orthoschem bezeichnet. Es ist zum voraus klar, dass alle durch diesen normalen Kreisbogen gelegten n-sphärischen Kontinuen zum Orthoschem $S(\overline{0})$ orthogonal sind, mit andern Worten, dass in ihren Gleichungen die Variable x_o fehlt. Durch jedes $(n-1)$-sphärische Perischem des letzten und durch jene Lösung A ist ein n-sphärisches Kontinuum bestimmt; man versehe die Polynome jener mit Accenten und schreibe diejenigen dieser gleich, aber ohne Accent; dem Orthoschem selbst entspreche das Polynom p_o. Man hat dann im ganzen $n+1$ ein Orthoschem umschliessende n-sphärische Kontinua, wie man sogleich an den Ausdrücken ihrer Polynome sieht:

$$p_o = x_o,\ p_1 = \frac{-(x'_1 \cos h)\, x_o + \sin h \,.\, x_1}{\sqrt{\sin^2 h + x'^2_1 \cos^2 h}},\ p_2 = p'_2,\ p_3 = p'_3, \ldots,\ p_n = p'_n.$$

Es ist übrigens vermöge der Formel (6) in § 20: $x'_1 = \sin(\overline{3\,4\,5\ldots n},\, 1\,2)$; daher

$$p_1 = \frac{-x_o \sin(\overline{3\,4\ldots n},\, 1\,2) \cos h + x_1 \sin h}{\sqrt{1 - \sin^2(\overline{3\,4\ldots n},\, 1\,2) \sin^2 h}}.$$

Wie wir jetzt gesehen haben, kann man jedes n-sphärische Orthoschem zur Konstruktion eines $(n+1)$-sphärischen gebrauchen, indem man jenes auf eine $(n+1)$-Sphäre versetzt, auf dasselbe durch sein erstes Eck einen normalen Kreisbogen h zieht, diesen beliebig begrenzt und durch dessen Endlösung (Spitze) und jedes der n-Perischeme des gegebenen Orthoschems (Basis) ein n-sphärisches Kontinuum legt. Das erste derselben wird dann zur Basis schief, alle folgenden aber orthogonal sein; d. h. man hat ein $(n+1)$-sphärisches Orthoschem konstruiert, wovon das gegebene n-sphärische (die Basis) das erste Perischem ist, und die n übrigen dieselbe Ordnung befolgen wie die $(n-1)$-sphärischen Perischeme der Basis, durch welche sie gelegt sind.

Nach dieser Vorbereitung ist es nun leicht, irgend ein n-sphärisches Plagioschem von einer beliebig gegebenen Lösung A aus in $1.2.3\ldots n$ Orthoscheme zu zerlegen. Es mag beiläufig bemerkt werden, dass die Zerlegung eine wahre Summe geben wird, wenn alle ursprünglichen Argumente spitz sind, und die Lösung A innerhalb des Plagioschems liegt. Weil dieser Fall die geringste Schwierigkeit für die Vorstellung hat, werde ich mich im folgenden immer so ausdrücken, als ob ich nur diesen Fall vor Augen hätte; wir haben dann den Vorteil, dass alle in Betracht kommenden Winkel positiv und kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind. Im allgemeinen aber kann die Zerlegung auch negative Orthoscheme enthalten. Ich zeige zuerst die Möglichkeit der Zerlegung, und dann gebe ich die trigonometrischen Relationen, durch welche die Argumente der Orthoscheme in Funktion derjenigen des gegebenen Plagioschems und der sphärischen Abstände seiner Perischeme von der Lösung A bestimmt sind.

Es seien zuerst ein trisphärisches Plagioschem (Kugeldreieck), begrenzt von den disphärischen Perischemen (Kreisbogen) $S(\overline{1})$, $S(\overline{2})$, $S(\overline{3})$, denen die Polynome p_1, p_2, p_3 entsprechen, und die Lösung A gegeben. Man ziehe von A aus auf $S(\overline{1})$ einen normalen Kreisbogen, A (1) sei sein Fusspunkt. Dieser teilt $S(\overline{1})$ in zwei Stücke, von denen das eine nach dem monosphärischen Perischem $S(\overline{1\,2})$ geht, welches wir auch als Fusspunkt betrachten und durch A (1 2) bezeichnen können. Dieses von A (1) bis A (1 2) reichende Stück können wir als disphärisches Orthoschem betrachten, obgleich auf der Disphäre die Unterscheidung zwischen Plagioschemen und Orthoschemen eigentlich dahin fällt; und da $A\,A$ (1) zu demselben normal ist und durch sein erstes Eck A (1) geht, so bekommen wir ein trisphärisches Orthoschem, welches A zur Spitze und das genannte disphärische Orthoschem, welches einen Teil von $S(\overline{1})$ ausmacht, zur Basis hat. Von seinen disphärischen Perischemen ist das erste der genannte Teil von $S(\overline{1})$, das zweite geht durch A und $S(\overline{1\,2})$, das dritte durch A und A (1). Diese Ordnung entspricht der Permutation 1 2 3. Da es im ganzen 1 . 2 . 3 solche Permutationen giebt, und jeder ein trisphärisches Orthoschem entspricht, so ist die Zerlegung des trisphärischen Plagioschems in 1 . 2 . 3 Orthoscheme bewiesen. Obgleich es auf der Stelle klar ist, dass ein Kugeldreieck mit lauter spitzen Winkeln von einem innerhalb desselben befindlichen Punkte aus in sechs rechtwinklige Kugeldreiecke zerlegt werden kann, so habe ich doch absichtlich die Sache mit dieser scheinbar unnötigen Ausführlichkeit behandelt, um am leichtesten Beispiel den Gang der nun folgenden allgemeinen Konstruktion zum voraus anzudeuten und dadurch etwas klarer zu machen.

Nehmen wir an, es sei bereits gezeigt, dass ein $(n-1)$-sphärisches Plagioschem von einer innern Lösung aus in 1 . 2 . 3 . . . $(n-1)$ Orthoscheme zerlegt werden kann, welche den Permutationen seiner Grenzpolynome entsprechen, und versuchen nun das Gleiche für ein n-sphärisches Plagioschem zu bewerkstelligen, dessen Grenzpolynome mit den Ziffern 1, 2, 3 . . . n bezeichnet sein mögen. Von der gegebenen innern Lösung A aus werde auf das $(n-1)$-sphärische Perischem $S(\overline{1})$ ein normaler Kreisbogen gezogen, und von seinem Fusspunkte A (1) aus dieses Perischem in 1 . 2 . 3 . . . $(n-1)$ Orthoscheme zerlegt; eines von diesen entspreche der Permutation 2 3 4 . . . n. Da A (1) sein erstes Eck ist, und durch dieses der Kreisbogen $A\,A$ (1) normal zum genannten $(n-1)$-sphärischen Orthoschem gezogen ist, so ist nach dem früher Gezeigten das letzte Basis und A Spitze eines n-sphärischen Orthoschems, welches der Permutation 1 2 3 . . . n entspricht. Wird von A (1) auf $S(\overline{1\,2})$ ein normaler Kreisbogen mit dem Fusspunkt A (12), von diesem aus auf $S(\overline{1\,2\,3})$ ein normaler Kreisbogen mit dem Fusspunkt A (123), u. s. f. gezogen, so ist das erste Perischem dieses n-sphärischen Orthoschems jenes orthoschematische Stück von S (1), das zweite geht durch $S(\overline{1\,2})$ und A, das dritte durch $S(\overline{1\,2\,3})$, A und A (1), das vierte durch $S(\overline{1\,2\,3\,4})$, A, A (1) und A (1 2), und so fort,

das letzte endlich durch A, A (1), A (1 2), A (1 2 3), . . ., A (1 2 3 4 . . . (n — 2)). Es ist klar, dass z. B. der Fusspunkt A (1 2 3 . . . m) sich nicht ändert, wie man auch die Ziffern 1, 2, 3, . . . m permutiert. Denn, um denselben zu bestimmen, kann man auch durch das Centrum auf das (n — m)fache lineare Kontinuum $(\overline{123\ldots m})$ das normale $m$fache lineare Kontinuum legen; dieses wird mit dem nach A gehenden Radius ein (m+1)-sphärisches Kontinuum bestimmen, welches das (n — m)-sphärische Perischem $S\,(\overline{1\,2\,3\ldots m})$ im verlangten Fusspunkt A (1 2 3 . . . m) trifft. Wird diese Konstruktion in Beziehung auf alle (n — 1)-sphärischen Orthoscheme, in welche S (1) zerfällt, wiederholt, so setzen sich die erhaltenen n-sphärischen Orthoscheme, welche den sämtlichen mit 1 anfangenden Permutationen der Ziffern 1, 2, 3 . . . n entsprechen, zu einem Plagioschem zusammen, welches A zur Spitze und das ganze Perischem $S\,(\overline{1})$ zur Basis hat. Nimmt man nun nach und nach $S\,(\overline{2})$, $S\,(\overline{3})$, . . . $S\,(\overline{n})$ als Basen, so setzen endlich alle entsprechenden Plagioscheme um die gemeinschaftliche Spitze A herum sich zum ganzen ursprünglichen Plagioschem zusammen. Da nun die Möglichkeit der Zerlegung in Orthoscheme für das trisphärische Plagioschem bewiesen ist, so ist es nach dem vorigen auch für das tetrasphärische, und so fort; sie ist also allgemein bewiesen.

Fällt die Lösung A nicht in die Begrenzung des gegebenen n-sphärischen Plagioschems, so ist aus dem Gesagten klar, dass 1 . 2 . 3 . . . n die Zahl der Orthoscheme sein wird, aus denen es besteht. Fällt sie aber mit einem Eck, z. B. $(\overline{2\,3\,4\ldots n})$, zusammen, so ist dieses die gemeinschaftliche Spitze von 1 . 2 . 3 . . . (n — 1) Orthoschemen, deren Basen das gegenüberliegende Perischem $S\,(\overline{1})$ zusammensetzen, und mit diesen ist die Zerlegung vollendet. Wenn man also eine Zerlegung des Plagioschems in die kleinstmögliche Zahl von Orthoschemen verlangt, so muss sie von einem Eck aus gemacht werden.

Wenn wir nun zweitens die trigonometrischen Relationen anzugeben haben, durch welche die Argumente eines durch die Zerlegung entstandenen Orthoschems, z. B. desjenigen, welches der Permutation 1 2 3 . . . n entspricht, in Funktion der Argumente des gegebenen Plagioschems bestimmt sind, so liegt es uns daran, den Gebrauch der orthogonalen Werte der Lösung A, von der aus die Zerlegung geschehen soll, zu vermeiden, um nicht durch die Willkürlichkeit des orthogonalen Systems belästigt zu sein, sondern nur die wesentliche Zahl von Daten der Aufgabe in Rechnung bringen zu können. Wir bestimmen daher die Lösung A durch die Werte der Grenzpolynome p_1, p_2, . . . p_n. Dann ist z. B. der Wert von p_1 der Abstand der Lösung A von dem durch $p_1 = 0$ dargestellten linearen Kontinuum $(\overline{1})$, oder, da A auf der n-Sphäre liegt, der Sinus des sphärischen Abstandes der Lösung A vom Perischem $S\,(\overline{1})$. Man kann also auch sagen, die Lösung A sei durch die Längen der auf den Perischemen normalen Kreisbogen $A\,A$ (1), $A\,A$ (2), . . . $A\,A$ (n) bestimmt. Weil aber A auf der Sphäre liegen soll, so

muss zwischen den Werten von $p_1, p_2, \ldots p_n$ eine Relation bestehen, welche der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 + \cdots = 1$ entspricht, wenn $x, y, \ldots$ die orthogonalen Variabeln bedeuten. Wir finden diese leicht auf folgendem Wege.

Es seien $p_1 = a_1\, x + b_1\, y + \ldots$, $p_2 = a_2\, x + b_2\, y + \ldots$, etc. die Polynome. Da der Ausdruck

$$\left\| \begin{array}{l|l} x \,.\, y \,.\, z \ldots & x \,.\, y \,.\, z \ldots \\ a_1 \,.\, b_1 \,.\, c_1 \ldots & a_1 \,.\, b_1 \,.\, c_1 \ldots \\ a_2 \,.\, b_2 \,.\, c_2 \ldots & a_2 \,.\, b_2 \,.\, c_2 \ldots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_n \,.\, b_n \,.\, c_n \ldots & a_n \,.\, b_n \,.\, c_n \ldots \end{array} \right\|$$

verschwinden muss, weil jede Hälfte dieses Schemas $n+1$ Horizontalzeilen und nur n Vertikalzeilen hat, so bekommt man, indem man ihn in eine Determinante von Produktsummen verwandelt und $x^2 + y^2 + \cdots = 1$ voraussetzt,

$$\begin{vmatrix} 1 \,. & p_1 \,. & p_2 & \ldots & p_n \\ p_1 \,. & 1 \,. & -\cos(12) & \ldots & -\cos(1\,n) \\ p_2 \,. & -\cos(12) \,. & 1 & . & -\cos(2\,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_n \,. & -\cos(1n) \,. & -\cos(2n) & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

als Gleichung des n-sphärischen Kontinuums.

Formeln zur Berechnung der Orthoscheme, in welche ein gegebenes n-sphärisches Plagioschem zerfällt.

Es seien $a\,(1), a\,(2), \ldots a\,(n)$ die Werte der Grenzpolynome $p\,(1), p\,(2), \ldots p\,(n)$, welche für die Lösung A stattfinden, von der aus die Zerlegung geschehen soll, mit andern Worten, die Sinusse ihrer sphärischen Abstände von den Perischemen; sie müssen der Relation (1) genügen. Es sei ferner

$$\left.\begin{aligned} a\,(\overline{1}.\, m) &= \frac{a\,(1)\cos(1\,m) + a\,(m)}{\sin(1\,m)}, \\ a\,(\overline{12}, m) &= \frac{a\,(\overline{1}, 2)\cos(\overline{1}, 2\,m) + (\overline{1}, \overline{m})}{\sin(\overline{1}, 2\,m)}, \\ a\,(\overline{123}, m) &= \frac{a\,(\overline{12}, 3)\cos(\overline{12}, 3\,m) + a\,(\overline{12}, m)}{\sin(\overline{12}, 3\,m)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a\;\overline{123\ldots(n-1)}, n &= \frac{a\,(\overline{12\ldots(n-2)}, n-1)\cos(\overline{12\ldots(n-2)}, (n-1)\,n) + a\,(\overline{12\ldots(n-2)}, n)}{\sin(\overline{12\ldots(n-2)}, (n-1)\,n)} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a(1)}{a(\overline{1},2)} = \operatorname{tang}\beta_1,\ \dfrac{a(\overline{1},2)}{a(\overline{12},3)} = \operatorname{tang}\beta_2,\ \dfrac{a(\overline{12},3)}{a(\overline{123},4)} = \operatorname{tang}\beta_3,\ \ldots \\ \qquad\ldots\ldots,\ \dfrac{a(\overline{1\,2\,3\ldots(n-2)},\,n-1)}{a(\overline{1\,2\,3\ldots(n-1)},\,n)} = \operatorname{tang}\beta_{n-1},\end{array}\right|\quad . \ . \ (3)$$

so sind $\cos\beta_1,\ \sin\beta_1\,\cos\beta_2,\ \sin\beta_2\,\cos\beta_3,\ \ldots,\ \sin\beta_{n-2}\,\cos\beta_{n-1}$ . . . (4)

die Kosinusse der Argumente desjenigen Orthoschems, welches der Permutation $1\,2\,3\ldots n$ entspricht.

An diesen Satz reihe ich noch folgende Behauptungen.

Der Wert von $a\,(\overline{1\,2\,3\ldots i},\,m)$ ändert sich nicht, wie man auch die überstrichenen Ziffern $1, 2, 3, \ldots i$ permutiert. Die Gesamtzahl dieser Grössen ist demnach

$$n \cdot 2^{n-1} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (5)$$

Die Relation (1) verwandelt sich in

$$a\,(1)^2 + a\,(\overline{1},2)^2 + a\,(\overline{12},3)^2 + a\,(\overline{123},\,4)^2 + \cdots + a\,(\overline{12\ldots(n-1)},n)^2 = 1 .\quad . \quad (6)$$

Wird im Systeme (2) der Buchstabe a durch p ersetzt, d. h., denkt man sich die Werte der Variabeln nicht gegeben, sondern frei, so ist $p\,(\overline{1\,2\ldots i},m)$ das Polynom des durch $S\,(\overline{1\,2\,3\ldots i}\,m)$ und orthogonal zu $S\,(\overline{1})\ldots S\,(\overline{2}),\ldots S\,(\overline{i})$ gelegten Kontinuums. . . . . (7)

Für den Fusspunkt $A\,(1\,2\,3\ldots i)$ gelten die Gleichungen:

$$p_1 = 0,\ p_2 = 0,\ \ldots\ p_i = 0,$$

$$p\,(\overline{1\,2\,3\ldots i},\,m) = \frac{a\,(\overline{1\,2\,3\ldots i},m)}{\sqrt{1 - a(1)^2 - a(\overline{1},2)^2 - a(\overline{12},3)^2 - \cdots - a(\overline{1\,2\ldots i-1},i)^2}}\ ,\quad . \quad (8)$$

$$(m = i+1,\ i+2,\ i+3,\ \ldots n)$$

wo der Radikand im Nenner durch eine Permutation der Ziffern $1, 2, 3, \ldots i$ nicht geändert wird.

Beweis. Das durch $(\overline{1}m)$ und die Lösung A gelegte lineare Kontinuum hat die Gleichung

$$a\,(1)\,p\,(m) - a\,(m)\,p\,(1) = 0. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (9)$$

Die Summe der Quadrate der Koeffizienten der Variabeln auf der linken Seite ist

$$a\,(1)^2 + 2\,a\,(1)\,a\,(m)\cos(1\,m) + a\,(m)^2 = \big(a\,(1)\cos(1\,m) + a\,(m)\big)^2 + a(1)^2\sin^2(1m),$$

also nach (2) gleich

$$\big(a\,(1)^2 + a\,(\overline{1},m)^2\big)\sin^2(1\,m).$$

Das Polynom des betrachteten Kontinuums ist demnach

$$\frac{a(1)\,p(m) - a(m)\,p(1)}{\sin(m)\sqrt{a(1)^2 + a(\bar{1}, m)^2}}.$$

Wenn nun das Orthoschem, dessen Argumente wir suchen, der Permutation $1\,2\,3\ldots n$ entspricht, so ist $p(1) = q_1$ sein erstes Grenzpolynom, und

$$q_2 = \frac{a(1)\,p(2) - a(2)\,p(1)}{\sin(12)\sqrt{a(1)^2 + a(\bar{1}, 2)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

sein zweites. Ist β_1 der Winkel der Polynome q_1, q_2, so hat man

$$\cos\beta_1 = \frac{a(1)\cos(12) + a(2)}{\sin(12)\sqrt{a(1)^2 + a(\bar{1}, 2)^2}} = \frac{a(\bar{1}, 2)}{\sqrt{a(1)^2 + a(\bar{1}, 2)^2}}, \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

woraus sogleich

$$\operatorname{tang}\beta_1 = \frac{a(1)}{a(\bar{1}, 2)}$$

folgt.

Multiplizieren wir die Gleichung (9) mit einem beliebigen der Ziffer m entsprechenden Faktor λ_m und summieren dann für $m = 2, 3, \ldots n$, so stellt die erhaltene Gleichung ein durch A gehendes Kontinuum dar. Soll dieses noch zu $(\bar{1})$ orthogonal sein, so muss

$$\Sigma\,\lambda_m\big(a(1)\cos(1\,m) + a(m)\big) = 0$$

sein. Demnach ist für den von A aus normal auf das Grenzkontinuum $(\bar{1})$ gezogenen Kreisbogen

$$\frac{a(1)\,p(m) - a(m)\,p(1)}{a(1)\cos(1\,m) + a(m)} = \text{const.}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

während $m = 2, 3, \ldots n$ wird. Durch die hieraus entspringenden $n - 2$ Gleichungen ist das normale disphärische Kontinuum gerade bestimmt. Für den Fusspunkt kommt noch die Bedingung $p(1) = 0$ hinzu. Mit Rücksicht auf (2) haben wir also für den Fusspunkt $A(1)$:

$$\frac{p(m)}{a(\bar{1}, m)\sin(1\,m)} = \text{const.} \;(m = 2, 3, \ldots n).$$

Nach der in (7) vorausgesetzten Erweiterung des Systems (2) ist aber

$$p(\bar{1}, m) = \frac{p(1)\cos(1\,m) + p(m)}{\sin(1\,m)}.$$

Wie wir weiter unten noch erläutern werden, und wie schon durch die Bezeichnung angedeutet werden soll, hat dieses Polynom für das $(n - 1)$-sphärische Perischem $S(\bar{1})$

dieselbe Bedeutung, wie $p(m)$ für das ursprüngliche n-sphärische Plagioschem. — Im vorliegenden Falle haben wir also, wegen $p(1) = 0$, für den Fusspunkt $A(1)$

$$\frac{p(\bar{1},2)}{a(\bar{1},2)} = \frac{p(\bar{1},3)}{a(\bar{1},3)} = \ldots = \frac{p(\bar{1},n)}{a(\bar{1},n)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Wir erfahren hieraus nur die Verhältnisse der Werte der Polynome $p(\bar{1}, m)$. Um ihre wirklichen Werte zu bekommen, schreiben wir in der Gleichung (1) überall a statt p, was erlaubt sein muss, weil die Lösung A auf der Polysphäre liegt. Die oberste Horizontalzeile beziffern wir mit 0, die folgenden mit $1, 2, \ldots n$. Multiplizieren wir nun die Horizontalzeile [1] mit $\cos(1\,m)$ und addieren die Produkte zur Horizontalzeile $[m]$, während [1] unverändert bleibt, so ändert sich der Wert der Determinante bekanntlich nicht, und die zwei ersten Glieder der Zeile $[m]$ werden:

$$a(m) + a(1)\cos(1\,m) = a(\bar{1}, m)\sin(1\,m), \qquad 0 \qquad .$$

Das Glied vom Range m wird $\sin^2(1\,m)$, und dasjenige vom Range i wird

$$-\cos(i\,m) - \cos(1\,i)\cos(1\,m) = -\sin(1\,i)\sin(1\,m)\cos(\bar{1}, i\,m);$$

diese Horizontalzeile ist also durch $\sin(1\,m)$ teilbar. Da rechts die Null steht, so kann man diesen Faktor der Determinante weglassen. Man führe dieses durch für $m = 2, 3, \ldots n$. Von der Zeile [0] subtrahiere man die mit $a(1)$ multiplizierte Zeile [1], so werden ihre Glieder

$$1 - a(1)^2,\ 0,\ a(\bar{1},2)\sin(1\,2),\ a(\bar{1},3)\sin(1\,3), \ldots,\ a(\bar{1},n)\sin(1\,n).$$

Bezeichnen $H_o, H_1, \ldots H_n$ die ursprünglichen Horizontalzeilen, so können wir die neuen durch

$$H_o - a(1)\,H_1,\ H_1, \ldots,\ (H_m + H_1\cos(1\,m)) : \sin(1\,m), \ldots$$

ausdrücken. Man wird nun bemerken, dass die Vertikalzeile [1] nur im Range [1] das Glied 1, sonst lauter Nullen hat; folglich kann man auch in der Horizontalzeile [1] alle Glieder ausser dem erwähnten durch Nullen ersetzen. Jetzt ist aber die Vertikalzeile $[i]$ durch $\sin(1\,i)$ teilbar geworden. Man lasse diesen Faktor für $i = 2, 3, \ldots n$ weg, so hat man endlich die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 - a(1)^2 & a(\bar{1},2) & a(\bar{1},3) & \cdots & a(\bar{1},n) \\ a(\bar{1},2) & 1 & -\cos(\bar{1},23) & \cdots & -\cos(\bar{1},2n) \\ a(\bar{1},3) & -\cos(\bar{1},32) & 1 & \cdots & -\cos(\bar{1},3n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a(\bar{1},n) & -\cos(\bar{1},n2) & -\cos(1,n3) & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad \ldots \quad (14)$$

Da diese Gleichung für das $(n-1)$-sphärische Kontinuum $(\overline{1})$ gerade dieselbe Bedeutung hat, wie die Gleichung (2) für das n-sphärische, so folgt, dass für A (1) die Grenzpolynome von $(\overline{1})$ folgende Werte bekommen:

$$p\,(1,\ m) = \frac{a\,(\overline{1}, m)}{\sqrt{1 - a\,(1)^2}},\ (m = 2, 3, 4, \ldots n). \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Was am gegebenen n-sphärischen Plagioschem in Beziehung auf sein Grenzkontinuum $(\overline{1})$ und die Lösung A gethan worden ist, soll nun am $(n-1)$-sphärischen Plagioschem $(\overline{1})$ in Beziehung auf seine Basis $(\overline{12})$ und die Lösung A (1) wiederholt werden.

Man hätte also eigentlich die Variabeln orthogonal so zu transformieren, dass das Polynom p (1) einer einzigen Variabeln gleich würde, und dann in jedem der übrigen Polynome diese Variable wegzulassen und seine zurückbleibenden Koeffizienten proportional so zu verändern, dass wiederum die Summe ihrer Quadrate $= 1$ wird. Nun ist z. B. im Polynom $p\,(m)$ der Koeffizient der zu unterdrückenden Variabeln $-\cos\,(1m)$; die zurückbleibenden Koeffizienten sind also mit $\sin\,(1\,m)$ zu dividieren; das entsprechende Grenzpolynom von $(\overline{1})$ wird demnach

$$p\,(\overline{1},\ m) = \frac{p\,(m) + p\,(1)\cos\,(1\ m)}{\sin\,(1\ m)},$$

und man braucht sich in die Transformation der Variabeln nicht einzulassen. — Mit andern Worten: Durch die Unterdrückung der mit p (1) koincidierenden Variabeln geht das Kontinuum $(\overline{m})$ in ein durch $(\overline{1m})$ gelegtes und zu $(\overline{1})$ orthogonales über. Die erste Bedingung wird durch die Form $p\,(m) + \lambda\, p\,(1)$ erfüllt, und der Faktor λ ist durch die zweite Bedingung, $p\,(m) + \lambda\, p\,(1) \perp p\,(1)$ oder $\cos\,(1\ m) - \lambda = 0$ bestimmt. Da nun die Summe der Quadrate der Koeffizienten des Polynoms $p\,(m) + \lambda\, p\,(1)$ gleich ist $1 + \lambda^2 - 2\,\lambda \cos\,(1\ m) = \sin^2\,(1\ m)$, so haben wir auch so wieder die obige Formel für $p\,(\overline{1},\ m)$ bewiesen. Sie ist übrigens als spezieller Fall in den allgemeinen Formeln (1) und (2) des § 20 enthalten.

Für das folgende brauchen wir einen Ausdruck für den Winkel der Polynome $p\,(i)$ und $p\,(1,\ m)$. Wir finden seinen Kosinus

$$\left.\begin{array}{l} = \dfrac{\cos\,(i\ m) + \cos\,(1\ i)\cos\,(1\ m)}{\sin\,(1\ m)} = \sin\,(1\ i)\cos\,(\overline{1}, i\,m) \\ \text{und im Besonderen für } i = m,\ = -\sin\,(1\ m). \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (16)$$

Nun haben wir ähnlich wie in (10) für das dritte Grenzpolynom des betrachteten Orthoschems den Ausdruck

$$q_3 = \frac{a(\bar{1},2)\,p(\bar{1},3) - a(\bar{1},3)\,p(\bar{1},2)}{\sin(\bar{1},2\,3)\sqrt{a(\bar{1},2)^2 + a(\overline{12},3)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Der Zähler ist eine homogene lineare Funktion von $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$, also geht das Kontinuum durch $(\overline{123})$; der Zähler verschwindet für A und wegen (15) auch für $A(1)$, das Kontinuum geht also durch beide Lösungen.

Wir haben also die negative Summe der Produkte der gleichnamigen Koeffizienten der Polynome $p(2)$ und $a(\bar{1},2)\,p(\bar{1},3) - a(\bar{1},3)\,p(\bar{1},2)$ zu berechnen; nach (16) ist sie

$$\sin(12)\left\{a(\bar{1},2)\cos(\bar{1},23) + a(\bar{1},3)\right\} = a(\overline{12},3)\sin(12)\sin(\bar{1},23);$$

ferner ist $p(1) \perp a(\bar{1},2)\,p(\bar{1},3) - a(\bar{1},3)\,p(\bar{1},2)$, und endlich mit Rücksicht auf den in (10) gegebenen Wert von q_2:

$$\cos\angle(q_2\,q_3) = \frac{a(1)}{\sqrt{a(1)^2 + a(\bar{1},2)^2}} \cdot \frac{a(\overline{12},3)}{\sqrt{a(\bar{1},2)^2 + a(\overline{12},3)^2}} = \sin\beta_1\,\cos\beta_2,$$

wenn man die Abkürzungen (3) gebraucht.

Bezeichnen wir mit $p(\overline{12},m)$ das Polynom eines durch $(12\bar{m})$ und orthogonal zu $(\bar{1})$ und $(\bar{2})$ gelegten Kontinuums, so finden wir durch die oben gebrauchten Schlüsse

$$p(\overline{12},m) = \frac{p(\bar{1},m) + p(\bar{1},2)\cos(\bar{1},2m)}{\sin(\bar{1},2m)}. \quad \text{Vergl. (7)}$$

Es erhellt schon aus der Definition, dass dieser Ausdruck durch Vertauschung der Zeiger 1, 2 nicht geändert wird; man kann dies aber auch direkt verifizieren; denn man findet leicht

$$p(\overline{12},m) = \frac{p(m)\sin(12) + p(1)\sin(2\,m)\cos(\bar{2},1m) + p(2)\sin(1\,m)\cos(\bar{1},2\,m)}{\sin(12)\,.\,\sin(1\,m)\sin(\bar{1},2m)},$$

wo hinsichtlich des Nenners zu bemerken ist, dass $\sin(1\,m)\sin(\bar{1},2\,m) = \sin(2\,m)\sin(\bar{2},1\,m)$. Wenn aber $p(\overline{12},m) = p(\overline{21},m)$, so folgt von selbst, dass auch $a(\overline{12},m) = a(\overline{21},m)$. Hieraus kann leicht die Richtigkeit der Behauptung (5) gefolgert werden.

Wie aus der Gleichung (1) die Gleichung (14) sich ergab, so kann aus dieser wiederum die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 - a(1)^2 - a(\bar{1},2)^2 & a(\overline{12},3) & \ldots & a(\overline{12},n) \\ a(\overline{12},3) & 1 & \ldots & -\cos(\overline{12},3\,n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a(\overline{12},n) & -\cos(\overline{12},n\,3) & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad (18)$$

hergeleitet werden, und es folgt, dass der Ausdruck $a(1)^2 + a(\overline{1,2})^2$ sich nicht ändert, wenn man auch die Ziffern 1 und 2 vertauscht. Setzt man dies weiter fort, so erhält man durch wiederholte Anwendung derselben Schlüsse, durch welche (13) und (15) gefunden wurden, für den Fusspunkt $A(1\,2\,3\ldots i)$ die Gleichungen (8). Da zuletzt das Polynom $p(\overline{1\,2\,3\ldots(n-1)}, n)$ nur noch eine Variable enthält, und diese der Gleichung*) der Monosphäre, so ist sein Wert ± 1; daraus folgt die Gleichung (6). Das Gleiche folgt auch aus der fortgesetzten Reduktion der Gleichung (18).

Es ist leicht, die Gleichung (17) zu verallgemeinern; man hat

$$q = \frac{a(\overline{1\,2\ldots(m-2)}, m-1)\, p(\overline{1\,2\ldots(m-2)}, m) - a(\overline{1\,2\ldots(m-2)}, m)\, p(\overline{1\,2\ldots(m-2)}, m-1)}{\sin(\overline{1\,2\ldots(m-2)}, (m-1)\,m)\sqrt{a(\overline{1\,2\ldots(m-2)}, m-1)^2 + a(\overline{1\,2\ldots(m-1)}, m)^2}}.$$

Aus dieser allgemeinen Formel für ein Grenzpolynom des Orthoschems folgt dann

$$\cos\angle(q_m q_{m+1}) = \frac{a(\overline{1\,2\ldots(m-2)}, m-1)}{\sqrt{a(\overline{1\,2\ldots(m-2)}, m-1)^2 + a(\overline{1\,2\ldots(m-1)}, m)^2}} \cdot \frac{a(\overline{1\,2\ldots m}, m+1)}{\sqrt{a(\overline{1\,2\ldots(m-1)}, m)^2 + a(\overline{1\,2\ldots m}, m+1)^2}}$$

$$= \sin\beta_{m-1}\cos\beta_m. \quad \text{Vergl. (4).}$$

Wenn die Bedingung für die Quadratsumme der Koeffizienten nicht erfüllt zu sein braucht, so kann man das $m$te Grenzkontinuum des Orthoschems auch durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 \cdot & -\cos(1\,2)\cdot & -\cos(1\,3)\cdot & \cdots & -\cos(1\,(m-2))\cdot & a(1)\cdot & p(1) \\ -\cos(2\,1)\cdot & 1\cdot & -\cos(2\,3)\cdot & \cdots & -\cos(2\,(m-2))\cdot & a(2)\cdot & p(2) \\ -\cos(3\,1)\cdot & -\cos(3\,2)\cdot & 1\cdot & \cdots & -\cos(3\,(m-2))\cdot & a(3)\cdot & p(3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\cos(m\,1)\cdot & -\cos(m\,2)\cdot & -\cos(m\,3)\cdot & \cdots & -\cos(m\,(m-2))\cdot & a(m)\cdot & p(m) \end{vmatrix} = 0$$

darstellen. Es erhellt aus dieser Form der Gleichung sogleich, dass das Kontinuum durch $(\overline{1\,2\,3\ldots m})$ und A geht und zu allen durch $(\overline{1\,2\ldots(m-2)})$ gelegten Kontinuen orthogonal ist, und dass eine Permutation der Zeiger $1, 2, 3, \ldots m-2$ keinen Einfluss hat.

§ 26. *Reduktion der perissosphärischen Orthoscheme auf artiosphärische.*

Auf den ersten Blick scheint die Aufgabe dieses Paragraphen schon mit derjenigen des § 24, welche sich auf Plagioscheme überhaupt bezog, zugleich gelöst zu sein, indem man nichts weiter zu thun brauche, als die dortige Gleichung (1) dem besondern Fall eines Orthoschems anzupassen. Dieses Geschäft kann für niedrige Dimensionszahlen allerdings

*) So im Manuscript.!

ausgeführt werden. Da aber der in § 23 betrachtete Fall, wo eine plagioschematische Funktion in ein Produkt zweier anderer zerfällt, sehr oft mit perissosphärischen Faktoren eintritt, und diese dann wiederum durch lineare Polynome artiosphärischer Funktionen dargestellt werden müssen, so mag es schwer halten, auf diesem Wege zu einem allgemeinen Gesetz zu gelangen. Hingegen wird die Lösung der speziellen Aufgabe dieses Paragraphen ganz leicht, wenn man sie unmittelbar angreift, ohne von der Gleichung (1) in § 24 auszugehen.

Zur Vorbereitung auf das folgende diene diese auf § 23 gestützte Bemerkung. Bedeutet $f\,(1\,2\,3\,4\ldots n)$ eine orthoschematische Funktion, wo die Ziffern den Grenzpolynomen entsprechen, und die Ordnung derselben die bekannte Bedeutung hat, also bloss umgekehrt, aber sonst nicht durch Permutation verändert werden darf, und man lässt einige Polynome weg, sodass die Folge der übrigen durch Lücken unterbrochen wird, so sind alle zwischen zwei Lücken oder zwischen einer Lücke und dem Anfang oder Ende der ursprünglichen Reihe enthaltenen Polynome zu jedem der übrigen orthogonal; daher findet die in § 23 gelehrte Zerfällung einer Funktion in Faktoren ihre Anwendung auf jede niedrigere orthoschematische Funktion, welche einer durch Lücken unterbrochenen Kombination der gegebenen Polynome entspricht. Ist z. B. $m - i > 1$, $m < n$, so ist

$$f\,(1\ 2\ 3\ldots i\ m\ (m+1)\ldots n) = f\,(1\ 2\ 3\ldots i)\,f\,(m\,(m+1)\ldots n)\,.$$

Im folgenden Satze können nur artiosphärische Faktoren vorkommen.

Satz. Wenn f_{2n+1} die einem perissosphärischen Orthoschem entsprechende Funktion bezeichnet, und man lässt in der Reihe seiner $2n+1$ Grenzpolynome deren $2i+1$ auf alle möglichen Arten so weg, dass jede der ununterbrochenen Reihen, in welche die ursprüngliche Reihe durch die entstandenen Lücken getrennt wird, eine gerade Anzahl von Polynomen enthält; bezeichnet man ferner die Summe aller Funktionen, welche den erwähnten Kombinationen der Grenzpolynome entsprechen, mit Σf_{2n-2i}, wo die einzelnen Glieder teils einzelne Funktionen, teils Produkte von solchen sind, je nachdem in der betreffenden Kombination alle Polynome eine fortlaufende oder durch Lücken unterbrochene Reihe bilden, — so ist

$$f_{2n+1} = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{(-1)^i}{i+1} \binom{2i}{i} \Sigma f_{2n-2i}\,. \qquad (1)$$

z. B.

$$f(1\,2\,3) = f(2\,3) + f(1\,2) - 1,$$

$$f(1\,2\,3\,4\,5) = f(2\,3\,4\,5) + f(1\,2)f(4\,5) + f(1\,2\,3\,4)$$
$$- \left\{f(4\,5) + f(3\,4) + f(2\,3) + f(1\,2)\right\} + 2.$$

$$f(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7) = f(2\,3\,4\,5\,6\,7) + f(1\,2)f(4\,5\,6\,7) + f(1\,2\,3\,4)f(6\,7) + f(1\,2\,3\,4\,5\,6)$$
$$- \Big\{f(4\,5\,6\,7) + f(3\,4)f(6\,7) + f(3\,4\,5\,6) + f(2\,3)f(6\,7) + f(2\,3)f(5\,6)$$
$$+ f(2\,3\,4\,5) + f(1\,2)f(6\,7) + f(1\,2)f(5\,6) + f(1\,2)f(4\,5) + f(1\,2\,3\,4)\Big\}$$
$$+ 2\left\{f(6\,7) + f(5\,6) + f(4\,5) + f(3\,4) + f(2\,3) + f(1\,2)\right\} - 5.$$

Beweis. Es frägt sich zuerst, wie oft man aus der Reihe $1, 2, 3, 4, \dots (2n+1)$ je zwei $2i+1$ Ziffern weglassen kann, sodass jede der zurückbleibenden fortlaufenden Reihen eine gerade Anzahl von Ziffern enthält. Man ordne die zurückgebliebenen Ziffern paarweise, so hat man $n-i$ Paare, und denke sich jedes Paar durch ein einziges Symbol ersetzt. Zählt man die weggelassenen Ziffern einzeln ebenfalls als Symbole, so sind deren im ganzen $n+i+1$, und man hat eine gewöhnliche Kombination $(2i+1)$ter Klasse aus $n+i+1$ Elementen. Die Summe Σf_{2n-2i} zählt also $\binom{n+i+1}{2i+1}$ Glieder.

Sind nun alle $2n+1$ Polynome unter sich orthogonal, so hat jede Funktion f den Wert 1; und, wenn die Gleichung (1) richtig ist, so muss

$$1 = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{(-1)^i}{i+1} \binom{2i}{i} \binom{n+i+1}{2i+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

sein. Bedeutet h_n die Summe rechts, so ist

$$h_n - h_{n-1} = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{(-1)^i}{i+1} \binom{2i}{i} \cdot \binom{n+i}{2i} = \frac{1}{n}\, \Sigma (-1)^i \binom{n+i}{i+1} \binom{n}{i}$$
$$= -\frac{1}{n}\, \Sigma \binom{-n}{i+1} \binom{n}{n-i} = -\frac{1}{n} \binom{0}{n+1} = 0.$$

Also ist $h_n = h_{n-1} = h_{n-2} = \cdots = h_1 = h_0$; und, da $h_0 = 1$ ist, so ist die Gleichung (2) allgemein gültig. Daraus ist zu schliessen, dass, wenn die Form der Gleichung (1) die richtige ist, die Koeffizienten ebenfalls richtig gesetzt sind.

Um die Form zu prüfen, differentiieren wir die Gleichung (1) nach irgend einem Argument der Funktion f_{2n+1} und erhalten offenbar eine Gleichung von derselben Form, mit dem einzigen Unterschiede, dass die zwei das variierte Argument einschliessenden Polynome herausgefallen, und durch die Unterdrückung des zu beiden normalen zweifachen Kontinuums die zwei benachbarten Polynome verändert sind. Wenn also der zu beweisende Satz für die $(2n-1)$-Sphäre bereits zugegeben ist, so kann man durch

blosse Integration auf die Richtigkeit der Gleichung (1) schliessen, indem man zugleich die Integrationskonstante nach (2) bestimmt. Da nun der Satz (1) für die Trisphäre richtig ist, so ist hiermit seine allgemeine Geltung bewiesen.

§ 27. *Perioden artiosphärischer Orthoscheme.*

Wenn ein Plagioschem $S\,(1\,2\,3\ldots n)$ verschwindet, so sind seine Grenzpolynome nicht alle unter sich unabhängig; die Determinante ihrer Koeffizienten wird also verschwinden, oder, wenn man will, das Quadrat derselben, die Determinante der negativen Kosinus der Argumente, welche wir in § 20 mit $\varDelta\,(1\,2\,3\ldots n)$ bezeichnet haben. Nach demselben Paragraphen ist z. B.

$$\sin^2(3\,4\,5\ldots n,\,12) = \frac{\varDelta\,(1\,2\,3\,4\ldots n)\,\varDelta\,(3\,4\,5\ldots n)}{\varDelta\,(2\,3\,4\ldots n)\,\varDelta\,(1\,3\,4\,5\ldots n)}\,.$$

Wenn also keine der Determinanten $(n-1)$-ten Grades verschwindet, so müssen beim Verschwinden des Plagioschems $S\,(1\,2\,3\ldots n)$ auch die Sinusse aller seiner Seiten verschwinden; aber diese selbst können dann immer noch 0 oder π sein. Man darf aber im allgemeinen nicht umgekehrt von $\varDelta\,(1\,2\,3\ldots n)=0$ aus auf das Verschwinden des Plagioschems schliessen. Wenn man jedoch sicher weiss, dass alle Seiten verschwinden, so überzeugt uns schon die unmittelbare, ich möchte sagen, geometrische Anschauung, dass das Plagioschem verschwindet. Setzen wir jetzt den Fall, dass alle Argumente von $S\,(1\,2\,3\ldots n)$ im ersten Quadranten liegen, so folgt aus

$$\cos(\overline{1},23) = \frac{\cos(23)+\cos(12)\cos(13)}{\sin(12)\sin(13)},\ \text{etc.,}$$

dass das nämliche auch für alle Argumente der $(n-1)$-sphärischen Perischeme gilt, denn $\cos(\overline{1},2\,3)$ kann in diesem Falle nur positiv sein; daraus folgt aber weiter, dass auch alle $(n-2)$-sphärischen Argumente spitz sind, und so fort, zuletzt, dass die Seiten alle im ersten Quadranten liegen. Ist nun auch noch $\varDelta\,(1\,2\,3\ldots n)=0$, während keine der ähnlichen Determinanten $(n-1)$-ten Grades verschwindet, so kann hieraus nur auf das Verschwinden sämtlicher Seiten, also auch des Plagioschems selbst, geschlossen werden. Erwägt man die Sache noch genauer, so findet man, dass auch keine Determinante $(n-1)$-ten Grades verschwinden kann. Denn, wäre z. B. $\varDelta\,(2\,3\,4\ldots n)=0$, während keine Determinante $(n-2)$-ten Grades verschwindet, so müssten nach der Formel

$$\sin^2(\overline{4\,5\ldots n},2\,3) = \frac{\varDelta\,(2\,3\,4\,5\ldots n)\,\varDelta\,(4\,5\ldots n)}{\varDelta\,(2\,4\,5\ldots n)\,\varDelta\,(3\,4\,5\ldots n)}$$

alle aus den Ziffern $2, 3, 4, \ldots n$ gebildeten trisphärischen Stücke, wie $(\overline{4\,5\ldots n},2\,3)$ verschwinden, und, da alsdann z. B. in der Gleichung

$$\cos(\overline{345\ldots n}, 12) = \frac{\cos(\overline{45\ldots n}, 12) + \cos(\overline{45\ldots n}, 13)\cos(\overline{45\ldots n}, 23)}{\sin(\overline{45\ldots n}, 13)\sin(\overline{45\ldots n}, 23)}$$

rechts der Nenner des Bruchs verschwände, so müsste auch der Zähler verschwinden, was nicht sein kann, da derselbe die Summe zweier positiver Grössen ist. Der gleiche Schluss ist auf die Annahme anwendbar, dass eine Determinante $(n-2)$-ten Grades, aber keine $(n-3)$-ten Grades verschwinde, und so fort. Eine Determinante zweiten Grades endlich, wie $\varDelta(12)$ kann nicht verschwinden, weil sonst ein ursprüngliches Argument (12) gleich Null sein müsste. Demnach ist folgender Schluss rückwärts sicher:

Wenn alle Argumente des Plagioschems $S(123\ldots n)$ positiv und spitz sind, und es verschwindet die Determinante $\varDelta(123\ldots n)$ der negativen Kosinus der Argumente, so muss auch das Plagioschem verschwinden.

Für ein Orthoschem $S(123\ldots n)$ ist

$$\varDelta(123\ldots n) = \begin{vmatrix} 1 & -\cos(12) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\cos(21) & 1 & -\cos(23) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(32) & 1 & -\cos(34) & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & -\cos((n-1)n) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -\cos(n(n-1)) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \varDelta(234\ldots n) - \cos^2(12)\,\varDelta(34\ldots n) = \varDelta(123\ldots(n-1)) - \cos^2((n-1)n)\,\varDelta(123\ldots(n-2)).$$

Gebrauchen wir einfache Zeichen für die Argumente, indem wir $(12) = \alpha, (23) = \beta, (34) = \gamma, \ldots, ((n-1)n) = \Theta$ und $\varDelta(123\ldots n) = \varDelta_n(\alpha, \beta, \ldots \Theta)$ setzen, wo der untere Zeiger bei $\varDelta$ den Grad der Determinante bedeutet, so haben wir zur successiven Berechnung derselben folgende Reihe von Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\varDelta_0 = 1,\ \varDelta_1 = 1,\ \varDelta_2(\alpha) = \varDelta_1 - \varDelta_0\cos^2\alpha = \sin^2\alpha,\ \varDelta_3(\alpha,\beta) = \varDelta_2 - \varDelta_1\cos^2\beta \\ &= \sin^2\alpha - \cos^2\beta,\ \varDelta_4(\alpha,\beta,\gamma) = \varDelta_3 - \varDelta_2\cos^2\gamma = \sin^2\alpha\sin^2\gamma - \cos^2\beta, \\ &\ldots,\ \varDelta_n(\alpha,\beta,\ldots\zeta,\eta,\Theta) = \varDelta_{n-1}(\alpha,\beta,\ldots\zeta,\eta) - \cos^2\Theta\,\varDelta(\alpha,\beta,\ldots\zeta). \quad \ldots \quad (1) \end{aligned}$$

Die Realität des Orthoschems $S(\alpha, \beta, \ldots \eta, \Theta)$ erfordert, dass keine dieser Determinanten negativ sei. Die Reihe ihrer Werte nimmt also fortwährend ab, und daher ist es nicht möglich, dass eine ausser der letzten verschwinde. Man sieht leicht, dass die Determinanten auch durch Kettenbrüche definiert werden können; denn es ist z. B.

$$\frac{\varDelta(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots\eta,\Theta)}{\varDelta(\beta,\gamma,\delta,\ldots\eta,\Theta)} = 1 - \cfrac{\cos^2\alpha}{1 - \cfrac{\cos^2\beta}{1 - \cfrac{\cos^2\gamma}{1 - \cfrac{\cos^2\delta}{1 - \ddots - \cfrac{\cos^2\eta}{1 - \cos^2\Theta}}}}}$$

Aus (1) folgt auch leicht

$$\Delta(\alpha, \beta, \ldots \varepsilon, \zeta, \eta, \Theta) + \cos^2 \eta \, \Delta(\alpha, \beta, \ldots \varepsilon) = \sin^2 \Theta \, \Delta(\alpha, \beta, \ldots \varepsilon, \zeta).$$

Wenn also $\Delta(\alpha, \beta, \ldots \varepsilon, \zeta, \eta, \Theta) = 0$ ist, so hat man

$$\cos^2 \Theta = \frac{\Delta(\alpha, \beta, \ldots \varepsilon, \zeta, \eta)}{\Delta(\alpha, \beta, \ldots \varepsilon, \zeta)}, \quad \sin^2 \Theta = \cos^2 \eta \, \frac{\Delta(\alpha, \beta, \ldots \varepsilon)}{\Delta(\alpha, \beta, \ldots \varepsilon, \zeta)}.$$

Zwei Sätze über die mit Δ bezeichneten Funktionen mögen das folgende vorbereiten.

1. Es ist

$$\begin{vmatrix} \Delta(\beta, \gamma, \ldots \eta, \Theta) \cdot \Delta(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \eta, \Theta) \\ \Delta(\beta, \gamma, \ldots \eta) \cdot \Delta(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \eta) \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha \begin{vmatrix} \Delta(\gamma, \ldots \eta, \Theta) \cdot \Delta(\beta, \gamma, \ldots \eta, \Theta) \\ \Delta(\gamma, \ldots \eta) \cdot \Delta(\beta, \gamma, \ldots \eta) \end{vmatrix}.$$

Um dieses zu beweisen, braucht man nur im Schema links die erste Vertikalzeile von der zweiten abzuziehen und dann beide Zeilen zu vertauschen, indem man zugleich das Vorzeichen der Determinante verändert. Wenn man aber die Determinante rechts wieder so behandelt und dieses Verfahren fortsetzt, so gelangt man zuletzt zur Derminante

$$\begin{vmatrix} \Delta_1 \, . \, \Delta_2 \, (\Theta) \\ \Delta_0 \, . \, \Delta_1 \end{vmatrix} = 1 - \sin^2 \Theta = \cos^2 \Theta;$$

also ist

$$\Delta(\alpha, \beta, \ldots \eta) \, \Delta(\beta, \ldots \eta, \Theta) - \Delta(\alpha, \beta, \ldots \eta, \Theta) \, \Delta(\beta, \ldots \eta) = \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma \ldots \cos^2 \Theta. \quad (2)$$

2. Multipliziert man die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \ldots \zeta) &= \Delta(\beta, \gamma, \ldots \ldots \zeta) - \cos^2 \alpha \, \Delta(\gamma, \delta, \ldots \zeta), \\ \Delta(\beta, \gamma, \delta, \ldots \zeta, \eta) &= \Delta(\gamma, \delta, \ldots \zeta, \eta) - \cos^2 \beta \, \Delta(\delta, \ldots \zeta, \eta), \\ \Delta(\gamma, \delta, \ldots \zeta, \eta, \Theta) &= \Delta(\gamma, \delta, \ldots \zeta, \eta) - \cos^2 \Theta \, \Delta(\gamma, \delta, \ldots \zeta), \\ \Delta(\delta, \ldots \zeta, \eta, \Theta, \alpha) &= \Delta(\delta, \ldots \zeta, \eta, \Theta) - \cos^2 \alpha \, \Delta(\delta, \ldots \ddot{\zeta}) \end{aligned}$$

resp. mit $\Delta(\delta, \ldots \zeta, \eta)$, $-\Delta(\delta, \ldots \zeta)$, $\Delta(\delta, \ldots \zeta)$, $-\Delta(\gamma, \delta, \ldots \zeta)$,

addiert sie und bezeichnet die Summe links mit G, so hat man

$$\begin{aligned} G = \Delta(\delta, \ldots \zeta, \eta) &\left\{ \Delta(\beta, \gamma, \delta, \ldots \zeta) + \cos^2 \beta \, \Delta(\delta, \ldots \zeta) \right\} \\ - \Delta(\gamma, \delta, \ldots \zeta) &\left\{ \Delta(\delta, \ldots \zeta, \eta, \Theta) + \cos^2 \Theta \, \Delta(\delta, \ldots \zeta) \right\} \\ = \Delta(\delta, \ldots \zeta, \eta) \, \Delta(\gamma, \delta, \ldots \zeta) &- \Delta(\gamma, \delta, \ldots \zeta) \, \Delta(\delta, \ldots \zeta, \eta) = 0. \end{aligned}$$

Man hat also die identische Gleichung

$$\varDelta(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \zeta)\, \varDelta(\delta, \ldots \zeta, \eta) - \varDelta(\delta, \ldots \zeta, \eta, \Theta, \alpha)\, \varDelta(\gamma, \delta, \ldots \zeta)$$
$$= \Big\{ \varDelta(\beta, \gamma, \delta, \ldots \zeta, \eta) - \varDelta(\gamma, \delta, \ldots \zeta, \eta, \Theta) \Big\}\, \varDelta(\delta, \ldots \zeta). \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Um nun zum eigentlichen Gegenstand dieses Paragraphen überzugehen, setzen wir den Fall, wo in der Gleichung (1) des vorigen Paragraphen die perissosphärische Funktion links verschwindet. Es seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \varkappa, \lambda, \mu$ ihre $2n$ Argumente, so giebt die erwähnte Gleichung die Summe der zwei artiosphärischen Orthoscheme

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \varkappa, \lambda) + f(\beta, \gamma, \delta, \ldots, \varkappa, \lambda, \mu)$$

in ganzer Funktion artiosphärischer Orthoscheme niedrigerer Ordnung. Man kann aber eine in sich zurückkehrende Reihe solcher Gleichungen auf folgendem Wege erhalten.

Die $2n - 1$ Argumente $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \varkappa, \lambda$ seien frei im ersten Quadranten gegeben, aber so, dass ihre Determinante positiv wird; dann seien drei fernere Argumente μ, ν, ξ durch die Gleichungen

$$\varDelta(\alpha, \beta, \ldots \lambda, \mu) = 0, \quad \varDelta(\beta, \gamma, \ldots \mu, \nu) = 0, \quad \varDelta(\gamma, \delta, \ldots \nu, \xi) = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

bestimmt. Da nur die Quadrate der Kosinusse hier vorkommen, so steht es uns frei, auch μ, ν, ξ im ersten Quadranten zu nehmen. Da $\varDelta(\gamma, \delta, \ldots \lambda, \mu)$ positiv ist, so folgt nach (3) aus den drei Gleichungen (4)

$$\varDelta(\delta, \varepsilon, \ldots \nu, \xi, \alpha) = 0. \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Ebenso folgt aus den zwei letzten Gleichungen (4) und aus (5) die Gleichung

$$\varDelta(\varepsilon, \ldots \nu, \xi, \alpha, \beta) = 0,$$

und so fort; überhaupt verschwindet jede Determinante, welche sich auf $2n$ successive Argumente der durch fortwährende Wiederholung der $(2n+2)$-gliedrigen Periode $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \varkappa, \lambda, \mu, \nu, \xi$ bezieht. Daher verschwindet auch jedes perissosphärische Orthoschem, welches einer solchen Determinante entspricht. Wendet man immer die Gleichung (1) des § 26 an, so sieht man eine Periode der $(2n+2)$-artiosphärischen Orthoscheme $f(\alpha, \beta, \ldots \lambda)$, $f(\beta, \gamma, \ldots \mu)$, $f(\gamma, \delta, \ldots \nu)$, $f(\delta, \varepsilon, \ldots \xi)$, $\ldots$, $f(\xi, \alpha, \ldots \varkappa)$ entstehen, wo immer die Summe von zwei unmittelbar auf einander folgenden Gliedern als ganze Funktion niedrigerer artiosphärischer Orthoscheme gegeben ist. Man kann also auch entweder die Summe oder den Unterschied von irgend zwei getrennten Gliedern der Periode auf ähnliche Weise ausdrücken, je nachdem eine gerade oder ungerade Zahl von Gliedern dazwischen liegt. Wenn im ersten Falle beide Glieder einander gleich sind, so ist jedes derselben durch niedrigere Orthoscheme ausgedrückt, ein Umstand, den wir im folgenden Paragraphen betrachten werden.

Wir wollen die drei letzten Argumente μ, ν, ξ der Periode durch die unabhängigen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varkappa, \lambda$ ausdrücken. Man hat auf der Stelle

$$\cos^2 \mu = \frac{\varDelta(\alpha, \beta, \ldots \varkappa, \lambda)}{\varDelta(\alpha, \beta, \ldots \varkappa)}, \quad \cos^2 \xi = \frac{\varDelta(\alpha, \beta, \ldots \varkappa, \lambda)}{\varDelta(\beta, \ldots \varkappa, \lambda)}, \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

wofür man auch die entsprechenden Kettenbrüche setzen kann. Um ν zu finden, müssen wir aus der Gleichung

$$\cos^2 \nu = \frac{\varDelta(\beta, \gamma, \ldots \lambda, \mu)}{\varDelta(\beta, \gamma, \ldots \varkappa, \lambda)}$$

μ eliminieren. Wegen $\varDelta(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda, \mu) = 0$ giebt uns die Relation (2)

$$\varDelta(\alpha, \beta, \ldots \varkappa, \lambda)\ \varDelta(\beta, \gamma, \ldots \lambda, \mu) = \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma \ldots \cos^2 \lambda \cos^2 \mu.$$

Mittelst (6) bekommen wir also

$$\cos^2 \nu = \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma \ldots \cos^2 \lambda}{\varDelta(\alpha, \beta, \ldots \varkappa, \lambda)\ \varDelta(\beta, \gamma, \ldots \varkappa, \lambda)} \cdot \frac{\varDelta(\alpha, \beta, \ldots \varkappa, \lambda)}{\varDelta(\alpha, \beta, \ldots \varkappa)},$$

oder endlich

$$\left.\begin{aligned} \cos^2 \nu &= \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma \ldots \cos^2 \lambda}{\varDelta(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varkappa)\ \varDelta(\beta, \gamma, \ldots \varkappa, \lambda)}, \\ \cos^2 \nu &= \frac{\varDelta(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varkappa, \lambda)\ \varDelta(\beta, \gamma, \ldots \varkappa)}{\varDelta(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varkappa)\ \varDelta(\beta, \gamma, \ldots \varkappa, \lambda)}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Zum Schlusse wollen wir den Grund der Periodicität der Argumente in den Polynomen selbst aufsuchen. Es sei n die gerade Dimensionszahl eines Orthoschems $S(1\,2\,3 \ldots n)$ und ein $(n+1)$-tes Polynom durch die Bedingung $\varDelta(1\,2 \ldots n\,(n+1)) = 0$ bestimmt, sodass das perissosphärische Orthoschem $S(1\,2\,3 \ldots n\,(n+1))$ verschwindet. Wenn man nun auch $n+1$ orthogonale Variabeln gebraucht, so kann man doch ihr System immer so einrichten, dass die n ersten Polynome nur die n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ enthalten. Wegen des Verschwindens der Determinante muss aber das Polynom p_{n+1} von den vorigen abhängen und kann daher x_{n+1} auch nicht enthalten. Aus $\varDelta(2\,3 \ldots n\,(n+1)\,(n+2)) = 0$ wird das Gleiche in Beziehung auf p_{n+2} geschlossen, und so fort. Da also die Variable x_{n+1} nirgends vorkommt, so hat die Betrachtung sich auf die n-Sphäre zu beschränken. — Wie im Eingang zu § 25 gezeigt ward, kann man bei der Darstellung eines Orthoschems die Variabeln immer so wählen, dass das erste Grenzpolynom nur eine, jedes folgende nur zwei Variabeln und zwar immer eine neue enthält. Wendet man dieses auf das verschwindende Orthoschem $S(1\,2\,3 \ldots n\,(n+1))$ an, so erhalten die Polynome $p_1, p_2, \ldots p_n$ dieselben Ausdrücke wie in § 25, dagegen wird $p_{n+1} = -x_n$. Da ferner $S(2\,3\,4 \ldots n\,(n+1)\,(n+2)) = 0$ sein soll, so hat man

ein neues Polynom p_{n+2} zu suchen, welches zu $p_2, p_3, \ldots p_n$ orthogonal ist; es ist durch diese Bedingungen vollkommen bestimmt und wird im allgemeinen alle Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ enthalten. Soll ein folgendes Polynom, ohne eine neue Variable aufzunehmen, zu $p_3, p_4, \ldots p_n, p_{n+1}$ orthogonal sein, so erfüllt nur p_1 diese Bedingung, sodass man $S(3\,4 \ldots n\,(n+1)\,(n+2)\,1) = 0$ hat. Wie dies weiter geht, ist klar; wir sehen daraus, dass auch die Polynome $p_1, p_2, \ldots p_n, p_{n+1}, p_{n+2}$ eine Periode bilden.

§ 28. *Anwendung des vorigen auf die Bestimmung artiosphärischer Orthoscheme in einigen besondern Fällen.*

Es ist leicht zu beweisen, dass überhaupt

$$\Delta(\alpha, \ldots \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \Theta, \ldots \lambda) = \Delta(\alpha, \ldots \delta, \varepsilon)\ \Delta(\eta, \Theta, \ldots \lambda) - \cos^2\zeta\ \Delta(\alpha, \ldots \delta)\,.\,\Delta(\Theta, \ldots \lambda) \quad (1)$$

ist. Denn nehmen wir an, die Formel sei bis zu einer gewissen Zahl von Argumenten $\eta, \Theta, \ldots \varkappa, \lambda$, welche auf ζ folgen, bereits bewiesen, und denken uns die vorliegende Gleichung (1) noch einmal mit Weglassung des letzten Arguments λ geschrieben, multiplizieren diese mit $-\cos^2\mu$ und fügen sie der vorigen hinzu, so ergiebt sich offenbar eine ähnliche Gleichung, worin μ als letztes Argument erscheint, und daher die Zahl der auf ζ folgenden Argumente $\eta, \Theta, \ldots \varkappa, \lambda, \mu$ um 1 grösser ist als vorhin. Da nun die Richtigkeit der Formel (1) für ein einziges auf ζ folgendes Argument η leicht einzusehen ist, so ist dieselbe allgemein bewiesen.

I. Vergegenwärtigen wir uns wieder die in § 27 behandelte Periode von $2n+2$ Argumenten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \varkappa, \lambda, \mu, \nu, \xi$ und verlangen, dass das $(n+2)$-te Orthoschem mit dem ersten $S(\alpha, \beta, \ldots \varkappa, \lambda)$ direkt zusammenfalle, so ist klar, dass auch die Periode der Argumente aus zwei direkt kongruenten Hälften bestehen muss; sie sei

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varepsilon, \zeta, \eta, \Theta, \alpha, \beta, \gamma, \ldots \varepsilon, \zeta, \eta, \Theta.$$

Von den drei Bedingungsgleichungen, denen diese Argumentenreihe genügen muss; untersuchen wir nur die erste

$$\Delta(\alpha, \beta, \ldots \zeta, \eta, \Theta, \alpha, \beta, \ldots \varepsilon, \zeta) = 0,$$

mit der Absicht, sie nach $\cos^2\Theta$ aufzulösen. Wir finden nach (1)

$$\Delta(\alpha, \beta, \ldots \zeta) \left\{ \Delta(\alpha, \beta, \ldots \zeta, \eta) - \cos^2\Theta\ \Delta(\beta, \ldots \varepsilon, \zeta) \right\} = 0,$$

also, da $\Delta(\alpha, \beta, \ldots \zeta)$ nicht verschwinden darf,

$$\Delta(\alpha, \beta, \ldots \zeta, \eta) - \cos^2\Theta\ \Delta(\beta, \ldots \varepsilon, \zeta) = 0. \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Machen wir hier $\cos^2 \eta$ frei, so bekommen wir

$$\Delta(\alpha, \beta, \ldots \varepsilon, \zeta) - \cos^2 \Theta\, \Delta(\beta, \ldots \varepsilon, \zeta) - \cos^2 \eta\, \Delta(\alpha, \beta, \ldots \varepsilon) = 0,$$

oder auch

$$\Delta(\Theta, \alpha, \beta, \ldots \varepsilon, \zeta) - \cos^2 \eta\, \Delta(\alpha, \beta, \ldots \varepsilon) = 0,$$

d. h. die Gleichung (2) koincidiert mit einer ähnlichen, worin die periodische Argumentenreihe um ein Glied zurückgeschoben erscheint. Die eine und selbe Gleichung (2) kann also im ganzen unter $n+1$ Gestalten erscheinen, welche durch eine Art von Kreisbewegung der $n+1$ Argumente in einander übergehen. Da nun die drei Bedingungsgleichungen, von denen im Anfang gesprochen wurde, nichts anders als die resp. mit den Faktoren $\Delta(\alpha, \beta, \ldots \zeta)$, $\Delta(\beta, \gamma, \ldots \zeta, \eta)$, $\Delta(\gamma, \ldots \eta, \Theta)$ multiplizierte Gleichung (2) sind, so sind sie alle zugleich mit dieser Gleichung (2) erfüllt. Dass die Gleichung (2) von der Wahl des Anfangs der Argumentenreihe unabhängig ist, kann auch unmittelbar eingesehen werden, wenn man ihr die Form

$$2 \cos\alpha \cos\beta \ldots \cos\eta \cos\Theta + \begin{vmatrix} 1 & -\cos\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\cos\Theta \\ -\cos\alpha & 1 & -\cos\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\beta & 1 & -\cos\gamma & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\cos\zeta & 1 & -\cos\eta \\ -\cos\Theta & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\cos\eta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

giebt. Damit nun von dem Gesagten eine Anwendung auf die Bestimmung der orthoschematischen Funktion

$$f_{2n}(\alpha, \beta, \ldots \varepsilon, \zeta, \eta, \Theta, \alpha, \beta, \ldots \varepsilon)$$

möglich sei (ein Ausdruck durch artiosphärische Funktionen niedrigerer Ordnung), so müssen uns die bekannten Ausdrücke für die Summe je zweier successiver Orthoscheme nach einer Reihe wechselnder Additionen und Subtraktionen auf eine S u m m e, nicht auf einen Unterschied, des ersten und $(n+2)$-ten Orthoschems führen; deshalb muss n gerade sein, d. h. die Dimensionszahl der Sphäre muss durch 4 teilbar sein.

Für die Tetrasphäre braucht man drei Argumente α, β, γ; die Relation (2), welche sie verbindet, wird

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Das zweite Beispiel der Formel (1) in § 26 giebt

$$0 - f(\alpha, \beta, \gamma, \alpha) = f(\beta, \gamma, \alpha) + f(\alpha) f(\alpha) - f(\alpha, \beta, \gamma) - 2 f(\alpha) - f(\beta) - f(\gamma) - 2,$$

oder:

$$f(\alpha, \beta, \gamma) + f(\beta, \gamma, \alpha) = -f(\alpha)^2 + 2f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) - 2,$$
$$f(\beta, \gamma, \alpha) + f(\gamma, \alpha, \beta) = -f(\beta)^2 + f(\alpha) + 2f(\beta) + f(\gamma) - 2,$$
$$f(\gamma, \alpha, \beta) + f(\alpha, \beta, \gamma) = -f(\gamma)^2 + f(\alpha) + f(\beta) + 2f(\gamma) - 2;$$

hieraus folgt:

$$2f(\alpha, \beta, \gamma) = f(\beta)^2 - (1 - f(\alpha))^2 - (1 - f(\gamma))^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Für die Oktasphäre braucht man fünf Argumente $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$; die Relation (2) wird:

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - \cos^2\delta - \cos^2\varepsilon + \cos^2\alpha\cos^2\gamma + \cos^2\beta\cos^2\delta + \cos^2\gamma\cos^2\varepsilon$$
$$+ \cos^2\delta\cos^2\alpha + \cos^2\varepsilon\cos^2\beta = 0.$$

Diese Gleichung hat das Eigentümliche, dass, wenn ihr $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ genügen, dann auch die Komplemente genügen werden. Man bemerke aber, dass $\Delta\left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} - \beta\right) = -\Delta(\alpha, \beta)$ ist. Wenn also eine Lösung für das Orthoschem taugt, so giebt die mit den Komplementen ein unmögliches Orthoschem. Um Raum zu gewinnen, lasse ich in der folgenden Formel die Trennungszeichen zwischen den Argumenten einer Funktion weg.

$$f(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\alpha\,\beta) = (1 - f(\gamma))\,f(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon) + (1 - f(\varepsilon))\,f(\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\alpha\,\beta)$$
$$+ f(\delta)\,f(\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\alpha) - \frac{1}{2}f(\alpha\,\beta\,\gamma)^2 - \frac{1}{2}f(\varepsilon\,\alpha\,\beta)^2 - \frac{1}{2}f(\gamma\,\delta\,\varepsilon)^2$$
$$+ \frac{1}{2}f(\beta\,\gamma\,\delta)^2 + \frac{1}{2}f(\delta\,\varepsilon\,\alpha)^2 + \left(f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)\right)f(\alpha\,\beta\,\gamma)$$
$$+ \left(f(\varepsilon) + f(\alpha) + f(\beta)\right)f(\varepsilon\,\alpha\,\beta) + \left(f(\gamma) + f(\varepsilon)\right)f(\gamma\,\delta\,\varepsilon)$$
$$- f(\delta)\left(f(\beta\,\gamma\,\delta) + f(\delta\,\varepsilon\,\alpha)\right) + f(\gamma)\,f(\varepsilon)\left(f(\alpha) + f(\beta)\right) - 2f(\alpha\,\beta\,\gamma)$$
$$- 2f(\varepsilon\,\alpha\,\beta) - 2f(\gamma\,\delta\,\varepsilon) + f(\delta)^2 - \left(f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(\varepsilon)\right)^2$$
$$+ 5\left(f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(\varepsilon)\right) - 7.$$

Setzt man alle fünf Argumente einander gleich, so wird die einzig mögliche Lösung $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{5}}\right)$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctang} 2$; der Ausdruck für die oktosphärische Funktion reduziert sich auf

$$f_8 = -f_2\,f_6 - \frac{1}{2}f_4^2 + 2f_6 + 6f_2f_4 - 2f_2^3 - 6f_4 - 15f_2^2 + 20f_2 - 7.$$

II. Sollten in der Periode der $2n$-sphärischen Funktionen zwei successive verkehrt zusammenfallen, z. B. die erste und die zweite, so muss das $2n$-te Argument dem ersten, das $(2n - 1)$-te dem zweiten, u. s. f., endlich das $(n + 1)$-te dem n-ten gleich sein.

Die Argumente seien demnach $\beta, \gamma, \ldots \eta, \Theta, \Theta, \eta, \ldots \gamma, \beta$. Dem ersten β gehe α voran. Es müssen dann die zwei Gleichungen

$$\Delta(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \eta, \Theta, \Theta, \eta, \ldots \gamma) = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

$$\Delta(\beta, \gamma, \ldots \eta, \Theta, \Theta, \eta, \zeta, \ldots \gamma, \beta) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

erfüllt sein. Wird die erste so geschrieben

$$\Delta(\gamma, \delta, \ldots \eta, \Theta, \Theta, \eta, \ldots \beta, \alpha) = 0,$$

so ist sie gerade die dritte Bedingungsgleichung. Es bleiben also nur zwei Bedingungen zu erfüllen; und das $(2n+1)$-te und $(2n+2)$-te Argument sind einander gleich. Man hat also im ganzen nur $n+1$ verschiedene Argumente $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \zeta, \eta, \Theta$, wovon zwei, z. B. α und Θ, in Funktion der $n-1$ übrigen $\beta, \gamma, \ldots \zeta, \eta$ bestimmt sind. Die Gleichung (6) wird nach (1)

$$\Delta(\beta, \gamma, \ldots \eta, \Theta)\, \Delta(\eta, \zeta, \ldots \gamma, \beta) - \cos^2\Theta\, \Delta(\beta, \gamma, \ldots \eta)\, \Delta(\zeta, \ldots \gamma, \beta)$$
$$= \Delta(\beta, \gamma, \ldots \zeta, \eta) \left\{ \Delta(\beta, \gamma, \ldots \zeta, \eta) - 2\cos^2\Theta\, \Delta(\beta, \gamma, \ldots \zeta) \right\} = 0;$$

also

$$\cos^2\Theta = \frac{\Delta(\beta, \gamma, \ldots \zeta, \eta)}{2\,\Delta(\beta, \gamma, \ldots \zeta)}, \quad -\cos 2\,\Theta = \cos^2\eta\, \frac{\Delta(\beta, \gamma, \ldots \varepsilon)}{\Delta(\beta, \gamma, \ldots \varepsilon, \zeta)},$$

und hiernach durch blosse Umkehrung der Argumentenreihe

$$\cos^2\alpha = \frac{\Delta(\beta, \gamma, \ldots \zeta, \eta)}{2\,\Delta(\gamma, \ldots \zeta, \eta)}, \quad -\cos 2\,\alpha = \cos^2\beta\, \frac{\Delta(\delta, \ldots \zeta, \eta)}{\Delta(\gamma, \delta, \ldots \zeta, \eta)},$$

was man auch auf einem etwas längeren Wege durch Substitution des schon gefundenen Θ in der Gleichung (5) erhält.

Für die Tetrasphäre ist die Periode der Argumente $\alpha\,\beta\,\gamma\,\gamma\,\beta\,\alpha$; die Bedingungen sind $-\cos 2\,\alpha = -\cos 2\,\gamma = \cos^2\beta$, also $\alpha = \gamma$, und die Periode $\alpha\,\beta\,\alpha\,\alpha\,\beta\,\alpha$ ist nur ein besondererer Fall der schon oben behandelten Periode $\alpha\,\beta\,\gamma\,\alpha\,\beta\,\gamma$, für welche die Gleichungen (3) und (4) bestehen.

Für die Hexasphäre ist die Periode der Argumente $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\delta\,\gamma\,\beta\,\alpha$; die Bedingungen sind

$$-\cos 2\,\alpha = \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\gamma}, \quad -\cos 2\,\delta = \frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\beta};$$

unter diesen ist:

$$f(\beta\,\gamma\,\delta\,\delta\,\gamma) = -f(\beta)\,f(\beta\,\gamma\,\delta) + f(\beta\,\gamma\,\delta) + f(\gamma\,\delta\,\delta) + f(\beta)\,f(\delta)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(f(\beta) + f(\gamma)\right)^2 - 2\left(f(\beta) + f(\gamma) + f(\delta)\right) + \frac{5}{2},$$
$$f(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\delta) = -f(\alpha)\,f(\gamma\,\delta\,\delta) - f(\beta)\,f(\beta\,\gamma\,\delta) - f(\gamma)\,f(\alpha\,\beta\,\gamma)$$
$$+ f(\alpha\,\beta\,\gamma) + f(\gamma\,\delta\,\delta) + 2\,f(\alpha)\,f(\delta) + f(\alpha)\,f(\gamma) - \frac{1}{2}f(\beta)^2 - \frac{1}{2}f(\gamma)^2$$
$$- 2\,f(\alpha) - 2\,f(\gamma) - 2\,f(\delta) + \frac{5}{2};$$

die Ausdrücke für die zwei noch übrigen Orthoscheme ergeben sich aus diesen durch Vertauschung von α, β, γ, δ mit δ, γ, β, α.

Sind alle Argumente einander gleich, so folgt aus $-\cos 2\,\alpha = \operatorname{cotg}^2 \alpha$ die Formel $\cos 2\,\alpha = 1 - \sqrt{2}$ oder $\cos \alpha = 1 : 2 \cos \frac{\pi}{8}$, und man hat

$$f_6 = -f_2\,f_4 + 2\,f_4 + 3\,f_2^2 - 6\,f_2 + \frac{5}{2}\,.$$

Für die Octosphäre sei die Periode der Argumente $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\varepsilon\,\delta\,\gamma\,\beta\,\alpha$,

$$-\cos 2\,\alpha = \frac{\cos^2\beta\,\sin^2\delta}{\sin^2\gamma - \cos^2\delta}, \qquad -\cos 2\,\varepsilon = \frac{\sin^2\beta\,\cos^2\delta}{\sin^2\beta - \cos^2\gamma}\,.$$

Man findet dann zunächst einen Ausdruck für $f(\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\varepsilon\,\delta\,\gamma)$ und aus diesem Ausdrucke für $f(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\varepsilon\,\delta)$ und $f(\alpha\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\varepsilon)$, von denen ich nur den letzten, der sich durch Symmetrie auszeichnet, hersetzen will:

$$f(\alpha\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\varepsilon) = -f(\delta)\,f(\alpha\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta) - f(\beta)\,f(\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\varepsilon) - f(\gamma)\,f(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon)$$
$$-f(\alpha\,\alpha\,\beta)\,f(\delta\,\varepsilon\,\varepsilon) + f(\alpha\,\beta\,\gamma)\,f(\gamma\,\delta\,\varepsilon) - \frac{1}{2}f(\beta\,\gamma\,\delta)^2 + f(\alpha\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta) + f(\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\varepsilon)$$
$$+ f(\alpha\,\alpha\,\beta)\left(2f(\varepsilon) + f(\delta)\right) + f(\delta\,\varepsilon\,\varepsilon)\left(2f(\alpha) + f(\beta)\right) - f(\beta\,\gamma\,\delta)\left(f(\beta) + f(\delta)\right)$$
$$-f(\gamma)\left(f(\alpha\,\beta\,\gamma) + f(\gamma\,\delta\,\varepsilon)\right) + f(\alpha)\,f(\delta)^2 + f(\varepsilon)\,f(\beta)^2 - 2\,f(\alpha\,\alpha\,\beta) - 2\,f(\delta\,\varepsilon\,\varepsilon)$$
$$-2f(\beta\,\gamma\,\delta) - 4\,f(\alpha)f(\varepsilon) - 4\,f(\alpha)\,f(\delta) - 4\,f(\varepsilon)f(\beta) + f(\gamma)^2$$
$$+ \left(f(\beta) + f(\delta)\right)^2 + 5\left(f(\alpha) + f(\varepsilon) + f(\beta) + f(\delta)\right) - 7.$$

III. Wir betrachten noch den Fall besonders, wo alle Argumente einander gleich sind. Bedeutet α das Argument, so hat man

$$f_n = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4\cos^2\alpha}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4\cos^2\alpha}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{1 - 4\cos^2\alpha}},$$

und, wenn man $\cos\alpha = \frac{1}{2\cos\Theta}$ setzt,

$$\Delta_n = \frac{\sin(n+1)\Theta}{(2\cos\Theta)^n \sin\Theta}.$$

Sollen $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \ldots \Delta_{n-1}$ sämtlich positiv, aber $\Delta_n = 0$ sein, so ist $\Theta = \frac{\pi}{n+1}$ die einzig mögliche Lösung

Für ein verschwindendes Θ ist

$$\Delta_n = \frac{n+1}{2^n}, \qquad \alpha = \frac{\pi}{3};$$

also

$$\Delta_{n+1}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \cdots \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{n+1}{2^n} - \cos^2\frac{\pi}{4}\cdot\frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n},$$

$$\Delta_{n+2}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \cdots \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2^n} - \cos^2\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2^{n-1}} = 0.$$

§ 29. *Ueber das Orthoschem* $f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \cdots \frac{\pi}{3}, \alpha, 2\alpha, \alpha, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \cdots \frac{\pi}{3}\right)$.

Satz. Wenn das m-te Argument eines n-sphärischen Orthoschems 2α, das vorhergehende und nachfolgende α, alle übrigen aber $\frac{\pi}{3}$ sind, so ist das Orthoschem $\binom{n}{m}$ mal so gross, wie wenn sein erstes Argument α und alle übrigen $\frac{\pi}{3}$ sind.

Beweis. Setzt man $f(1\,2\,3\ldots m\,(m+1)\ldots n) = f_n^m(\alpha)$, wenn $(1\,2) = (2\,3) = (3\,4) = \cdots = ((m-2)\,(m-1)) = \frac{\pi}{3}$, $((m-1)\,m) = \alpha$, $(m\,(m+1)) = 2\alpha$, $((m+1)\,(m+2)) = \alpha$, $((m+3)\,(m+4)) = ((m+4)\,(m+5)) = \cdots = ((n-1)\,n) = \frac{\pi}{3}$ ist, und insbesondere $f\left(\alpha, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \cdots \frac{\pi}{3}\right) = f_n^0(\alpha)$, $f\left(2\alpha, \alpha, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \cdots \frac{\pi}{3}\right) = f_n^1(\alpha)$, so hat man zunächst

$$f_n^{n-m}(\alpha) = f_n^m(\alpha),$$

weil die Ordnung der Grenzpolynome eines Orthoschems auch umgekehrt werden darf. Wenn ferner der Kürze wegen

$$\cos a = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}$$

gesetzt wird, so findet man leicht

$$
\begin{aligned}
f\left(\overline{(m-1)\,m},\, 1\,2\,3\ldots(m-2)\,(m+1)\,(m+2)\ldots n\right) &= f_{n-2}^{m-2}(\alpha),\\
f\left(\overline{m\,(m+1)},\, 1\,2\,3\ldots(m-1)\,(m+2)\,(m+3)\ldots n\right) &= f_{n-2}^{m-1}(\alpha),\\
f\left(\overline{(m+1)\,(m+2)},\, 1\,2\,3\ldots m\,(m+3)\,(m+4)\ldots n\right) &= f_{n-2}^{m}(\alpha);
\end{aligned}
$$

und hieraus

$$d f_n^m(\alpha) = \left\{ f_{n-2}^{m-2}(\alpha) + 2\, f_{n-2}^{m-1}(\alpha) + f_{n-2}^{m}(\alpha) \right\} d f(\alpha). \;\ldots\ldots\; (1)$$

Für $n = m$ ist $f_m^m(\alpha) = f_m^0(\alpha)$; für $n = m+1$ ist $f_{m+1}^m(\alpha) = f_{m+1}^1(\alpha)$; wir müssen also zuerst $f_n^1(\alpha)$ zu reduzieren trachten. Die Gleichung (1) giebt

$$d f_n^1(\alpha) = \left\{ 2\, f_{n-2}^0(\alpha) + f_{n-2}^1(\alpha) \right\} d f(\alpha). \;\ldots\ldots\; (2)$$

Für $n = 3$ ist $f_3'(\alpha) = f(2\,\alpha) + f(\alpha) - 1 = 3 f(\alpha) - 1$, hingegen $f_3^0(\alpha) = f(\alpha) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1 = f(\alpha) - \frac{1}{3}$; also

$$f_3^1(\alpha) = 3\, f_3^0(\alpha).$$

Für $n = 4$ ist $d f_4^1(\alpha) = \left\{ 2 f(\alpha) + f(2\,\alpha) \right\} d f(\alpha) = 4 f(\alpha)\, d f(\alpha)$; weil aber $d f_4^0(\alpha) = f(\alpha)\, d f(\alpha)$ ist, so folgt hieraus

$$f_4^1(\alpha) = 4\, f_4^0(\alpha).$$

Wäre nun der Satz

$$f_m^1(\alpha) = m\, f_m^0(\alpha) \;\ldots\ldots\; (3)$$

für $m = n - 2$ schon bewiesen, so würde aus (2) folgen $d f_n^1(\alpha) = n f_{n-2}^0(\alpha)\, d f(\alpha) = n\, d f_n^0(\alpha)$, und hieraus durch Integration

$$f_n^1(\alpha) = n\, f_n^0(\alpha).$$

Da aber die Gleichung (3) für $m = 3$ und $m = 4$ schon bewiesen ist, so gilt sie allgemein.

Wir kommen jetzt zur Gleichung (1) zurück. Wäre der Satz

$$f_i^m(\alpha) = \binom{i}{m} f_i^0(\alpha)$$

für $i = n - 2$ schon zugegeben, so würde aus der Gleichung (1) folgen

$$d\,f_n^m\,(\alpha) = \left\{\binom{n-2}{m-2} + 2\binom{n-2}{m-1} + \binom{n-2}{m}\right\} d\,f_n^0\,(\alpha),$$

also durch Integration

$$f_n^m\,(\alpha) = \binom{n}{m} f_n^0\,(\alpha),$$

d. h. der vorige Satz würde auch für $i = n$ gelten. Nach dem frühern ist aber wirklich

$$f_m^m\,(\alpha) = f_m^0\,(\alpha) = \binom{m}{m} f_m^0\,(\alpha),\; f_{m+1}^m\,(\alpha) = f_{m+1}^1\,(\alpha) = \binom{m+1}{m} f_{m+1}^0\,(\alpha),$$

d. h. der fragliche Satz gilt für $i = m$ und $i = m + 1$. Also gilt er überhaupt.

Wir machen nun von dem bewiesenen Satz folgende spezielle Anwendungen.

1. Fall, wo $\alpha = \frac{\pi}{3}$. — Es ist nach dem vorigen Satz $f_n^1\left(\frac{\pi}{3}\right) = n\,f_n^0\left(\frac{\pi}{3}\right)$; da aber in beiden Orthoschemen die ersten Argumente $\frac{2\pi}{3}$ und $\frac{\pi}{3}$, also supplementär sind, alle folgenden hingegen übereinstimmen, so ist nach dem am Ende von § 23 Gesagten

$$f_n^1\left(\frac{\pi}{3}\right) + f_n^0\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\,f_n^0\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\,f_{n-1}^0\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

oder

$$f_n^0\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{n+1} f_{n-1}^0\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

und, da $f_2^0\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3} = \frac{2\,.\,2}{3\,.\,2}$ ist, endlich

$$f_n\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \ldots \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n+1)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

2. Fall, wo $\alpha = \frac{\pi}{4}$. — Es ist $f_n^1\left(\frac{\pi}{4}\right) = n\,f_n^0\left(\frac{\pi}{4}\right)$ und nach § 23 zugleich $f_n\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \ldots \frac{\pi}{3}\right) = f_{n-1}^0\left(\frac{\pi}{4}\right)$; also $f_n^0\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{n} f_{n-1}^0\left(\frac{\pi}{4}\right)$, und da $f_2^0\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ ist, allgemein

$$f_n\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \ldots \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots.\,n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Wenn man rechte Argumente ausschliesst, so sind, für alle Dimensionszahlen über 4, die Formeln (4) und (5) wahrscheinlich die einzigen, worin sowohl alle Argumente mit dem Kreisumfang kommensurabel, als auch die Werte der orthoschematischen Funktionen rationale Zahlen sind. Der Beweis hiervon scheint mir aber sehr schwer. Die

genannten Formeln sind übrigens leicht mittelst der regulären Polyscheme der n-fachen Totalität zu verifizieren, indem man dieselben auf eine konzentrische Sphäre projiziert. Bei der regulären Pyramide zerfällt dann das sphärische Kontinuum in $n+1$ reguläre Plagioscheme, deren jedes alle seine Argumente gleich $\frac{2\pi}{3}$ hat, und daher in $1 . 2 . 3 \ldots n$ gleiche Orthoscheme $S_n\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \cdots \frac{\pi}{3}\right)$ zerfällt. Dadurch ist die Formel (4) verifiziert. Beim Reciprok-Paralleloschem (3, 3, 3, . . . 3, 4) wird das sphärische Kontinuum in 2^n reguläre Plagioscheme mit dem gemeinschaftlichen Wert $\frac{\pi}{2}$ aller Argumente geteilt; jedes entspricht also gerade der Einheit der sphärischen Funktion, und da es nun in $1 . 2 . 3 \ldots n$ gleiche Orthoscheme $S_n\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \cdots \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$ zerfällt, so ist hierdurch auch die Formel (5) verifiziert.

Auch bei der Tetrasphäre weiss ich keine solche Formeln mit kommensurabeln Argumenten und rationalem Funktionswert anzugeben, die nicht mit den regulären Polyschemen der vierfachen Totalität im Zusammenhang wären. Da für diese Dimensionszahl die grösste Mannigfaltigkeit stattfindet, so ist ihr der folgende Paragraph eigens gewidmet.

§ 30. *Rationale tetrasphärische Orthoscheme, deren Argumente rationale Teile von π sind.*

Aus den allgemeinen Formeln (4) und (5) des vorigen Paragraphen folgen sogleich:

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{15}, \quad (1) \qquad f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{24}. \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Die für die Periode $\alpha\, \beta\, \gamma\, \alpha\, \beta\, \gamma$ bei der Tetrasphäre in § 28 gefundene Bedingungsgleichung (3), $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, hat, abgesehen von Permutationen, nur zwei rationale Lösungen: $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ und $\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right)$. Jene giebt ausser (2) noch

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{72}; \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

diese giebt

$$f\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{225}, \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

$$f\left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{45}, \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}\right) = \frac{19}{225}. \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Da nach § 23 die Gleichung

$$f\left(\frac{4\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right) = 2 f\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{14}{15}$$

stattfindet, so folgt aus (6):

$$f\left(\frac{4\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{191}{225} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

Durch Anwendung von § 29 ergeben sich aus (4) und (7) die Formeln

$$f\left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{900}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

$$f\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{191}{900}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9)$$

$$f\left(\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{150}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

$$f\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{191}{150}.$$

Nimmt man im letzten Orthoschem das zweite Polynom entgegengesetzt, so erhält man

$$f\left(\frac{3\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{8}{5} - \frac{191}{150} = \frac{49}{150};$$

nimmt man hier wieder das erste Polynom entgegengesetzt, so erhält man

$$f\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{11}{150}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (11)$$

Mit Weglassung von (7) hat man also im ganzen 10 kommensurable tetrasphärische Orthoscheme mit kommensurabeln, im ersten Quadranten befindlichen Argumenten. Ich zweifle sehr, ob es ausser diesen noch andere gäbe, und diese stehen alle mit den regulären Polyschemen (3, 3, 3), (3, 3, 4), (3, 3, 5), (3, 4, 3) im Zusammenhang. Wendet man die in § 27 gezeigte Periodenbildung auf die vorliegenden Funktionswerte an, um daraus neue zu finden, so bekommen diese inkommensurable Argumente.

Um überhaupt keinen Fall zu verschweigen, wo orthoschematische Funktionen finite Ausdrücke haben, wollen wir auch noch mit der Periodenbildung zunächst an der Tetrasphäre das Mögliche versuchen.

Setzt man $\frac{\pi^2}{4}\, d f(\alpha, \beta, \gamma) = a\, d\alpha + b\, d\beta + c\, d\gamma$, so ist

$$\cos a = \frac{\sin\alpha\cos\gamma}{\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta}}, \quad \cos b = \frac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta}\sqrt{\sin^2\beta - \cos^2\gamma}}, \quad \cos c = \frac{\cos\alpha\sin\gamma}{\sqrt{\sin^2\beta - \cos^2\gamma}}.$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit den Relationen (6) und (7) in § 27, so ergiebt sich die Periode $\alpha, \beta, \gamma, \frac{\pi}{2} - a, b, \frac{\pi}{2} - c$. Demnach sind oben schon Perioden mit lauter kommensurabeln Gliedern vorgekommen, nämlich: 1. $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$, wohin die Formeln (2) und (3) gehören; 2. $\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}$, wohin (4), (5) und (6), und 3. $\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$, wohin (10) und (11) gehören. Die Argumente in (1) und (8) geben dagegen Perioden, worin inkommensurable Glieder sich finden; wird $\cos 2\lambda = \frac{1}{4}$ gesetzt, so sind sie: $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \lambda, 2\lambda, \lambda$ und $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3} - \lambda, \frac{2\pi}{3} - \lambda$; man erhält daraus die neuen Funktionswerte:

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \lambda\right) = -\frac{2}{15} + \frac{1}{3}\frac{2\lambda}{\pi},\; f\left(\frac{\pi}{3}, \lambda, 2\lambda\right) = -\frac{8}{15} + \frac{4}{3}\cdot\frac{2\lambda}{\pi},\; f(\lambda, 2\lambda, \lambda) = -\frac{4}{5} + 2\cdot\frac{2\lambda}{\pi};$$

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3} - \lambda\right) &= \frac{43}{300} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2\lambda}{\pi},\\
f\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, -\lambda, \frac{2\pi}{3} - \lambda\right) &= \frac{391}{900} - \frac{2\lambda}{\pi},\\
f\left(\frac{\pi}{3} - \lambda, \frac{2\pi}{3} - \lambda, \frac{\pi}{5}\right) &= \frac{401}{900} - \frac{2\lambda}{\pi},\\
f\left(\frac{2\pi}{3} - \lambda, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{53}{300} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2\lambda}{\pi}.
\end{aligned}$$

§ 31. *Ueber das Orthoschem $f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \cdots \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \alpha, \alpha, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \cdots \frac{\pi}{3}\right)$ und einige mit diesem und dem in § 29 betrachteten in Beziehung stehende Sätze.*

Satz. Wenn in einer n-sphärischen orthoschematischen Funktion das $(m-1)$-te, m-te, $(m+1)$-te und $(m+2)$-te Argument der Reihe nach $\frac{\pi}{4}, \alpha, \alpha, \frac{\pi}{4}$, alle übrigen aber $\frac{\pi}{3}$ sind, so ist die Funktion $\binom{n-1}{m}$ mal so gross, wie wenn das erste Argument α, das zweite $\frac{\pi}{4}$ und alle folgenden $\frac{\pi}{3}$ sind.

Beweis. Wird die zuerst genannte Funktion mit $g_n^m(\alpha)$ bezeichnet, so muss folgerecht die zweite durch $g_n^0(\alpha)$ dargestellt werden. Setzt man

$$\cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2(2\sin^2\alpha - 1)}}$$

und lässt $f_n^m(\alpha)$ dasselbe bedeuten wie in § 29, so findet man

$$d\,g_n^m(\alpha) = \left\{f_{n-2}^{m-1}(\alpha) + f_{n-2}^m(\alpha)\right\} d\,f(\alpha),$$

also nach dem Satz des angeführten Paragraphen

$$d\,g_n^m(\alpha) = \left\{\binom{n-2}{m-1} + \binom{n-2}{m}\right\} f_{n-2}^0(\alpha)\,d\,f(\alpha) = \binom{n-1}{m} f_{n-2}^0(\alpha)\,d\,f(\alpha),$$

oder, da $d\,g_n^0(\alpha) = f_{n-2}^0(\alpha)\,d\,f(\alpha)$ ist, durch Integration

$$g_n^m(\alpha) = \binom{n-1}{m} g_n^0(\alpha),$$

was zu beweisen war

Die in § 30 behandelten Perioden $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}$ arc cos $\left(\frac{1}{4}\right)$, arc cos $\left(\frac{1}{4}\right)$, $\frac{1}{2}$ arc cos $\left(\frac{1}{4}\right)$ sind besondere Fälle zweier allgemeiner Perioden, welche so definiert werden:

1. Folgen $n-1$ Argumente, deren jedes gleich $\frac{\pi}{3}$ ist, auf einander, und man setzt $\cos 2\,\lambda = \frac{1}{n}$, so werden jene Argumente durch die drei darauf folgenden λ, $2\,\lambda$, λ zur Periode ergänzt.

2. Folgen $n-2$ Argumente $\frac{\pi}{3}$ und eines $\frac{\pi}{4}$ auf einander, und man setzt $\cos \mu = \sqrt{\frac{1}{n}}$, so werden jene Argumente durch μ, μ, $\frac{\pi}{4}$ zur Periode ergänzt.

Die Beweise hierfür sind aus § 28, III und § 27, (6) und (7) zu entnehmen.

Zur Bestimmung der Funktionen, welche diesen Perioden entsprechen, führen ausser dem Satz von § 29 und dem ersten dieses Paragraphen folgende Sätze.

I. Sind alle Argumente eines n-sphärischen Plagioschems $2\,\alpha$, dasselbe also regulär, so zerfällt es von seinem sphärischen Centrum aus in $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n$ Orthoscheme, deren jedes als erstes Argument α und die $n-2$ folgenden gleich $\frac{\pi}{3}$ hat und daher der Funktion $f_n^0(\alpha)$ entspricht.

Wird nun hierauf die Gleichung (1) des § 24 angewandt, so sind die dortigen

f_{2n+1} durch $(2\,n+1)!\, f_{2n+1}^0(\alpha)$
Σf_{2n-2i} „ $\binom{2\,n+1}{2\,n-2\,i}(2\,n-2\,i)!\, f_{2n-2i}^0(\alpha)$

zu ersetzen, wodurch man erhält

$$f^0_{2n+1}(\alpha) = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i A_i f^0_{2n-2i}(\alpha),$$

wenn die Koeffizienten A durch tang $x = \Sigma A_i x^{2i+1}$ definiert sind. Wenn also $\cos 2\lambda = \frac{1}{2n}$ ist, so hat man

$$f^0_{2n}(\lambda) = A_1 f^0_{2n-2}(\lambda) - A_2 f^0_{2n-4}(\lambda) + \cdots - (-1)^n A_n.$$

II. Sind die Stücke eines n-sphärischen regulären Polyschems nach dem Charakter $(3, 3 \ldots 3, 4)$ geordnet und alle Winkel zwischen je zwei angrenzenden Perischemen 2α, so zerfällt dasselbe von seinem sphärischen Centrum aus in 2^{n-1} congruente Plagioscheme; von den n Perischemen eines solchen bildet eines (die Basis) mit allen übrigen das Argument α, während je zwei von diesen zu einander orthogonal sind. Ein solches Plagioschem zerfällt daher von seiner Spitze aus in $(n-1)!$ Orthoscheme, bei deren jedem die zwei ersten Argumente α, $\frac{\pi}{4}$, die $n-3$ folgenden sämtlich $\frac{\pi}{3}$ sind. Das erwähnte Plagioschem, durch die n-sphärische Einheit gemessen, beträgt also

$$(n-1)!\; g^0_n(\alpha).$$

Wird nun hierauf der Satz des § 24 angewandt, so hat man

$$f_{2n+1} = (2n)!\, g^0_{2n+1}(\alpha),$$

$$\Sigma f_{2n-2i} = \binom{2n}{2n-2i-1}(2n-2i-1)!\, g^0_{2n-2i}(\alpha) + \binom{2n}{2n-2i}$$

$$= \frac{(2n)!}{(2i+1)!} g^0_{2n-2i}(\alpha) + \binom{2n}{2i}$$

zu setzen, und man erhält

$$g^0_{2n+1}(\alpha) = \sum_{i=0}^{i=n-1} (-1)^i A_i g^0_{2n-2i}(\alpha) + (-1)^n C_n,$$

wenn die Koeffizienten A und C durch die Gleichungen

$$\text{tang}\, x = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n x^{2n+1}, \qquad \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n x^{2n}$$

definiert sind.

Ist $\cos\mu = \sqrt{\frac{1}{2n}}$, so hat man

$$g^0_{2n}(\mu) = A_1 g^0_{2n-2}(\mu) - A_2 g^0_{2n-4}(\mu) + \cdots - (-1)^n C_n.$$

Für $n = 2$ wird $\mu = \frac{\pi}{3}$; also, da $A_1 = \frac{1}{3}$, $C_2 = \frac{5}{24}$ ist,

$$g_4^0\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3} f\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{5}{24} = \frac{1}{72},$$

was mit der Formel (3) in § 30 übereinstimmt.

§ 32. *Ueber sphärische Perischeme.*

Wir haben bisher nur solche Integrale $\int^{n} dx\,dy\,dz\ldots, (x^2+y^2+\cdots<1, p_1>0, p_1>0,\ldots)$ betrachtet, wo die Zahl der Grenzpolynome p der Dimensionszahl n gleich war. Es liegt uns also noch die Untersuchung der zwei Fälle ob, wo jene Zahl der homogenen Grenzpolynome kleiner oder grösser als n ist.

Der erste Fall bietet gar keine Schwierigkeit dar. Sind nämlich nur $n-m$ homogene und lineare Polynome $p_1, p_2, \ldots p_{n-m}$ mit n Variabeln gegeben, welche das Integral

$$\underset{\begin{pmatrix} x^2+y^2+\cdots<1 \\ p_1>0,\, p_2>0,\, \ldots\, p_{n-m}>0 \end{pmatrix}}{\int^{n} dx\,dy\,dz\ldots} = f_n(p_1, p_2, \ldots p_{n-m}) \cdot \underset{\begin{pmatrix} x^2+y^2+\cdots<1 \\ x>0,\; y>0, \ldots \end{pmatrix}}{\int^{n} dx\,dy\,dz\ldots}$$

begrenzen, so braucht man nur die Variabeln orthogonal so zu transformieren, dass die gegebenen Grenzpolynome nur $n-m$ derselben enthalten, und dann das in § 23 gezeigte Verfahren anzuwenden, um

$$f_n(p_1, p_2, \ldots p_{n-m}) = 2^m \cdot f_{n-m}(p_1, p_2, \ldots p_{n-m})$$

zu bekommen, wodurch das vorgelegte n-fache Integral mit bloss $n-m$ Grenzpolynomen auf eine $(n-m)$-sphärische plagioschematische Funktion zurückgeführt ist.

Im zweiten Fall, wo die Zahl der Grenzpolynome des n-fachen Integrals die Dimensionszahl n übertrifft, nennen wir das entsprechende Stück des n-sphärischen Kontinuums ein n-sphärisches Polyschem und denken uns die Anordnung seiner Perischeme in ähnlicher Weise gegeben wie bei einem linearen Polyschem der $(n-1)$-fachen Totalität. Wie nun dieses nach § 11 in lauter Pyramiden (n-Scheme) zerlegt werden kann, welche eine gegebene (innere) Lösung zur gemeinschaftlichen Spitze haben, gerade so kann auch jedes n-sphärische Polyschem in lauter Plagioscheme zerlegt werden.

Wenden wir jetzt § 22 an, um das Differential der n-sphärischen polyschematischen Funktion zu bestimmen, und messen der grössern Einfachheit wegen alle vorkommenden

Argumente oder Winkel je zweier Polynome durch den Quadranten, und die $(n-2)$-sphärischen Perischeme durch das $(n-2)$-sphärische Orthoschem mit lauter rechten Argumenten, so bekommen wir ein Aggregat von Produkten je eines plagioschematischen $(n-2)$-sphärischen Perischems und des Differentials des entsprechenden Arguments. Von den Grenzpolynomen jedes durch die Teilung entstandenen Plagioschems ist eines (p) mit dem gegebenen Polyschem gemein; die übrigen (q) scheiden dasselbe von den angrenzenden Plagioschemen; unter seinen $(n-2)$-sphärischen Perischemen können wir daher *innere*, welche je zwei Gleichungen, wie $q=0$, $q'=0$, und *äussere*, welche je zwei Gleichungen, wie $p=0$, $q=0$, entsprechen, unterscheiden. Die innern Perischeme sind dreien oder mehreren Polynomen q, worunter nur zwei unabhängige sind, gemein, weshalb die Summe der entsprechenden Argumente, wie z. B.

$$\angle(q,-q')+\angle(q',-q'')+\angle(q'',-q''')+\angle(q''',-q),$$

immer $=4$, und daher die Summe ihrer Differentiale gleich Null ist, so dass die betreffenden Glieder des Aggregats sich aufheben. Einem äussern Perischem $(p=0,\ q=0)$ entsprechen entweder zwei supplementäre Argumente $\angle(p,q)$ und $\angle(p,-q)$, deren Summe 2, das Differential also 0 ist, so dass die entsprechenden Glieder des Aggregats sich aufheben; oder, wenn q nur von zwei Polynomen p, p' abhängt, so entsprechen demselben äussern Perischem die Argumente $\angle(p,q)$ und $\angle(-q,p')$, deren Summe $\angle(p,p')$ ein Argument des gegebenen Polyschems ist. Denkt man sich die betreffende Reduktion des Aggregats vollzogen, so wird man im allgemeinen mehrere Produkte finden, welche dasselbe Differential eines Arguments des Polyschems zum Faktor haben, und dann wird die Summe der andern Faktoren ein ganzes $(n-2)$-sphärisches Perischem des gegebenen Polyschems sein, indem mehrere durch die Teilung entstandene plagioschematische Perischeme sich zu einem polyschematischen zusammensetzen. Eine solche Zusammensetzung findet indes erst für $n \geqq 5$ statt. Diese Andeutungen, welche zur Vermeidung von Weitläufigkeit die Stelle eines vollständigen Beweises ersetzen sollen, berechtigen zu dem Schlusse:

Das vollständige Differential eines n-sphärischen Polyschems ist gleich der Summe der Produkte aller seiner $(n-2)$-sphärischen Perischeme mit den Differentialen der entsprechenden Argumente.

Wären nun die Argumente wirklich alle unter sich unabhängig, so könnte man die $(n-2)$-sphärischen Perischeme als partielle Differentialkoeffizienten des n-sphärischen Polyschems betrachten. Dies gilt indes nur für die Tetrasphäre. Für die Trisphäre ist die Zahl der Argumente zu klein, für $n>4$ ist sie zu gross.

Ist nämlich m die Zahl der Winkel eines Kugelvielecks, so ist bekanntlich $2m-3$ die Zahl seiner wesentlichen Bestimmungsstücke. Ueberhaupt ist die Zahl der wesent-

lichen Data eines n-sphärischen Polyschems derjenigen für ein lineares Polyschem der $(n-1)$-fachen Totalität gleich, wenn die Anordnung der Perischeme bei beiden übereinstimmt. Wir wollen daher diese letzte Zahl zu berechnen suchen.

Ist g die Zahl aller $(n-1)$-fachen linearen Kontinuen, welche ein Polyschem der n-fachen Totalität begrenzen, und gehen h derselben durch ein erstes Eck, h' durch ein anderes, h'' durch ein drittes, u. s. f.; so sind von den h Polynomen, welche dem ersten Eck entsprechen, $h-n$ von den übrigen abhängig, was für $h-n$ Bedingungen zählt, u. s. f. Man wird sich bald überzeugen, dass keine von diesen Bedingungen überflüssig ist, und dass alle zusammen gerade hinreichen, um die Anordnung der Teile des Polyschems auszudrücken. Da nun n die Zahl der wesentlichen Elemente einer linearen Gleichung mit n Variabeln, und $\frac{1}{2}\,n\,(n+1)$ die Zahl der Data ist, durch welche irgend ein orthogonales System der Variabeln bestimmt wird, so bekommen wir

$$n\,g-(h-n)-(h'-n)-(h''-n)-\text{etc.}-\frac{1}{2}\,n\,(n+1)$$

als Zahl der wesentlichen Data des Polyschems, d. h.:

Die Zahl der Bestimmungsstücke eines linearen Polyschems der n-fachen Totalität ist gleich der n-fachen Summe der Zahl aller $(n-1)$-fachen Perischeme und derjenigen aller Ecken, vermindert um die Summe der Eckenzahlen eines jeden $(n-1)$-fachen Perischems und um $\frac{1}{2}\,n\,(n+1)$.

Wenn für $n=3$ die Zahlen der Ecken, Kanten und Vielecke eines Polyeders mit a_0, a_1, a_2 bezeichnet werden, so ist die Eckenzahl jedes Perischems oder Vielecks seiner Seitenzahl gleich, die Summe dieser Zahlen also auch gleich der Summe der Zahlen der durch jede Kante gehenden Perischeme, d. h. gleich $2\,a_1$; demnach ist die Zahl der Data des Polyeders gleich

$$3\,(a_0+a_2)-2\,a_1-6=3\,(a_0-a_1+a_2-2)+a_1=a_1.$$

Es folgt hieraus, dass ein räumliches Polyeder durch seine Kanten gerade bestimmt ist, ebenso ein tetrasphärisches Polyschem durch seine Seiten oder auch durch die Argumente, welche von je zweien sphärischen Vielecken an der gemeinschaftlichen Seite eingeschlossen werden.

Denken wir uns alle Kanten eines linearen Polyschems der vierfachen Totalität gegeben, so ist nach dem vorigen jedes der polyedrischen Perischeme vollständig bestimmt. Da aber jedes Vieleck zweien Polyedern gemein ist, so sind unter seinen Winkeln die, welche die Dreizahl übersteigen, doppelt bestimmt. Beschreibt man jetzt um irgend ein Eck des gegebenen Polyschems eine Tetrasphäre, so schneidet diese die nötigenfalls verlängerten Räume der in jenem zusammentreffenden Polyeder in einem

das Eck charakterisierenden tetrasphärischen Polyschem, in dessen Umschluss bereits alle Kugelvielecke vollständig bekannt sind. Daher ist nach dem obigen auch das tetrasphärische Polyschem selbst vollständig bestimmt, namentlich seine Argumente, welche mit denen des ursprünglichen linearen Polyschems zusammenfallen. Also ist auch dieses in allen seinen Teilen wenigstens hinreichend bestimmt.

Führt man auf eine Kante desselben einen normalen Raum, so schneidet derselbe die in der Kante zusammengrenzenden polyedrischen Perischeme in einem gewöhnlichen Körperwinkel, und dieser wird durch das vorhin beschriebene Verfahren von beiden die Kante begrenzenden Ecken her zweimal bestimmt. Inwiefern aber hier doppelte Bestimmung der Stücke des genannten Körperwinkels stattfindet, bin ich nicht imstande, zu entscheiden.

Die vorige Erörterung berechtigt uns nur, zu sagen, dass ein lineares Polyschem der vierfachen Totalität durch seine Kanten immer wenigstens bestimmt ist; und wir dürfen noch beifügen, dass, wenn die zweifachen Perischeme nicht lauter Dreiecke sind, dann die Zahl der Kanten diejenige seiner wesentlichen Bestimmungsstücke gewiss übertrifft. Es ist aber sehr wahrscheinlich, dass die Gleichheit beider Zahlen nur da stattfindet, wo sie unmittelbar evident ist, beim Pentaschem, und dass hingegen bei jedem andern linearen Polyschem der vierfachen Totalität die Zahl der Kanten grösser ist als diejenige der wesentlichen Bestimmungsstücke.

In Ermangelung eines strengen Beweises kann man diesen Satz im einzelnen z. B. durch die in § 17 für die regulären Polyscheme der vierfachen Totalität gegebenen Zahlen bestätigen.

Für höhere Dimensionszahlen über 4 ist dasselbe nach einer ganz natürlichen Induktion in noch grösserem Masse zu erwarten.

Tragen wir nun diese Betrachtungen auf sphärische Polyscheme über, deren Dimensionszahl n grösser als 4 ist, indem wir zugleich nach Art der reciproken Beziehung die Ecken mit den $(n-1)$-sphärischen Perischemen, überhaupt die m-sphärischen Perischeme immer mit den $(n-m-1)$-sphärischen vertauschen, so sehen wir, dass die Zahl der $(n-2)$-sphärischen Perischeme, oder, wenn man will, der daran liegenden Argumente, nicht kleiner als die Zahl der wesentlichen Bestimmungsstücke des n-sphärischen Polyschems sein kann, und finden es wahrscheinlich, dass mit Ausnahme des Plagioschems jene Zahl immer grösser ist als diese. Während also ein tetrasphärisches Polyschem immer durch seine Argumente gerade bestimmt ist, so ist dagegen höchst wahrscheinlich von da hinweg jedes polysphärische Polyschem durch seine Argumente mehr als bestimmt.

So wie in § 24 jedes perissosphärische Plagioschem durch artiosphärische von niedrigerer Ordnung ausgedrückt ward, ohne dass man einer Berechnung neuer Argumente bedurfte, so vermute ich, dass im allgemeinen jedes perissosphärische Polyschem durch artiosphärische Polyscheme niedrigerer Ordnung, von denen keines neue Argumente

hat, wird ausgedrückt werden können, ohne dass man eine Zerfällung des gegebenen Polyschems in Plagioscheme vorzunehmen braucht. Wenn wir hierüber eine Weile näher eintreten, so nehmen wir der Einfachheit wegen auf jeder Polysphäre das Orthoschem mit lauter rechten Argumenten als Einheit des Masses an, also z. B. den Quadranten als Einheit der Winkel oder der Argumente.

Das trisphärische Polyschem oder das Kugelvieleck ist bekanntlich gleich der Summe seiner Winkel minus seine doppelte Seitenzahl plus 4. Sind $p_1, p_2, \ldots p_m$ die Grenzpolynome, welche der Reihe nach den Seiten entsprechen, so kann man diesen Satz durch die Formel

$$f_3(p_1, p_2, \ldots p_m) = f(p_1, p_2) + f(p_2, p_3) + \cdots + f(p_{m-1}, p_m) + f(p_m, p_1) - 2m + 4$$

oder kurz durch

$$f_3(p, p', p'', \ldots) = 4 - \Sigma \left\{ 2 - f(p, p' \text{ Eck}) \right\}$$

ausdrücken.

Satz. Sind $p, p', p'', p''', \ldots$ die Grenzpolynome eines pentasphärischen Polyschems $f_5(p, p', p'', p''', p^{IV}, \ldots)$, und bezeichnet $f_4(p, p', p'', p''', \ldots \text{Eck})$ das tetrasphärische Polyschem, welches von allen ein Eck bildenden Polynomen begrenzt wird, $f(p, p' \text{ Vieleck})$ das disphärische Plagioschem oder das von zweien Polynomen p, p', welche ein im Umschluss vorhandenes sphärisches m-Eck bestimmen, eingeschlossene Argument, so ist

$$\begin{aligned} f_5(p, p', p'', p''', p^{IV}, \ldots) &= -\Sigma(8 - f_4(p, p', p'', p''', \ldots \text{Eck}) + 2\,\Sigma(m-2)(2 - f(p, p' \text{ Vieleck})) + 16 \\ &= \Sigma f_4(p, p', p'', p''', \ldots \text{Eck}) - 2\,\Sigma(m-2) f(p, p' \text{ Vieleck}) + 4\,\Sigma m - 8\,b_0 - 8\,b_2 + 16, \quad . \quad . \quad (1) \end{aligned}$$

wenn b_0, b_1, b_2, b_3 die Zahlen der Ecken, Seiten, Vielecke, tetrasphärischen Perischeme des Polyschems f_5 bedeuten.

Beweis. Indem wir nach und nach vom Einfachern zum Zusammengesetztern überzugehen beabsichtigen, setzen wir zuerst ein Polyschem, begrenzt von den Polynomen $P, p, q_1, q_2, \ldots q_m$, und zwar so, dass unter den mit q bezeichneten nur 3 unabhängige sind, und alle zusammen innerhalb des trisphärischen Perischems ($P = 0$, $p = 0$) ein Kugelvieleck bilden. Man wähle innerhalb desselben eine beliebige Lösung und lege durch diese, jedes Eck des Vielecks und die zwei übrigen Ecken des Polyschems die Polynome $r_1, r_2, \ldots r_3$, welche das ganze in m Plagioscheme zerschneiden. Unter diesen Polynomen r werden dann nur zwei unabhängige sein, und r_1 wird zugleich mit q_1, q_2, ferner r_2 zugleich mit q_2, q_3, u. s. f., endlich r_m zugleich mit q_m, q_1 verschwinden. Für eines dieser Plagioscheme hat man nun z. B.

$$f_5(P, p, q_1, r_m, -r_1) = f_4(P, q_1, r_m, -r_1) + f_4(p, q_1, r_m, -r_1)$$
$$+ f_4(P, p, r_m, -r_1) + f_4(P, p, q_1, r_m) + f_4(P, p, q_1, -r_1)$$
$$- 2f(P, p) - 2f(P, q_1) - 2f(p, q_1) - 2f(P, r_m) - 2f(P, -r_1)$$
$$- 2f(p, r_m) - 2f(p, -r_1) - 2f(q_1, r_m) - 2f(q_1, -r_1) - 2f(r_m, -r_1) + 16. \quad (2)$$

Man ersetze hier $q_1, r_m, -r_1$ durch $q_2, r_1, -r_2$, durch $q_3, r_2, -r_3$, u. s. f., endlich durch $q_m, r_{m-1}, -r_m$, und summiere. Da alsdann

$$\Sigma f_4(P, q_i, r_{i-1}, -r_i) = f_4(P, q_1, q_2, \ldots q_m \text{ Eck}),$$
$$\Sigma f_4(P, p, r_{i-1}, -r_i) = 4f(P, p),$$
$$f_4(P, p, q_1, -r_1) + f_4(P, p, q_2, r_1) = f_4(P, p, q_1, q_2),$$
$$f(P, -r_1) + f(P, r_1) = 2,$$
$$f(q_1, -r_1) + f(q_2, r_1) = f(q_1, q_2),$$
$$\Sigma f(r_{i-1}, -r_i) = 4$$

ist, so folgt

$$f_5(P, p, q_1, q_2, \ldots q_m) = f_4(P, q_1, q_2, \ldots q_m) + f_4(p, q_1, q_2, \ldots q_m) + \Sigma f_4(P, p, q_i, q_{i+1})$$
$$- 2(m-2) f(P, p) - 2\,\Sigma f(P, q_i) - 2\,\Sigma f(p, q_i) - 2\,\Sigma f(q_i, q_{i+1}) + 8m - 8. \quad . \quad . \quad (3)$$

Die Polynome $p, q_1, q_2, \ldots q_m$, welche zusammen nur 4 unabhängige Variabeln repräsentieren, begrenzen für sich allein ein tetrasphärisches Polyschem, das in Beziehung auf die Anordnung seiner Stücke einer räumlichen m-seitigen Pyramide zu vergleichen ist. So wie nun im Raume jedes Polyeder von einem innern Punkte aus in lauter Pyramiden zerlegt werden kann, welche diesen Punkt zur gemeinschaftlichen Spitze und die vieleckigen Flächen des Polyeders zu Basen haben, so kann auch das gleiche mit jedem tetrasphärischen Polyschem geschehen. Die Polynome, welche dasselbe begrenzen, seien $p, p', p'', p''', \ldots$ und mögen, wenn auch explizite 5 Variabeln darin vorkommen, doch wesentlich nur 4 unabhängige Variabeln repräsentieren. Wir können uns dann eine besondere Art von pentasphärischem Polyschem, $f_5(P, p, p', p'', p''', \ldots)$, denken, worin die Gleichung $P = 0$ gleichsam als Basis ein tetrasphärisches Polyschem von allgemeiner Natur, und die Gleichungen $p = 0$, $p' = 0$, $p'' = 0$, $p''' = 0, \ldots$ die zugehörige Spitze darstellen. Wird die Basis von irgend einer innern Lösung aus in pyramidenartige tetrasphärische Polyscheme zerlegt, so wird dieser Zerlegung auch eine des pentasphärischen Polyschems entsprechen, und für jeden Teil dieses letzten eine Gleichung wie (3) bestehen. Bei der Summierung dieser Gleichungen hat man dann

$$\Sigma f_4(P, q_1, q_2, \ldots q_m) = 8,$$
$$\Sigma f_4(p, q_1, q_2, \ldots q_m) = f_4(p, p', p'', p''', \ldots),$$
$$\Sigma\Sigma f_4(P, p, q_i, q_{i+1}) = \Sigma \left\{ f_4(P, p, q, -q') + f_4(P, p', q', -q'') + (P, p'', q'', -q''') + \text{etc.} \right\},$$

wenn die Polynome $p, p', p'', \ldots$ zusammen ein Eck der Basis bilden, also nur 3 Variabeln repräsentieren, und die Polynome $q, q', q'', \ldots$ den durch dieses Eck gehenden Teilungen entsprechen und daher nur 2 Variabeln repräsentieren; wenn ferner das dem Aggregat vorgesetzte Summenzeichen sich auf alle Ecken der Basis bezieht; also endlich

$= \Sigma f_4\,(P, p, p', p'', \ldots$ Eck der Basis);

$f(P, q) + f(P, -q) = 2$, also $\Sigma\Sigma f(P, q_i) =$ der doppelten Zahl der Basis $= \Sigma m$;

$f(p, q) + f(p', -q) = f(p, p')$, wenn das Paar Gleichungen $p = 0$, $p' = 0$ einer Seite der Basis entspricht;

$\Sigma\Sigma f(q_i, q_{i+1}) =$ der vierfachen Zahl der Ecken der Basis;

also zuletzt, indem man die Zahlen der Ecken, Seiten und Vielecke der Basis mit c_0, c_1, c_2 bezeichnet und die Glieder $-8c_0 + 8c_1 - 8c_2 = -16$ setzt,

$f_5\,(P, p, p', p'', p''', \ldots) = f_4\,(p, p', p'', p''', \ldots) + \Sigma f_4\,(P, p, p', p'', \ldots$ Eck der Basis) $-2\,\Sigma(m-2) f(P, p) - 2\,\Sigma f(p, p'$ Seite der Basis) $+ 2\,\Sigma m - 8$. . . . . . . (4)

Sind endlich $P, P', P'', P''', P^{IV}, \ldots$ die Grenzpolynome eines ganz beliebigen pentasphärischen Polyschems, so kann dieses von irgend einer innern Lösung aus in solche Polyscheme geteilt werden, wie das, welches wir soeben betrachtet haben. Werden dann die Polynome, welche die Teilung bewirken, wie vorhin, durch p bezeichnet, so hat man bei der Summation der Gleichung (4):

$\Sigma f_4\,(p, p', p'', p''', \ldots$ Basis) = dem totalen tetrasphärischen Kontinuum $= 16$,

$\Sigma\Sigma f_4\,(P, p, p', p'', \ldots$ Eck der Basis) $= \Sigma f_4\,(P, P', P'', P''', \ldots$ Eck des pentasph. Polyschems),

$f(P, p) + f(P', -p) = f(P, P'$ Vieleck des Polyschems);

ferner, wenn die Polynome $p, p', p'', \ldots$ einer und derselben Seite des Polyschems entsprechen, also alle zusammen nur zwei Variabeln repräsentieren,

$$f(p, -p') + f(p', -p'') + f(p'', -p''') + \text{etc.} = 4,$$

folglich

$\Sigma\Sigma f(p, p'$ Seite der Basis) = der vierfachen Seitenzahl des pentasph. Polyschems.

Wenn man endlich die Zahlen der Ecken, Seiten, Vielecke, tetrasphärischen Perischeme des gegebenen pentasphärischen Polyschems mit b_0, b_1, b_2, b_3 bezeichnet und die Summation der Gleichung (4) ausführt, so erhält man

$f_5\,(P, P', P'', P''', P^{IV}, \ldots) = \Sigma f_4\,(P, P', P'', P''', \ldots$ Eck)
$-2\,\Sigma(m-2) f(P, P'$ Vieleck) $+ 4\,\Sigma m - 8\,b_1 - 8\,b_3 + 16$,

wo m die Zahl der Seiten eines Vielecks bezeichnet. Da $b_0 - b_1 + b_2 - b_3 = 0$ ist, so kann man dieser Gleichung auch die Form

$$
\begin{aligned}
& f_5 (P, P', P'', P''', P^{IV}, \ldots) = \Sigma f_4 (P, P', P'', P''', \ldots \text{Eck}) - 8\, b_0 \\
& - 2\, \Sigma (m-2) f (P, P' \text{ Vieleck}) + 4\, (\Sigma m - 2\, b_2) + 16 \\
& = 2\, \Sigma (m-2) \left\{ 2 - f\, (P, P' \text{ Vieleck}) \right\} \\
& - \Sigma \left\{ 8 - f_4\, (P, P', P'', P''', \ldots \text{Eck}) \right\} + 16
\end{aligned}
$$

geben, wo die erste Summe sich auf alle Vielecke, die zweite auf alle Ecken des gegebenen pentasphärischen Polyschems erstreckt. Diese Gleichung stimmt mit der zu beweisenden (1) vollkommen überein.

So wie nun die Formel für das Kugelvieleck den Euler'schen Satz $a_0 - a_1 + a_2 = 2$ giebt, wenn man sie auf das durch Projektion eines Polyeders auf eine Kugelfläche gebildete Netz anwendet, so führt auch die Formel (1) auf den Satz $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 2$, wenn man sie auf das pentasphärische Netz anwendet, welches durch Projektion eines linearen Polyschems der fünffachen Totalität entsteht.

Das gegebene Polyschem (∞^5) habe a_0 Ecken, a_1 Kanten, a_2 Vielecke, a_3 Polyeder, a_4 vierfache Polyscheme;

irgend ein vierfaches Perischem desselben habe b_0 Ecken, b_1 Kanten, b_2 Vielecke, b_3 Polyeder;

ein Polyeder desselben habe c_0 Ecken, c_1 Kanten, c_2 Vielecke; in diesem grenzen 2 vierfache Perischeme zusammen;

ein Vieleck habe d Ecken, also auch d Seiten; es sei gemein e Polyedern, also auch e vierfachen Perischemen;

eine Kante hat immer 2 Ecken; sie sei gemein f_0 Vielecken, f_1 Polyedern, f_2 Perischemen;

ein Eck sei gemein g_0 Kanten, g_1 Vielecken, g_2 Polyedern, g_3 Perischemen.

Dann ist

$$
\begin{aligned}
& \Sigma b_0 = \Sigma g_3, \quad \Sigma b_1 = \Sigma f_2, \quad \Sigma b_2 = \Sigma e, \quad \Sigma b_3 = 2\, a_4 \\
& \Sigma c_0 = \Sigma g_2, \quad \Sigma c_1 = \Sigma f_1, \quad \Sigma c_2 = \Sigma e, \\
& \Sigma d = \Sigma g_1, \quad \Sigma d = \Sigma f_0, \\
& 2\, a_1 = \Sigma g_0,
\end{aligned}
$$

$$
b_0 - b_1 + b_2 - b_3 = 0, \quad c_0 - c_1 + c_2 = 2, \quad f_0 - f_1 + f_2 = 2,
$$

$$
g_0 - g_1 + g_2 - g_3 = 0.
$$

Wird nun die Gleichung (1), worin m durch d zu ersetzen ist, über das ganze pentasphärische Netz summiert, so geben je diejenigen f_4 zusammen, welche einem und demselben Eck des Netzes entsprechen, den Wert des totalen tetrasphärischen Kontinuums oder 16; aus $\Sigma f_4(p, p', p'', p''', \ldots \text{Eck})$ wird daher $16\, a_0$.

Alle $f(p, p'$ Vieleck) zusammen, welche einem und demselben Vieleck entsprechen, geben 4. Aus $-2\, \Sigma (d-2) f(p, p'$ Vieleck) $-\, 8\, \Sigma (d-2) = -8\, \Sigma d + 16\, a_2$.

Was das folgende Glied $4\, \Sigma d$ betrifft, so wird im ganzen jedes d eines Vielecks so oft gezählt, als vierfache Perischeme dieses Vieleck gemein haben, also e mal. Aus $4\, \Sigma d$ wird demnach $4\, \Sigma d\, e$. Da aber $d\, e$ auch das Produkt der Zahl der Polyeder, welche ein Vieleck gemein haben, mit seiner Seitenzahl ist, so wird $\Sigma d e$ auch erhalten, indem man die Seitenzahlen aller Vielecke eines Polyeders addiert, was $2\, c_1$ giebt, und dann die so von allen Polyedern erhaltenen Zahlen summiert; folglich ist $\Sigma d\, e = 2\, \Sigma c_1$. Aus $4\, \Sigma d$ wird also zuletzt $8\, \Sigma c_1$.

Die Summen der noch übrigen Glieder ergeben sich unmittelbar. Da nun 32 das Mass des totalen pentasphärischen Kontinuums ist, so erhält man:

$$32 = 16\, a_0 - 8\, \Sigma d + 16\, a_2 + 8\, \Sigma c_1 - 8\, \Sigma b_0 - 8\, \Sigma b_2 + 16\, a_4 . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Nun ist

$$-\Sigma d + \Sigma c_1 = -\Sigma f_0 + \Sigma f_1 = \Sigma f_2 - 2\, a_1,$$
$$\Sigma b_0 + \Sigma b_2 = \Sigma b_1 + \Sigma b_3 = \Sigma f_2 + 2\, a_3 .$$

Demnach verwandelt sich die Gleichung (5) in

$$32 = 16\, a_0 + 16\, a_2 + 16\, a_4 - 16\, a_1 - 16\, a_3,$$

oder

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 2,$$

was zu verifizieren war.

Das stufenweise Verfahren, welches wir bei der Konstruktion des Ausdrucks eines ganz beliebigen pentasphärischen Polyschems befolgt haben, wird desto länger und verwickelter, je höher die Ordnung der Perissosphäre steigt, und ist wohl kaum einer Verallgemeinerung fähig. Wendet man dasselbe noch auf das heptasphärische Polyschem an, wobei man, vom Plagioschem ausgehend, noch fünf andere Stufen durchlaufen muss, so gewähren die gefundenen Ausdrücke für das trisphärische, pentasphärische und heptasphärische Polyschem eine hinreichende Induktion, um aus denselben auf die Form des allgemeinen Ausdrucks für irgend ein perissosphärisches Polyschem zu schliessen. Wir setzen nämlich für ein $(2\, n + 1)$-sphärisches Polyschem den Ausdruck

$$f_{2n+1} = \Sigma f_{2n} + \Sigma A_3 f_{2n-2} + \cdots + \Sigma A_{2m+1} f_{2n-2m} + \cdots + \Sigma A_{2n-1} f_2 + A_{2n+1} . \quad (6)$$

Die im allgemeinen Glied angezeigte Summation erstreckt sich auf alle $(2m+1)$-sphärischen Perischeme; einem jeden derselben kommt eine ganze (positive oder negative) Zahl A_{2m+1} eigentümlich zu, welche nur von der Zahl und Anordnung der Teile dieses Perischems, keineswegs aber von seinen Argumenten abhängt; und das mit dieser Zahl multiplizierte f_{2n-2m} bedeutet dasjenige $(2n-2m)$-sphärische Polyschem, welches von allen Grenzpolynomen, deren Verschwinden das $(2m+1)$-sphärische Kontinuum des betrachteten Perischems bestimmt, gebildet oder umschlossen wird. Es ist z. B. immer $A_1 = 1$, ferner $A_3 = 4$ — die doppelte Anzahl der Ecken des betreffenden Kugelvielecks (trisphärischen Perischems). Die Richtigkeit der Form des Ausdrucks (6) muss ebenso durch Differentiation bewiesen werden, wie es in § 24 für die Gleichung (1) geschah; wir wollen uns deshalb nicht länger dabei aufhalten, sondern gehen sogleich zur Bestimmung der Integrationskonstanten A_{2n+1} über. Lassen wir alle Grenzpolynome des Polyschems f_{2n+1}, mit Inbegriff des Vorzeichens, koinzidieren, so wird dasselbe gleich dem halben $(2n+1)$-sphärischen Kontinuum, also gleich 2^{2n}; ebenso wird $f_{2n-2m} = 2^{2n-2m-1}$; man hat also, wenn ΣA_1 die Zahl der Ecken des Polyschems bezeichnet,

$$A_{2n+1} = 2^{2n} - 2^{2n-1}\,\Sigma A_1 - 2^{2n-3}\,\Sigma A_3 - \cdots - 2^{2n-2m-1}\,\Sigma A_{2m+1} - \cdots - 2\,\Sigma A_{2n-1}\,.$$

Die mit A bezeichneten Konstanten sind also immer durch Rekursionsformeln zu bestimmen, und hiermit ist unsre Aufgabe vollständig gelöst. Wahrscheinlich ist $(-1)^n$ das Vorzeichen von A_{2n+1}; doch sehe ich mich ausser Stand, diese Vermutung zu beweisen.

Am Ende dieses Paragraphen will ich noch eine merkwürdige Eigentümlichkeit tetrasphärischer Polyscheme erwähnen. Werden auf der positiven Seite eines jeden Grenzkontinuums eines gegebenen tetrasphärischen Polyschems f_4 Radien normal darauf gezogen, so bestimmen deren Endpunkte ein zu jenem reciprokes Polyschem F_4, dessen Ecken, Seiten, Vielecke resp. den Vielecken, Seiten, Ecken von f_4 entsprechen, und namentlich ist jedes Argument von F_4 das Supplement der entsprechenden Seite von f_4, und umgekehrt. Wenn nun irgend ein Argument von f_4 mit α, und die Seite, an welcher es liegt, mit a bezeichnet wird, so ist

$$d f_4 = \Sigma \frac{2a}{\pi}\, d\frac{2\alpha}{\pi}, \qquad d F_4 = -\Sigma \left(2 - \frac{2\alpha}{\pi}\right) d\frac{2a}{\pi};$$

folglich

$$d(f_4 + F_4) = -d\,\Sigma \left(2 - \frac{2\alpha}{\pi}\right) \frac{2a}{\pi}\,,$$

eine leicht zu integrierende Differentialgleichung. Um die Integrationskonstante zu bestimmen, nehmen wir die Seiten von f_4 verschwindend klein an; dann werden alle Ar-

gumente von F_4 dem Halbkreis gleich, und die Grenzpolynome von F_4 sämtlich, mit Inbegriff des Vorzeichens, identisch; es ist also zugleich $f_4 = 0$ und $F_4 =$ dem halben tetrasphärischen Kontinuum $= 8$. Hiedurch ist die Integrationskonstante bestimmt, und man hat allgemein

$$f_4 + F_4 = 8 - \Sigma\left(2 - \frac{2\alpha}{\pi}\right)\frac{2\alpha}{\pi}.$$

Ersetzt man die tetrasphärische Einheit durch ihren absoluten Wert $\frac{\pi^2}{8}$, so erhält man für die Summe zweier reciproker tetrasphärischer Polyscheme den Ausdruck

$$\pi^2 - \frac{1}{2}\,\Sigma\,(\pi - \alpha)\,\alpha.$$

§ 33. *Ueber reguläre sphärische Polyscheme.*

Die tetrasphärischen regulären Polyscheme entsprechen in Beziehung auf Zahl und Anordnung ihrer Teile genau den regulären Polyedern des Raums. Sind die trisphärischen Perischeme eines solchen lauter kongruente reguläre m-Ecke, deren je n in einem ebenfalls regulären Eck zusammentreffen, und sind alle Argumente gleich $2\,\alpha$, so soll das Polyschem mit $P_{m,n}\,(2\,\alpha)$ bezeichnet werden. Man ziehe aus seinem sphärischen Centrum O einen Kreisbogen $O\,A$ normal auf ein trisphärisches Perischem, so wird der Fusspunkt A das Centrum dieses Perischems sein; von A aus ziehe man den Kreisbogen $A\,A_1$ normal auf eine Seite $B\,B'$ des Perischems, so wird der Fusspunkt A_1 die Mitte von $B\,B'$ sein. Dann ist $A\,O\,B\,A_1$ ein Orthoschem, worin die an den Seiten $O\,A_1$, $A_1\,A$, $A\,B$ liegenden Argumente rechte und die an den Seiten $A\,O$, $O\,B$, $O\,B$, $B\,A_1$ liegenden resp. $\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \alpha$ sind; der Wert des Orthoschems ist also $f_4\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \alpha\right)$. Je $2\,m$ Orthoscheme setzen sich zu einem pyramidalen Polyschem zusammen, welches O zur Spitze und ein Vieleck zur Basis hat; und dieses ist wiederum im ganzen regulären Polyschem so oft enthalten, als die Zahl $4\,n : (2\,m + 2\,n - m\,n)$ seiner trisphärischen Perischeme anzeigt; folglich ist

$$P_{m,n}(2\,\alpha) = \frac{8\,m\,n}{2\,m + 2\,n - m\,n}\,f\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \alpha\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Für das Minimum von α ist $\sin\frac{\pi}{m}\sin\alpha = \cos\frac{\pi}{n}$; hier verschwindet P. Von da an kann α bis $\frac{\pi}{2}$ wachsen, wo dann $P_{m,n}\,(\pi) = 8$, d. h. gleich dem halben tetrasphärischen Kontinuum wird. Können mehrere Polyscheme $P_{m,n}\,(2\,\alpha)$ um ein Eck herum so zu-

sammengefügt werden, wie es dem Charakter (n, p) entspricht, d. h. so, dass jede vom Eck ausgehende Seite p Polyschemen gemein ist, so ist offenbar das Argument $2\alpha = \frac{2\pi}{p}$. Dieser Fall tritt ein, wenn das mit (m, n, p) bezeichnete lineare reguläre Polyschem der vierfachen Totalität auf die konzentrische Tetrasphäre pojiziert wird; die Projektion jedes Grenzpolyeders (m, n) ist dann ein tetrasphärisches $P_{m,n}\left(\frac{2\pi}{p}\right)$. Da nun das totale tetrasphärische Kontinuum 16 beträgt, so ist die Zahl der Grenzpolyeder von (m, n, p) gleich $16 : P_{m,n}\left(\frac{2\pi}{p}\right)$. Wenn das betrachtete lineare Polyschem a_0 Ecken, a_1 Kanten, a_2 Vielecke, a_3 Polyeder zählt, so können wir demnach die Proportionen (1) des § 17 in die Gleichungen

$$\frac{a_0}{\frac{2}{n}+\frac{2}{p}-1} = \frac{p\,a_1}{2} = \frac{m\,a_2}{2} = \frac{a_3}{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}-1} = \frac{2}{f\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

umsetzen. Durch dieselben werden § 17 und 30 in eine solche Verbindung gesetzt, dass, wenn die Ergebnisse des einen noch nicht bekannt wären, sie aus denen des andern gefunden werden könnten.

Nach dem bisherigen ist es wohl leicht zu verstehen, wenn ich hier den Ausdruck für ein pentasphärisches reguläres Polyschem, ohne Erklärung und Herleitung, hinsetze:

$$P_{m,n,p}(2\alpha) = \frac{16}{f\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}\right)}\left\{f\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}\right) + f\left(\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}, \alpha\right) + \frac{2}{m}\cdot\frac{2\alpha}{\pi} - \frac{2}{m} - \frac{2}{n} - \frac{2}{p} - \frac{2\alpha}{\pi} + 2\right\}.$$

Hat nun ein lineares reguläres Polyschem der fünffachen Totalität den Charakter (m, n, p, q), und ist a_0 die Zahl seiner Ecken u. s. f., so ergiebt sich aus der vorliegenden Formel leicht:

$$N a_0 = 2 f\left(\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}\right), \quad N a_1 = 2\left(\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1\right), \quad N a_2 = \frac{8}{mq},$$

$$N a_3 = 2\left(\frac{2}{m} + \frac{2}{n} - 1\right), \quad N a_4 = 2 f\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}\right),$$

wo abkürzend

$$N = f\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}\right) + f\left(\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}\right) + \frac{4}{mq} - \frac{2}{m} - \frac{2}{n} - \frac{2}{p} - \frac{2}{q} + 2$$

gesetzt ist.

Diese Beispiele mögen hinreichen, um anzudeuten, wie derselbe Gegenstand auch für höhere Totalitäten zu behandeln wäre. Man würde dann die Formeln (4) und (5) des § 29 unmittelbar aus den durch Konstruktion gewonnenen Ergebnissen des § 18 herleiten können.

Wenn in der auf die Tetrasphäre bezüglichen Formel

$$P + Q = 8 - \Sigma \left(2 - \frac{2a}{\pi}\right) \frac{2a}{\pi},$$

welche eine Anwendung des letzten Satzes von § 32 darstellen soll, Q oder bestimmter $Q\,(m, n, p)$ das tetrasphärische Mass eines Ecks des linearen regulären Polyschems (m, n, p) bezeichnet, so ist das zu Q reciproke P die Projektion des Grenzpolyeders von (p, n, m) oder ein $P_{p,n}\left(\frac{2\pi}{m}\right)$. Wenn also k die Zahl der Seiten von P und a den Wert einer solchen bezeichnet, so hat man

$$k = \frac{2np}{2n + 2p - np}, \qquad \cos\frac{a}{2} = \frac{\sin\frac{\pi}{m}\cos\frac{\pi}{p}}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{m} - \cos^2\frac{\pi}{n}}},$$

$$Q\,(m, n, p) = 8 - P_{p,n}\left(\frac{2\pi}{m}\right) - k\left(2 - \frac{4}{m}\right)\frac{2a}{\pi}.$$

Wendet man diese Formel auf alle sechs regulären und einfachen Polyscheme an, indem man die Werte von $P_{p,n}\left(\frac{2\pi}{m}\right)$ direkt aus § 17 entnimmt, so erhält man:

$$Q\,(3, 3, 3) = -\frac{16}{5} + \frac{16\lambda}{\pi}, \quad a = \pi - 2\lambda, \qquad \text{wo } \cos 2\lambda = \frac{1}{4},$$

$$Q\,(3, 3, 5) = \frac{106}{5} - \frac{80\lambda}{\pi}, \qquad a = 2\lambda - \frac{\pi}{3},$$

$$Q\,(3, 3, 4) = \frac{2}{3}, \qquad a = \frac{\pi}{3},$$

$$Q\,(3, 4, 3) = 2, \qquad a = \frac{\pi}{3},$$

$$Q\,(4, 3, 3) = 1, \qquad a = \frac{\pi}{2},$$

$$Q\,(5, 3, 3) = \frac{382}{75}, \qquad a = \frac{\pi}{5}.$$

Da nun

$$Q\,(m, n, p) = P_{n,p}\,(\pi - a) = 4\,k\,f\left(\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}, \frac{\pi - a}{2}\right)$$

ist, so folgt auch

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \lambda\right) = -\frac{2}{15} + \frac{2\lambda}{3\pi}, \qquad f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{3} - \lambda\right) = \frac{53}{300} - \frac{2\lambda}{3\pi},$$

$$Q(3,3,4) = P_{3,4}\left(\frac{2\pi}{3}\right), \quad Q(3,4,3) = P_{4,3}\left(\frac{2\pi}{3}\right), \quad Q(4,3,3) = P_{3,3}\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

$$Q(5,3,3) = P_{3,3}\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{382}{75} = \frac{191}{600}\cdot 16, \qquad f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{191}{900}.$$

Von den angeführten Eckenmassen sind vier rational. Dieses hängt mit der stetigen Erfüllung der vierfachen Totalität durch lauter gleiche reguläre Polyscheme, welche wir am Ende von § 17 betrachtet haben, zusammen und bestätigt das dort Gesagte. Den drei Charakteren $(3, 3, 4, 3)$, $(3, 4, 3, 3)$, $(4, 3, 3, 4)$ als den einzigen, nach denen eine einmalige Erfüllung möglich ist, ist aber noch ein vierter $\left(5, 3, 3, \frac{5}{2}\right)$ und sein reciproker beizufügen, von denen der erste eine wiederholte Erfüllung durch einfache, der zweite durch überschlagene Hekatonkaieikosascheme anzeigt. Man kann sich übrigens hievon auch mittelst des am Ende von § 17 gebrauchten Verfahrens überzeugen; wenn nämlich die gleichen Bezeichnungen gelten wie dort, so ist

$$\varrho(5,3,3) = \cos\left(\lambda - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{K}{R}\left(3, 3, \frac{5}{2}\right).$$

Da wir nun $Q(5,3,3) = \frac{191}{600}\cdot 16$ gefunden haben, und das überschlagene Hexakosioschem $\left(3, 3, \frac{5}{2}\right)$ sechshundert Grenztetraeder zählt, so liegen bei der durch $\left(5,3,3,\frac{5}{2}\right)$ angezeigten Erfüllung der vierfachen Totalität je 600 einfache Hekatonkaieikosascheme um eine Lösung herum und wiederholen dadurch die Totalität 191 Male. Folglich hat das überschlagene Hexakosioschem einen 191fachen Mantel. Im folgenden Paragraphen wollen wir dieses noch direkt aus der Konstruktion beweisen.

Für reguläre Polyscheme mit einfachem Mantel war die in den §§ 17 und 18 gegebene Aufzählung vollständig. Es frägt sich noch, wie viele es deren mit mehrfachem Mantel geben kann. Um die Antwort hierauf vorzubereiten, schicke ich folgende Betrachtung voran. Gesetzt, es gäbe eine durchaus symmetrische Verteilung von Lösungen auf der Polysphäre, deren ursprüngliches Netz mehrere Male herumgeht, so ziehe man die Kreisbogen, welche die kürzesten sphärischen Abstände darstellen, die es zwischen je zwei Lösungen geben kann; dann werden diese sich zu einfachen regulären Kugelvielecken, diese wiederum zu einfachen regulären tetrasphärischen Polyschemen, u. s. f. gruppieren; die Perischeme höchster Ordnung endlich werden ebenfalls regulär und einfach sein und können das totale polysphärische Kontinuum nur einmal besetzen. Wenn also auch in irgend einer Totalität überschlagene reguläre Polyscheme existieren, so können sie doch keine neue Art von symmetrischer Verteilung der Radien einer Polysphäre erzeugen, welche nicht bereits von einem einfachen regulären Polyscheme geliefert worden wäre. Wenn nun im Charakter eines regulären Polyschems keine

andern Ziffern als 3 und 4 vorkommen, so ist leicht einzusehen, dass es rein unmöglich ist, seine Ecken so zu verbinden, dass etwas Ueberschlagenes entsteht. Die einzige noch vorkommende Ziffer — denn von der zweifachen Totalität, welche eine endlose Mannigfaltigkeit regulärer Gebilde gestattet, kann hier keine Rede sein — ist 5 und kommt nur in der dreifachen und vierfachen Totalität vor; ihr entspricht das einfache, der Ziffer $\frac{5}{2}$ dagegen das überschlagene Fünfeck. Lässt man reziproke Gebilde weg, so können überschlagene Polyscheme nur im Raume und in der vierfachen Totalität resp. durch andere Verbindung der Ecken des einfachen Ikosaeders und des einfachen Hexakosioschems gebildet werden.

§ 34. *Nähere Untersuchung der Hexakosioscheme.*

Zum leichtern Verständnis alles folgenden ist es nötig, mehrere trigonometrische Relationen, welche das räumliche Ikosaeder betreffen, vor Augen zu haben. Man projiziere die Oberfläche des Ikosaeders auf eine konzentrische Kugel und merke sich ausser den Ecken des Netzes noch die Mittelpunkte seiner Dreiecke und die Mitten seiner Seiten; man wird dann immer Kugeldreiecke finden, deren blosse Anschauung zum Beweise der erwähnten trigonometrischen Relationen hinreicht.

Sind ABC, ABD zwei benachbarte Dreiecke eines Ikosaeders, E, F ihre Mittelpunkte, O das Centrum des Ikosaeders, $a = \angle AOB$, $b = \angle COE$, $b' = \angle COF$, so ist

$$a + b + b' = \pi, \qquad \cos a = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \sin a = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\cos b = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}}}, \qquad \sin b = \sqrt{\frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}}, \qquad \operatorname{tang} b = 3 - \sqrt{5},$$

$$\cos b' = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{3\sqrt{5}}}, \qquad \sin b' = \sqrt{\frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}}, \qquad \operatorname{tang} b' = 3 + \sqrt{5}.$$

Mittelst dieser Winkel können wir nun die tetrasphärischen Werte der 120 Ecken des einfachen Hexakosioschems, wie folgt, angeben. Die eingeklammerten Buchstaben bezeichnen, gleichwie in § 17, die in die einzelnen Zonen fallenden Gruppen von Ecken. Eine ganze Zahl, welche die Werte 0, 1, 2, 3, 4 durchläuft, ist mit i bezeichnet. Die Bedeutung der tetrasphärischen Variabeln Θ, φ, ψ erhellt aus ihren Beziehungen zu den orthogonalen Variabeln w, x, y, z:

$$w = \cos\Theta, \quad x = \sin\Theta\cos\varphi, \quad y = \sin\Theta\sin\varphi\cos\psi, \quad z = \sin\Theta\sin\varphi\sin\psi.$$

Tetrasphärische Werte der 120 Ecken des einfachen Hexakosioschems.

(a): $\Theta = 0$;

(b): $\Theta = \frac{\pi}{5}$, $\left\{\varphi = 0, \begin{pmatrix}\varphi = a \\ \psi = \frac{2i\pi}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = \pi - a \\ \psi = \frac{(2i+1)\pi}{5}\end{pmatrix}, \varphi = \pi\right\}$;

(c): $\Theta = \frac{\pi}{3}$, $\left\{\begin{pmatrix}\varphi = b \\ \psi = \frac{(2i+1)\pi}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = b' \\ \psi = \frac{(2i+1)\pi}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = \pi - b' \\ \psi = \frac{2i\pi}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = \pi - b \\ \psi = \frac{2i\pi}{5}\end{pmatrix}\right\}$;

(d): $\Theta = \frac{2\pi}{5}$, $\left\{\varphi = 0, \begin{pmatrix}\varphi = a \\ \psi = \frac{2i\pi}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = \pi - a \\ \psi = \frac{(2i+1)\pi}{5}\end{pmatrix}, \varphi = \pi\right\}$;

(e): $\Theta = \frac{\pi}{2}$, $\left\{\begin{pmatrix}\varphi = \frac{a}{2} \\ \psi = \frac{2i\pi}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = \frac{\pi - a}{2} \\ \psi = \frac{(2i+1)\pi}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = \frac{\pi}{2} \\ \psi = \frac{(2i+1)\pi}{10}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = \frac{\pi + a}{2} \\ \psi = \frac{2i\pi}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = \pi - \frac{a}{2} \\ \psi = \frac{(2i+1)\pi}{5}\end{pmatrix}\right\}$;

(f): $\Theta = \frac{3\pi}{5}$, $\left\{\varphi = 0, \begin{pmatrix}\varphi = a \\ \psi = \frac{2i\pi}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = \pi - a \\ \psi = \frac{(2i+1)\pi}{5}\end{pmatrix}, \varphi = \pi\right\}$;

(g): $\Theta = \frac{2\pi}{3}$, $\left\{\begin{pmatrix}\varphi = b \\ \psi = \frac{(2i+1)\pi}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = b' \\ \psi = \frac{(2i+1)\pi}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = \pi - b' \\ \psi = \frac{2i\pi}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = \pi - b \\ \psi = \frac{2i\pi}{5}\end{pmatrix}\right\}$;

(h): $\Theta = \frac{4\pi}{5}$, $\left\{\varphi = 0, \begin{pmatrix}\varphi = a \\ \psi = \frac{2i\pi}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = \pi - a \\ \psi = \frac{(2i+1)\pi}{5}\end{pmatrix}, \varphi = \pi\right\}$;

(i): $\Theta = \pi$.

Die Ecken b, d, e, f, h sind Ecken von Ikosaedern, die Ecken c, g sind Mittelpunkte der Dreiecke eines Ikosaeders, und die Ecken e sind Mitten von Kanten eines solchen. Da die Entfernung aller Ecken vom Centrum als lineare Einheit angenommen ward, so beträgt die Seite $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ist also gleich der Seite des regulären Zehnecks. Die Durchschnitte des Polyschems, welche durch lineare Kontinua $w =$ const. entstehen, können, indem man von der Variabeln w absieht, als Körper betrachtet werden. Wir wollen dieselben der Reihe nach untersuchen.

Der Schnitt $w = \cos\frac{\pi}{5}$ ist ein Ikosaeder, dessen Dreiecke sämtlich Grenztetraedern angehören.

Der Schnitt $w = \cos\frac{\pi}{3}$ ist ein Dodekaeder mit der Seite $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, auf dessen Fünfecken Pyramiden aufgesetzt sind, deren Seiten $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ betragen. Die Ecken c dieses Dodekaeders gehören dem Hexakosioschem an, ebenso die Kanten; aber die 60 gleichschenkligen Dreiecke, welche den Schnittkörper begrenzen, sind Tetraederschnitte, geführt durch eine Kante, und die Gegenkante im mittlern und äussern Verhältnisse teilend. Diese Gegenkante verbindet zwei homothetische Ecken b und d; und wenn m den Teilungspunkt bezeichnet, so ist $bd : bm = bm : md$, also auch $1 : bd = bd : bm$.

Der Schnitt $w = \cos\frac{2\pi}{5}$ enthält die 12 Ecken d und schneidet jede der 60 Seiten ce in einem Punkte n so, dass $1 : ce = ce : cn = cn : ne$. Der Schnittkörper ist von 20 gleichseitigen Dreiecken mit der Seite $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, 60 gleichschenkligen Dreiecken mit der Basis $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ und der Seite $\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$, und 60 gleichschenkligen Dreiecken mit der Basis $\sqrt{5}-2$ und der Seite $\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ begrenzt. Die gleichseitigen Dreiecke, Durchschnitte der Tetraeder $c\,e\,e\,e$, können als Abstumpfungsflächen der Ecken eines Dodekaeders aufgefasst werden, und die 120 gleichschenkligen Dreiecke, Durchschnitte der Tetraeder $c\,d\,e\,e$ und $c\,c\,d\,e$, bilden dann zehnseitige auf die Dodekaederflächen gesetzte Pyramiden.

Der Schnitt $w = 0$ enthält die 30 Ecken e und halbiert jede der 12 Seiten df. Der Schnittkörper wird aus einem Ikosaeder, dessen Seiten den Wert $\sqrt{5}-1$ haben, erhalten, wenn man durch Ebenen, welche diese Seiten halbieren, seine Ecken abstumpft, und auf die durch die Abstumpfung entstandenen regulären Fünfecke Pyramiden aufsetzt, deren Seiten $\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ betragen.

Die nun folgenden Schnitte sind in umgekehrter Ordnung dieselben wie die vorigen.

Uebersicht und Anzahl aller Seiten.

Das Eck a ist mit jedem b durch eine Seite verbunden, Zahl 12. Je zwei b sind durch eine Seite verbunden; Zahl gleich derjenigen der Kanten eines Ikosaeders, also 30. Die Seiten $b\,c$ vereinigen Ecken, die sich wie Mitte und Eck eines Dreiecks des Ikosaeders entsprechen; ihre Zahl ist also $3 \cdot 20 = 60$. Die Seiten $b\,d$ verbinden Ecken, welche demselben Eck des Ikosaeders entsprechen, sind also zwölf an der Zahl. Die Seiten $c\,c$ verbinden Ecken, welche den Mittelpunkten zweier benachbarten Dreiecke des Ikosaeders entsprechen, also 30. Die Seiten $c\,d$ verbinden Ecken, die dem Mittelpunkt und einem Eck einer und derselben Ikosaederfläche entsprechen, also 60 an Zahl. Die Seiten ce verbinden Ecken, die dem Mittelpunkt und einer Seitenmitte einer und der-

selben Ikosaederfläche entsprechen, also 60. Die Seiten de verbinden Ecken, welche einem Ende und der Mitte einer Kante des Ikosaeders entsprechen, also 60. Die Seiten df verbinden Ecken, welche einem und demselben Eck des Ikosaeders entsprechen, also 12. Die Seiten ee verbinden Ecken, welche den Mitten zweier benachbarten Kanten des Ikosaeders entsprechen, also 60. Von da an Wiederholung in umgekehrter Ordnung. Mit Ausnahme der Seiten df und ee sind also die Anzahlen aller übrigen Seiten zu verdoppeln, wodurch sich 720 als Anzahl aller Seiten ergiebt.

Denkt man sich, wie bisher, alle Ecken in dasselbe äquatoriale ikosaedrische Netz projiziert, und bedeutet dann w den äquatorialen Abstand zweier durch eine Seite verbundener Ecken, so sind die Verbindungen derselben zu Seiten immer so beschaffen, dass w den kleinstmöglichen Wert hat, wie folgende Uebersicht zeigt:

ab, hi	ohne Bedingung,	cd, fg,	$w = b$,
bb, hh,	$w = a$,	ce, eg,	$w = \frac{b' - b}{2}$,
bc, gh,	$w = b$,		
bd, fh,	$w = 0$,	de, ef,	$w = \frac{a}{2}$,
cc, gg,	$w = b' - b$,	df ,	$w = 0$,
		ee ,	$w = \frac{\pi}{5}$.

Die Tetraeder, aus denen der Umschluss besteht, sind folgende: $abbb$ 20, $bbbc$ 20, $bbcc$ 30, $bccd$ 60, $ccde$ 60, $cdee$ 60, $ceee$ 20, $deef$ 60, etc., im ganzen 600.

Nachdem wir so die Struktur des einfachen Hexakosioschems untersucht haben, bereiten wir uns zu einer ähnlichen Behandlung des überschlagenen vor, indem wir zuerst das überschlagene Ikosaeder $\left(3, \frac{5}{2}\right)$ betrachten. Ist φ Poldistanz und ψ Azimut, so bilden die Ecken $\varphi = 0$; $\varphi = \pi - a$, $\left(\psi = 0;\ \psi = \frac{4\pi}{5}\right)$ ein Dreieck, die Ecken der ersten Zone sind durch $\varphi = \pi - a$, $\psi = \frac{4i\pi}{5}$ dargestellt; ferner bilden die zwei Ecken $\varphi = \pi - a$, $\left(\psi = 0;\ \psi = \frac{4\pi}{5}\right)$ mit dem Eck $\varphi = a$, $\psi = \frac{7\pi}{5}$ ein Dreieck, die Ecken der zweiten Zone sind in der Formel $\varphi = a$, $\psi = \frac{(4i - 3)\pi}{5}$ enthalten. Dies reicht hin, um von der Verbindung der Ecken eine deutliche Vorstellung zu geben. Um nun zu beurteilen, wie vielfach der Mantel dieses Ikosaeders umgeschlagen ist, untersuchen wir nur, wie oft die um den Pol $\varphi = 0$ herumliegende unendlich kleine Stelle der Kugelfläche von der Projektion des Ikosaedermantels bedeckt wird, oder, was dasselbe ist, wie oft ein vom Centrum ausgehender, unendlich wenig von der positiven Axenhälfte abweichender, aber sonst freier Strahl den Mantel des Ikosaeders durchbohrt.

Da das überschlagene Fünfeck einen doppelten Umlauf hat, so bilden die fünf Dreiecke, welche den Pol $\varphi = 0$ mit den Ecken der ersten Zone $\varphi = \pi - a$ verbinden, einen doppelten Mantel. Die Dreiecke, welche je zwei Ecken der ersten Zone mit einem der zweiten verbinden, gehören nicht hieher, weil sie zwischen dem Centrum und dem Gegenpol $\varphi = \pi$ durchgehen. Jedes Dreieck dagegen, welches ein Eck der ersten Zone mit zweien der zweiten verbindet, geht zwischen dem Centrum und dem Pol durch, und seine Projektion bedeckt die Gegend des letzten ringsum vollständig; alle fünf Dreiecke dieser Art bilden also einen fünffachen Mantel. Die fünf letzten Dreiecke endlich, welche je zwei Ecken der zweiten Zone $\varphi = a$ mit dem Gegenpol $\varphi = \pi$ verbinden, kommen nicht in Betracht, weil sie sich auf den Gegenpol projizieren. Wir schliessen hieraus auf einen siebenfachen Mantel des überschlagenen Ikosaeders. Ist seine Seite 1, so ist der Radius der umschriebenen Kugel $\varrho = \dfrac{1}{2\cos\frac{a}{2}} = \sin\frac{\pi}{5}$.

Nach dieser Vorbereitung gehen wir an die Untersuchung der Massverhältnisse des überschlagenen Hexakosioschems $\left(3, 3, \frac{5}{2}\right)$. Das Eck a sei Pol $\Theta = 0$. Ist Θ die Poldistanz der in seiner Basis liegenden und ein $\left(3, \frac{5}{2}\right)$ bildenden Ecken, so ist $\cos\frac{\Theta}{2} = \varrho = \sin\frac{\pi}{5}$, also $\Theta = \frac{3\pi}{5}$ die erste Zone (f). Wird das Eck f, für welches $\varphi = \pi$, mit dem Eck a vertauscht, so geschieht dies durch die Transformationsformeln:

$$\begin{aligned}
\cos\Theta &= -\cos\frac{2\pi}{5}\cos\Theta' - \sin\frac{2\pi}{5}\sin\Theta'\cos\varphi',\\
\sin\Theta\cos\varphi &= -\sin\frac{2\pi}{5}\cos\Theta' + \cos\frac{2\pi}{5}\sin\Theta'\cos\varphi',\\
\sin\Theta\sin\varphi &= \phantom{-\sin\frac{2\pi}{5}\cos\Theta' + \cos\frac{2\pi}{5}}\sin\Theta'\sin\varphi',\\
\psi &= \psi'.
\end{aligned}$$

Mittelst derselben können wir genau das konstruktive Verfahren in § 17 nachahmen. Wir kennen nämlich die Werte von Θ, φ, ψ, welche den Ecken f der ersten Zone entsprechen. Setzen wir dieselben an die Stelle von Θ', φ', ψ', so lernen wir die Ecken der ersten Zone für den Pol $\Theta' = 0$ kennen; unter diesen finden sich neue Ecken für den Pol $\Theta = 0$, und wir sehen das Gebiet der bekannten Ecken von diesem ursprünglichen Pol aus erweitert. Indem wir diese Erweiterung auf den zweiten Pol $\Theta' = 0$ übertragen, so wird durch die entsprechenden Substitutionen das Gebiet des ersten Pols wieder erweitert. Wird dieses Verfahren lange genug fortgesetzt, so werden uns endlich alle Ecken zugleich mit ihrer Verbindung bekannt. Ich lasse hier eine Tafel der Substitutionsergebnisse folgen, in der Absicht, daraus die Ordnung herzuleiten, in welcher die Ecken durch Seiten verbunden sind.

1. (a) $\Theta' = 0$	$\Theta = \frac{3\pi}{5}$, $\varphi = \pi$ (f)
2. (f) $\Theta' = \frac{3\pi}{5}$, $\varphi' = \pi - a$	$\Theta = \frac{\pi}{3}$, $\varphi = b'$ (c)
3. (f) $\Theta' = \frac{3\pi}{5}$, $\varphi' = 0$	$\Theta = \frac{4\pi}{5}$, $\varphi = 0$ (h)
4. (c) $\Theta' = \frac{\pi}{3}$, $\varphi' = \pi - b$	$\Theta = \frac{\pi}{3}$, $\varphi = \pi - b$ (c)
5. (c) $\Theta' = \frac{\pi}{3}$, $\varphi' = b$	$\Theta = \frac{4\pi}{5}$, $\varphi = \pi - a$ (h)
6. (c) $\Theta' = \frac{\pi}{3}$, $\varphi' = \pi - b'$	$\Theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi + a}{2}$ (e)
7. (h) $\Theta' = \frac{4\pi}{5}$, $\varphi' = a$	$\Theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{a}{2}$ (e)
8. (h) $\Theta' = \frac{4\pi}{5}$, $\varphi' = \pi$	$\Theta = \frac{\pi}{5}$, $\varphi = 0$ (b)

Da jede Substitution mit ihrem Resultat vertauscht werden kann, und da, wenn Θ', φ' durch $\pi - \Theta'$, $\pi - \varphi'$ ersetzt werden, auch Θ, φ in $\pi - \Theta$, $\pi - \varphi$ übergehen, so braucht diese Tafel nicht weiter fortgesetzt zu werden.

Wenn die Werte einer Lösung der Gleichung $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$ genügen, so nenne ich die Lösung $\left(0, \frac{x}{\sqrt{1-w^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-w^2}}, \frac{z}{\sqrt{1-w^2}}\right)$ die äquatoriale Projektion der ursprünglichen Lösung (w, x, y, z), und den auf der äquatorialen Kugel ($w = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) gemessenen Abstand zweier solcher Projektionen nenne ich äquatorialen Abstand der zwei ursprünglichen Lösungen. Sind nun Θ, φ, ψ; Θ', φ', ψ' die tetrasphärischen Werte zweier Ecken des Polyschems, γ ihr tetrasphärischer und w ihr äquatorialer Abstand, so ist

$$\cos\gamma = \cos\Theta\cos\Theta' + \sin\Theta\sin\Theta'\cos w, \quad \cos w = \cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\cos(\psi - \psi').$$

Jede Eckenverbindung wird durch das entsprechende w hinreichend bestimmt. Hier folgt nun eine Uebersicht aller Eckenverbindungen mit Angabe ihrer Herleitung aus der vorigen Tafel.

af. Keine Bedingung.

ff. $w = \pi - a$.

fc. Durch die Formeln 1., 2. geht eine Verbindung *af* in eine *fc* über, wo $w = \pi - b'$.

fh. Durch 1., 3. geht eine *af* in eine *fh* über, wo $w = \pi$.

cc. Durch 2. geht eine Verbindung *ff* mit dem Azimutunterschied $\psi = \frac{4\pi}{5}$ in eine *cc* mit demselben Azimutunterschied über; also

$$\cos w = \cos^2 b' + \sin^2 b' \cos\frac{4\pi}{5} = -\cos(b' - b), \quad w = \pi - (b' - b).$$

ch. Durch 2. und 3. geht eine Verbindung ff in eine ch über, wo $w = b'$.

ce. Durch 2., 6. geht eine fc mit dem Azimutunterschied $\frac{3\pi}{5}$ in eine ce über, also $\cos w = \cos b' \cos \frac{\pi + a}{2} + \sin b' \sin \frac{\pi + a}{2} \cos \frac{3\pi}{5}$, $w = \frac{\pi}{2} + \frac{b' - b}{2}$.

he. Durch 3., 6. geht eine fc in eine he über, wo $w = \frac{\pi + a}{2}$.

hb. Durch 3., 8. geht eine fh in eine hb über, wo $w = 0$.

ee. Durch 6., 7. geht eine ch mit Azimutunterschied $\psi = \frac{2\pi}{5}$ in eine ee über, wo $w = \frac{3\pi}{5}$.

Von hier an wird eine weitere Fortsetzung überflüssig. Gemäss dem bisherigen sind nun in folgender Tafel die Seiten des Polyschems vollständig aufgezählt.

af, di, ohne Bedingung.	ch, bg, $w = b'$.
ff, dd, $w = \pi - a$.	ce, eg, $w = \frac{\pi}{2} + \frac{b' - b}{2}$.
fc, gd, $w = \pi - b'$.	he, eb, $w = \frac{\pi + a}{2}$.
fh, bd, $w = \pi$.	hb, $w = 0$.
cc, gg, $w = \pi - (b' - b)$.	ee, $w = \frac{3\pi}{5}$.

Die Verbindungen von je vier Ecken zu einem Tetraeder sind:

afff, fffc, ffcc, fcch, cche, chee, ceee, heeb, eeeg, eebg, ebgg, bggd, ggdd, gddd, dddi.

Wir schicken uns jetzt an, die Frage zu beantworten, in wie vielen Lösungen ein vom Centrum ausgehender Strahl den Umschluss des überschlagenen Hexakosioschems schneidet, oder wie oft in der tetrasphärischen Projektion desselben das totale tetrasphärische Kontinuum enthalten ist. Für diesen Zweck reicht es hin, zu untersuchen, in welchen der vorhin aufgezählten Klassen die Tetraeder die positive Hälfte der Axe w schneiden.

I. Die 20 Tetraeder $afff$ haben den Pol $w = 1$ zum gemeinschaftlichen Scheitel. Ein nahe beim Pol senkrecht auf die Axe geführter Schnitt ist ein überschlagenes Ikosaeder, und ein von einem innern Punkte des Schnittraums ausgehender und diesem Raum angehörender Strahl trifft die Grenzoberfläche 7 Mal. Dreht man nun den Strahl um seinen Anfangspunkt aus dem Schnittraume heraus, so muss er fortfahren, den Umschluss des Polyschems, insofern er nur aus diesen 20 Tetraedern besteht, 7 Male zu schneiden; und nur, wenn er nach dem Pole $w = 1$ selbst geht, schneidet er nur einmal. Es ist leicht, dies auf einen vom Centrum ausgehenden, der Axe w unendlich nahen Strahl überzutragen.

II. Die Tetraeder $fffc$ sind 20 an der Zahl. Werden alle vier Ecken eines solchen Tetraeders auf die äquatoriale Kugel projiziert, so bilden die Ecken f ein Kugeldreieck, dessen Seiten $\pi - a$ betragen, und das Eck c ist dem Mittelpunkt dieses Dreiecks, der von den Ecken um b' absteht, antipod. Man kann demnach die Werte der vier Ecken so ansetzen:

$$
\begin{array}{llll}
(f) & w = \cos\frac{3\pi}{5}, \; x = \sin\frac{3\pi}{5}\cos b', & y = \sin\frac{3\pi}{5}\sin b', & z = 0; \\
(f') & w = \cos\frac{3\pi}{5}, \; x = \sin\frac{3\pi}{5}\cos b', & y = \sin\frac{3\pi}{5}\sin b'\cos\frac{2\pi}{3}, & z = \sin\frac{3\pi}{5}\sin b'\sin\frac{2\pi}{3}; \\
(f'') & w = \cos\frac{3\pi}{5}, \; x = \sin\frac{3\pi}{5}\cos b', & y = \sin\frac{3\pi}{5}\sin b'\cos\frac{2\pi}{3}, & z = -\sin\frac{3\pi}{5}\sin b'\sin\frac{2\pi}{3}; \\
(c) & w = \cos\frac{\pi}{3}, \; x = -\sin\frac{\pi}{3}, & y = 0, & z = 0.
\end{array}
$$

Sind p, q, r, s beliebige positive Faktoren, für welche $p + q + r + s = 1$ ist, und multipliziert man die orthogonalen Werte der vier Ecken mit denselben, so sind die Summen der Produkte die Werte irgend einer innerhalb des Tetraeders liegenden Lösung. Richtet man die Faktoren so ein, dass die Variabeln x, y, z verschwinden, so wird w der erste Wert der Lösung, in welcher der Raum des Tetraeders die Axe schneidet. Kann dieses durch positive Faktoren geschehen, so schneidet der Tetraeder selbst die Axe, ohne dass es einer Verlängerung seines Raumes bedarf. Man erhält

$$p = q = r = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}, \quad s = \frac{3 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad w = -\frac{3 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = -1 + 3\,\frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}.$$

Das Tetraeder $f f' f'' c$ schneidet demnach die Axe auf der negativen Seite; also schneiden die 20 Tetraeder $g\,d\,d\,d$ die Axe auf der positiven Seite.

III. Die Tetraeder $ffcc$ sind 30 an Zahl. Da $w\,(ff) = \pi - a$, $w\,(cc) = \pi - (b' - b)$, $w\,(fc) = \pi - b'$. Man kann daher den vier Ecken folgende tetrasphärische Werte geben:

$$
\begin{array}{l}
(f, f')\ \Theta = \frac{3\pi}{5}, \quad \varphi = \frac{\pi - a}{2}, \quad (f)\ \psi = 0, \quad (f')\ \psi = \pi; \\
(c, c)\ \ \Theta = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi = \frac{b' - b}{2}, \qquad \psi = \pm\frac{\pi}{2}.
\end{array}
$$

Aus diesen folgen die orthogonalen Werte:

$$
\begin{array}{llll}
w = \cos\frac{3\pi}{5}, & x = \sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{a}{2}, & y = \pm\sin\frac{3\pi}{5}\cos\frac{a}{2}, & z = 0; \\
w = \cos\frac{\pi}{3}, & x = -\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{b' - b}{2}, & y = 0, & z = \pm\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{b' - b}{2}.
\end{array}
$$

Für die Durchschnittslösung der Axe wird

$$p = q = \frac{3-\sqrt{5}}{4}, \quad r = s = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad w = \frac{3-\sqrt{5}}{4}.$$

Die 30 Tetraeder $ffcc$ schneiden also die Axe auf der positiven Seite.

IV. Die Tetraeder $fcch$ sind 60 an Zahl. $w(fh) = \pi$, $w(ch) = b'$. Tetrasphärische Werte der Ecken: (f) $\Theta = \frac{3\pi}{5}$, $\varphi = \pi$; (h) $\Theta = \frac{4\pi}{5}$, $\varphi = 0$; (c, c') $\Theta = \frac{\pi}{3}$, $\varphi = b'$, $\psi = \pm\frac{2\pi}{5}$. Orthogonale Werte:

$$\begin{array}{lllll}
(f) & w = -\cos\frac{2\pi}{5}, & x = -\sin\frac{2\pi}{5}, & y = 0, & z = 0; \\
(h) & w = -\cos\frac{\pi}{5}, & x = \sin\frac{\pi}{5}, & y = 0, & z = 0; \\
(c, c') & w = \cos\frac{\pi}{3}, & x = \sin\frac{\pi}{3}\cos b', & y = \sin\frac{\pi}{3}\sin b'\cos\frac{2\pi}{5}, & z = \pm\sin\frac{\pi}{3}\sin b'\sin\frac{2\pi}{5}.
\end{array}$$

Hieraus $r = s = 0$, $p = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$, $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $w = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Also schneiden die 60 Tetraeder $bggd$ die Axe auf der positiven Seite.

V. Die Tetraeder $cche$ sind 60 an Zahl. Tetrasphärische Werte der Ecken: (c, c') $\Theta = \frac{\pi}{3}$, $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{b'-b}{2}$, $\psi = 0, \pi$; (e) $\Theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \pi$; (h) $\Theta = \frac{4\pi}{5}$, $\varphi = \frac{\pi - a}{2}$, $\psi = \frac{\pi}{2}$. Orthogonale Werte:

$$\begin{array}{lllll}
(c, c') & w = \cos\frac{\pi}{3}, & x = \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{b'-b}{2}, & y = \pm\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{b'-b}{2}, & z = 0; \\
(e) & w = 0, & x = -1, & y = 0, & z = 0; \\
(h) & w = -\cos\frac{\pi}{5}, & x = \sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{a}{2}, & y = 0, & z = \sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{a}{2}.
\end{array}$$

$$p = q = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad r = \sqrt{5} - 2, \quad s = 0, \quad w = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Die 60 Tetraeder $cche$ schneiden also die Axe auf der positiven Seite.

VI. Die Tetraeder $chee$ sind 60 an Zahl. Tetrasphärische Werte der Ecken: (h) $\Theta = \frac{4\pi}{5}$, $\varphi = 0$; (e) $\Theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi + a}{2}$, $\psi = \pm\frac{2\pi}{5}$; (c) $\Theta = \frac{\pi}{3}$, $\varphi = b'$, $\psi = \pi$. Orthogonale Werte:

$$(h)\quad w = -\cos\frac{\pi}{5},\quad x = \sin\frac{\pi}{5},\qquad y = 0,\qquad z = 0;$$

$$(e,e')\; w = 0,\qquad x = -\sin\frac{a}{2},\qquad y = \cos\frac{a}{2}\cos\frac{2\pi}{5},\qquad z = \pm\cos\frac{a}{2}\sin\frac{2\pi}{5};$$

$$(c)\quad w = \cos\frac{\pi}{3},\qquad x = \sin\frac{\pi}{3}\cos b',\quad y = -\sin\frac{\pi}{3}\sin b',\quad z = 0.$$

$$p = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2,\; q = r\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3,\; s = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^4,\;\; w = -(\sqrt{5-2}).$$

Also schneiden die 60 Tetraeder *eebg* die Axe auf der positiven Seite.

VII. Die Tetraeder *ceee* sind 20 an Zahl.

$$(c)\quad \Theta = \frac{\pi}{3},\; \varphi = \pi;\; (e,e',e'')\; \Theta = \frac{\pi}{2},\; \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{b'-b}{2},\; \psi = 0,\; \pm\frac{2\pi}{3}.$$

$$(c)\quad w = \cos\frac{\pi}{3},\; x = -\sin\frac{\pi}{3},\quad y = 0,\qquad z = 0;$$

$$(e)\quad w = 0,\qquad x = \sin\frac{b'-b}{2},\quad y = \cos\frac{b'-b}{2},\qquad z = 0;$$

$$(e'e'')\; w = 0,\qquad x = \sin\frac{b'-b}{2},\quad y = -\cos\frac{b'-b}{2}\cos\frac{\pi}{3},\; z = \pm\cos\frac{b'-b}{2}\sin\frac{\pi}{3}.$$

$$p = 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^4,\quad q = r = s = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3,\quad w = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^1.$$

Also schneiden die 20 Tetraeder *ceee* die Axe auf der positiven Seite.

VIII. Die Tetraeder *heeb* sind 60 an Zahl. Jedes hat eine mit der Axe parallele Seite *hb* und schneidet also die Axe im unendlich entfernten Punkte.

Wenn für ein Tetraeder alle vier Faktoren p, q, r, s positiv und von Null verschieden sind, und wenn auch w positiv ist, so umgiebt seine tetrasphärische Projektion den Pol $\Theta = 0$ vollständig. Ist einer jener vier Faktoren gleich Null, so fällt der Punkt der Axe in eine Seitenfläche des Tetraeders; und man muss die zwei Tetraeder, welche diese Seitenfläche gemein haben, zusammennehmen, damit der Pol $\Theta = 0$ von den Projektionen ringsum bedeckt werde; so in V; die Tetraeder *cche* zählen also nur für 30 Deckungen. Sind zwei jener vier Faktoren gleich Null, so liegt der Punkt der Axe auf einer Kante des Tetraeders. Da nun 5 Tetraeder diese Kante gemein haben und 2 mal um dieselbe herumgehen, so wird von den Projektionen dieser 5 Tetraeder zusammen der Pol erst 2 mal ringsum bedeckt. So in IV; die Tetraeder *bggd* zählen also nur für 24 Deckungen.

Demnach geben die Tetraeder *afff* 7, *gddd* 20, *ffcc* 30, *bggd* 24, *cche* 30, *eebg* 60, *ceee* 20, im ganzen 191 Bedeckungen des positiven Pols.

Die tetrasphärische Projektion des überschlagenen Hexakosioschems enthält also 191 totale tetrasphärische Kontinua; und jedes einzelne Tetra-

schem $P_{3,3}$ $\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ ist $\frac{191}{600}$ des totalen tetrasphärischen Kontinuums; folglich $f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{191}{600} \cdot \frac{16}{24} = \frac{191}{900}$. Der rationale Wert dieses Orthoschems ist jetzt auf einem zwar etwas mühsamen, aber direkten Wege durch reine Konstruktion gefunden worden; auch die etwas leichtere, aber weniger direkte Art, wie dieses Orthoschem in § 33 mittelst des Eckenmasses des einfachen Hekatonkaieikosaschems bestimmt wurde, mag hieher gezählt werden. Da sonst alle übrigen rationalen Orthoscheme mit kommensurabeln Argumenten (eines ausgenommen, das wir bald nachher behandeln werden) unmittelbar aus den Konstruktionen des § 17 folgen, so lag es mir daran, auch $f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}\right)$, unabhängig von dem künstlichen Verfahren in § 30, durch direkte Konstruktion zu bestimmen; und man möge es mir verzeihen, wenn dieses nicht ohne Weitläufigkeit geschehen konnte, und wenn ich sogleich noch eine zweite direkte Art, wie dasselbe Resultat durch Konstruktion erreicht werden kann, beifüge.

Denkt man sich beide Hexakosioscheme (3, 3, 5) und $\left(3, 3, \frac{5}{2}\right)$ auf dieselbe Tetrasphäre projiziert, so liegen bei beiden je 5 Tetrascheme um eine gemeinschaftliche Seite herum, beim einfachen mit einmaligem, beim überschlagenen mit doppeltem Umlauf; beim einen hat also das reguläre Tetraschem das Argument $\frac{2\pi}{5}$, beim andern $\frac{4\pi}{5}$. Bezeichnen wir ihre Masse mit $S\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ und $S\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, so wissen wir bereits aus § 17, dass $S\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{600}$ des totalen tetrasphärischen Kontinuums ist; die Bestimmung von $S\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ hängt also nur noch von der Kenntnis des Verhältnisses $S\left(\frac{4\pi}{5}\right) : S\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ ab, und diese kann man direkt erhalten, indem man untersucht, wie viele kleine Tetrascheme das grosse in sich schliesst.

Die Ecken des grossen können wir auf folgende Weise angeben:

$$(I)\ \Theta = 0;\ (II)\ \Theta = \frac{3\pi}{5},\ \varphi = \pi;\ (III)\ \Theta = \frac{3\pi}{5},\ \varphi = a,\ \psi = \mp \frac{2\pi}{5}.$$

Lässt man der Ordnung nach je ein Eck weg und legt durch die drei übrigen und durch das Centrum einen Raum (lineares Kontinuum), so mögen die vier Diametralräume, welche $S\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ begrenzen, durch die Gleichungen $p_1 = 0,\ p_2 = 0,\ p_3 = 0,\ p_4 = 0$ dargestellt sein. Wenn nun die homogenen Polynome p so eingerichtet werden, dass die Summe der Quadrate der Koeffizienten eines jeden gleich 1 ist, und dass sie sämtlich für eine innere Lösung positiv sind, so hat man in tetrasphärischen Variabeln:

$$p_1 = \cos\frac{\pi}{3}\cos\Theta + \sin\frac{\pi}{3}\sin\Theta\cos w, \quad \text{wo } \cos w = -\cos b'\cos\varphi + \sin b'\sin\varphi\cos\psi,$$

$$p_2 = \sin\Theta\left(-\sin\frac{a}{2}\cos\varphi + \cos\frac{a}{2}\sin\varphi\cos\psi\right),$$

$$p_3, p_4 = \sin\Theta\sin\varphi\sin\left(\frac{2\pi}{5}\mp\psi\right).$$

Da $\sin\Theta$, $\sin\varphi$ immer positiv sind, so geben die zwei letzten Polynome für eine innere Lösung die Bedingungen $-\frac{2\pi}{5} < \psi < \frac{2\pi}{5}$. Das Polynom p_2 giebt die Bedingung, dass die äquatoriale Projektion der innern Lösung auf der Halbkugel liegen müsse, deren positiver Pol $\varphi = \frac{\pi + a}{2}$, $\psi = 0$ ist und auf der Mitte einer Seite des äquatorialen Ikosaedernetzes liegt. Alle drei Bedingungen zusammen liefern ein äquatoriales Dreieck, innerhalb dessen die Projektion einer innern Lösung fallen muss, und dessen Ecken die Projektionen von II, III, IV sind. Der Mittelpunkt dieses Dreiecks ist $\varphi = \pi - b'$, $\psi = 0$; das obige w ist also der sphärische Abstand irgend einer äquatorialen Lösung von diesem Mittelpunkt; das Maximum von w findet für die drei Ecken statt und ist b'; daher ist $\cos w$ immer positiv.

Wenn also $\Theta \overline{\overline{<}} \frac{\pi}{2}$ ist, so ist p_1 immer positiv. Ueberhaupt ist p_1 der Kosinus des dritten Winkels eines Kugeldreiecks, worin die zwei Winkel $\frac{\pi}{3}$ und $\pi - \Theta$ die Seite w zwischen sich haben. Für ein konstantes Θ nimmt p_1 ab, wenn w wächst; und der Spielraum von w reicht von $w = 0$ an bis da, wo $p_1 = 0$ wird, darf aber auch nicht über $w = b'$ hinausgehen. Dieser Spielraum fängt also da an beengt zu werden, wo für $w = b'$ zugleich $p_1 = 0$ wird, verengert sich für ein abnehmendes $\pi - \Theta$ immer mehr und verschwindet endlich da, wo $p_1 = 0$ wird für $w = 0$. Aus der Anschauung des sphärischen Ikosaedernetzes ergiebt sich für jenen Anfang $\pi - \Theta = \frac{2\pi}{5}$; dieses Ende verlangt $\cos\left(\Theta - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ oder $\Theta = \frac{5\pi}{6}$. Somit ist die Grenzbedingung $p_1 \overline{\overline{>}} 0$ nur für die Zonen $\Theta = \frac{3\pi}{5}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{5}$ zu untersuchen.

In der Zone $\Theta = \frac{3\pi}{5}$ findet noch keine Verminderung der Ecken statt; nur fallen sie für II, III, IV in die Grenze $p_1 = 0$ hinein.

In der Zone $\Theta = \frac{2\pi}{3}$ kommen nur 10 Mitten von Ikosaederflächen in Betracht, wovon 6 paarweise auf die Seiten des begrenzenden Kugeldreiecks fallen. Es muss sein

$$\cos w \overline{\overline{>}} \operatorname{cotg}^2\frac{\pi}{3} = \frac{1}{3} = -\cos b\cos b' + \sin b\sin b'\cos\frac{\pi}{5},$$

d. h. w darf nicht grösser sein als der sphärische Abstand eines jener sechs Punkte vom Mittelpunkt des genannten Kugeldreiecks. Auch hier ist also in der Zahl der Ecken noch keine Beschränkung; nur fallen die sechs genannten Punkte in die Grenze $p_1 = 0$ und zugleich paarweise auf je eine der drei übrigen Grenzen.

In der Zone $\Theta = \frac{4\pi}{5}$ muss sein $\cos w \geqq \operatorname{cotg} \frac{\pi}{3} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{5} = \cos b$, oder $w \leqq b$. Die in dieser Zone möglichen Ecken werden also auf die drei innersten Ikosaederecken beschränkt, welche zugleich in die Grenze $p_1 = 0$ fallen.

Hier unten sind nun alle Ecken des einfachen Hexakosioschems, deren Projektionen auf oder innerhalb das grosse Tetraschem $S\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ kommen, nach der in § 17 eingeführten Bezeichnung aufgezählt. Die, welche in eine Grenzfläche, Grenzkante fallen, sind resp. mit einem, zwei übergesetzten Strichen versehen, die mit einem Eck des grossen Tetraschems zusammenfallenden mit der betreffenden römischen Ziffer.

a I;

$b_2, b_{11}, b_7, \overline{\overline{b_{12}}}, \overline{\overline{b_6}}, \overline{\overline{b_3}}$;

$c_{11}, c_{10}, c_6, c_{16}, \overline{c_5}, \overline{c_1}, \overline{c_{15}}, \overline{c_{20}}, \overline{c_{17}}, c_{12}$;

$d_2, d_{11}, d_7, d_{12}, d_6, d_3$;

$e_{20}, e_{11}, e_{21}, e_6, e_{12}, e_{26}, e_{30}, e_{19}, e_{10}, e_1, e_{25}, e_{22}$;

f_2, f_{11}, f_7, f_{12} II, f_6 III, f_3 IV;

$g_{11}, g_{10}, g_6, g_{16}, g_5, g_1, g_{15}, g_{20}, g_{17}, g_{12}$;

h_2, h_{11}, h_7.

Die von diesen Ecken gebildeten Tetrascheme sind teils ganz, teils durch die Grenzen p halbiert; bei den letztern geht die Grenze immer durch eine Seite des Tetraschems und die Mitte der Gegenseite; dass es sich so verhält, und dass demnach wirklich Halbierung eintritt, ist für ein einzelnes Tetraschem nicht schwer zu beweisen; aber die Aufzählung aller einzelnen Fälle wäre zu weitläufig. Ich gebe daher sogleich die Uebersicht aller ganzen und halben Tetrascheme $S\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, in welche das vorhin beschriebene grosse Tetraschem $S\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ zerfällt.

$abbb$	4 ganze,	6	halbe	$deef$	18 ganze,	6	halbe
$bbbc$	4 „	6	„	$eeeg$	4 „	6	„
$bbcc$	9 „	3	„	$eefg$	18 „	6	„
$bccd$	21 „	—		$efgg$	21 „	—	
$ccde$	21 „	—		$fggh$	15 „	6	„
$cdee$	18 „	6	„	$gghh$	3 „	6	„
$ceee$	4 „	6	„	$ghhh$	1 „	3	„

Addiert man alles zusammen, so erhält man

$$S\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 191 \,.\, S\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

Es giebt noch ein Paar reciproker Polyscheme, deren Ecken mit denen des einfachen Hexakosioschems zusammenfallen. Sie entsprechen den Charakteren $\left(5, 3, \frac{5}{2}\right)$ und $\left(\frac{5}{2}, 3, 5\right)$ und mögen die zwei amphibolen Hekatonkaieikosascheme heissen. Wirklich ist $\sin\frac{\pi}{5} \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{4} > \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$. Ist nun 1 die Seite eines überschlagenen Ikosaeders $\left(3, \frac{5}{2}\right)$, so ist sein Radius $\sin\frac{\pi}{5}$; die genannte Seite ist aber zugleich Diagonale des Fünfecks des einfachen Dodekaeders (5, 3), das als Bestandteil des Umschlusses des gesuchten Polyschems auftritt; die Seite dieses Fünfecks oder die Seite des Polyschems ist also $2\sin\frac{\pi}{10}$; wenn daher a den entsprechenden tetrasphärischen Centriwinkel bezeichnet, so ist $\cos\frac{a}{2} = \sin\frac{\pi}{5} : 2\sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{10}$; folglich $a = \frac{\pi}{5}$, gerade wie beim einfachen Hexakosioschem. Bei diesem kennen wir nun schon eine dodekaedrische Gruppe von Ecken; sie wurden mit c bezeichnet und lagen in der Zone $\Theta = \frac{\pi}{3}$. Der Radius der eingeschriebenen Tetrasphäre ist also halb so gross als derjenige der umschriebenen; d. h. wenn die zwei amphibolen Hekatonkaieikosascheme derselben Tetrasphäre eingeschrieben sind, wie das Oktoschem und Hekkaidekaschem, so sind sie auch mit ihnen derselben Tetrasphäre umschrieben. Jedes derselben hat 120 Ecken, 720 Seiten, 720 Fünfecke und 120 Dodekaeder.

Wir wollen nun untersuchen, wie oft der Umschluss dieses Polyschems $\left(5, 3, \frac{5}{2}\right)$ sich auf die Tetrasphäre projiziert. Ordnet man die einfachen Dodekaeder zonenweise um den Pol a, so bedeckt erstens das Dodekaeder $(c\,c\,c\ldots)$, welches diesen Pol a zum tetrasphärischen Centrum hat, denselben ringsum; zweitens kommen die 20 Dodekaeder, deren Centra die Ecken c sind, und welche um das gemeinschaftliche Eck a herum, wie die Dreiecke eines überschlagenen Ikosaeders $\left(3, \frac{5}{2}\right)$ auf einander folgen, in Betracht; sie bedecken den Pol a nur 7 mal, weil auch das $\left(3, \frac{5}{2}\right)$ einen 7fachen Mantel hat; drittens gehören die 12 Dodekaeder, welche die Ecken b zu Centren haben, hieher; jedes derselben bedeckt den Pol a ringsum. Da es nun sonst keine Dodekaeder giebt, deren Projektionen den Pol a erreichen, so wird derselbe $1 + 7 + 12 = 20$ mal bedeckt. Das Polyschem $\left(5, 3, \frac{5}{2}\right)$ projiziert sich also 20 mal auf die Tetrasphäre.

Dasselbe Resultat erhalten wir, wenn wir nachsehen, wie viele Tetraeder des $(3, 3, 5)$ auf ein Dodekaeder des $\left(5, 3, \frac{5}{2}\right)$ gehen. Wird dieses von den Ecken c gebildet, so umfasst es ganze Tetraeder, die 20 $abbb$, 20 $bbbc$, 30 $bbcc$ und die 60 halben Tetraeder $bccd$. Dass diese von den sphärischen Fünfecken des Dodekaeders wirklich halbiert werden, davon überzeugt man sich am leichtesten, wenn man eine Gruppe von je 5 um eine gemeinschaftliche Seite herum liegenden Tetraedern unter den Pol bringt; es sei dann $a b_1$ die gemeinschaftliche Kante, die Gegenkanten bilden das sphärische Fünfeck $b_2 b_3 b_4 b_5 b_6$; die Kugelfläche des letzten halbiert den Kreisbogen $a b_1 = \frac{\pi}{5}$; denn jene ist durch die Gleichung $\frac{x}{w} = \operatorname{tang} \frac{\pi}{5} \cos a = \operatorname{tang} \frac{\pi}{10}$, dieser durch die Gleichungen $y = 0$, $z = 0$ bestimmt. Wenn man also immer die tetrasphärischen Projektionen betrachtet, so ist das Tetraeder im Dodekaeder 100 mal enthalten. Da nun jenes $\frac{1}{600}$ des tetrasphärischen Kontinuums beträgt, so ist dieses $\frac{1}{6}$, und der ganze aus 120 Dodekaedern bestehende Umschluss zählt 20 tetrasphärische Kontinua. Demnach ist

$$f\left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}\right) = 20\, f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{45}.$$

Zum Schlusse muss ich noch bemerken, dass, obschon das Orthoschem $f\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right)$ einen rationalen Wert hat, doch der Charakter $\left(\frac{5}{2}, 5, 3\right)$ kein echtes Polyschem darstellt, weil auch im Raume der Charakter $\left(5, \frac{5}{2}\right)$ zwar ein Gebilde, das mit dem Ikosaeder die Ecken gemein hat, aber kein echtes Polyeder darstellt. Dasselbe genügt nämlich der Bedingung $a_0 - a_1 + a_2 = 2$ nicht.

§ 35. Ueber die Summe der Quadrate der Projektionen eines Strahls auf symmetrisch verteilte Richtungen.

Wir werden in diesem Paragraphen Fälle kennen lernen, wo mehrere von einem gemeinschaftlichen Centrum ausgehende feste Strahlen r die Eigenschaft haben, dass nicht nur die Summe der Projektionen irgend eines beliebigen Strahles s auf alle jene festen Strahlen verschwindet, sondern dass auch das arithmetische Mittel der Quadrate der Projektionen gleich ist dem Quadrat des Strahls s, dividiert durch die Dimensionszahl der Totalität. Um diese Eigenschaft kurz bezeichnen zu können, wollen wir jene festen Strahlen r eutaktisch nennen. Von dieser Erklärung ausgehend, können wir nun folgenden Hilfssatz aussprechen:

Wenn in der n-fachen Totalität λ eutaktische Strahlen r gegeben sind, und es gehören zu jedem derselben als Axe μ seitliche Strahlen ϱ, welche

durchweg mit ihrer Axe denselben Winkel a bilden und überdies so um dieselbe geordnet sind, dass immer ihre äquatorialen Projektionen eine Gruppe von μ eutaktischen Strahlen einer $(n-1)$-fachen Totalität darstellen, so sind alle $\lambda\mu$ Strahlen ϱ zusammen eutaktisch für die n-fache Totalität.

(Unter äquatorialen Projektionen verstehe ich die Projektionen auf das zur jeweiligen Axe normale $(n-1)$-fache lineare Kontinuum, und den Winkel zwischen den äquatorialen Projektionen zweier Strahlen werde ich ihr Azimut nennen.)

Beweis. Bezeichnet φ den Winkel, den der Strahl s (von der Länge 1) mit irgend einem festen Strahl r bildet, so ist vermöge der eutaktischen Eigenschaft aller Strahlen r:

$$\Sigma \cos\varphi = 0, \quad \Sigma \cos^2\varphi = \frac{\lambda}{n}, \quad \text{also } \Sigma \sin^2\varphi = \frac{(n-1)\lambda}{n}.$$

Bedeutet ferner ψ das Azimut zwischen dem Strahl s und einem Strahl ϱ in Beziehung auf seine Axe r, so ist

$$\Sigma \cos\psi = 0, \quad \Sigma \cos^2\psi = \frac{\mu}{n-1},$$

wenn diese Summe sich nur auf die μ Strahlen ϱ, welche zu derselben Axe gehören, erstrecken. Ist nun w der wahre Winkel zwischen s und ϱ, so ist

$$\cos w = \cos a \cos\varphi + \sin a \sin\varphi \cos\psi;$$

folglich

$$\Sigma \cos w = \mu \cos a \cos\varphi, \qquad \Sigma \cos^2 w = \mu \cos^2 a \cos^2\varphi + \frac{\mu}{n-1} \sin^2 a \sin^2\varphi, \tag{1}$$

und wenn man die Summen links auf alle Strahlen φ ausdehnt, vermöge der zuerst gesetzten Gleichungen,

$$\Sigma \cos w = 0, \quad \Sigma \cos^2 w = \mu \cos^2 a \cdot \frac{\lambda}{n} + \frac{\mu}{n-1} \sin^2 a \cdot \frac{(n-1)\lambda}{n} = \frac{\lambda\mu}{n}, \tag{2}$$

was zu beweisen war.

Wir wollen nun zeigen, dass für jedes reguläre Polyschem die von seinem Centrum nach seinen Ecken gehenden Strahlen eutaktisch sind, indem wir, bei der Ebene anfangend, nach und nach immer zu einer höheren Totalität fortgehen.

I. Zweifache Totalität. Die Formeln

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \cos\left(\alpha + \frac{2i\pi}{n}\right) = 0 \text{ für } n = 2, 3, 4, \ldots, \text{ und } \sum_{i=0}^{i=n-1} \cos^2\left(\alpha + \frac{2i\pi}{n}\right) = \frac{n}{2} \text{ für } n > 2$$

sind bekannt; folglich sind die Radien jedes regulären Vielecks eutaktisch.

II. Dreifache Totalität. Dass die Summe der Projektionen eines Strahl s auf alle nach den Ecken gehenden Radien r eines regulären Polyeders verschwindet, folgt mit Ausnahme des Tetraeders bei den vier übrigen daraus, dass je zwei Radien einander entgegengesetzt sind. Beim Tetraeder kann man es daraus schliessen, dass das Centrum zugleich Schwerpunkt der Ecken ist.

Wenn μ Ecken des regulären Polyeders in einer durch den Polabstand a bestimmten Zone liegen, so sind die äquatorialen Projektionen der entsprechenden Radien ϱ offenbar eutaktisch als Radien eines regulären μ-Ecks. Sind dann φ, w die Winkel, welche ein Strahl s mit der Axe und mit einem Strahl ϱ bildet, so ist nach (1)

$$p = \Sigma \cos w = \mu \cos a \cos \varphi, \quad q = \Sigma \cos^2 a = \mu \cos^2 a \cos^2 \varphi + \frac{\mu}{2} \sin^2 a \sin^2 \varphi.$$

Diese allgemeinen Formeln wollen wir nun auf jedes einzelne reguläre Polyeder anwenden und in Bezug auf alle Zonen summieren.

1. Tetraeder. Ein Radius gehe nach dem Pol; für diesen ist $p = \cos \varphi$, $q = \cos^2 \varphi$. Die drei übrigen Radien bilden eine Zone, deren Poldistanz a durch $\cos a = -\frac{1}{3}$ bestimmt ist, also $p = -\cos \varphi$, $q = \frac{1}{3} \cos^2 \varphi + \frac{4}{3} \sin^2 \varphi$. Wird die Summe aller Projektionen mit P, die Summe ihrer Quadrate mit Q bezeichnet, so ist $P = 0$, $Q = \frac{4}{3}$.

2. Oktaeder. Die 6 Radien können als positive und negative Hälften der Axen eines rechtwinkligen Koordinatensystems aufgefasst werden. Also ist $P = 0$, $Q = 2$.

3. Ikosaeder. Für den nach dem Pol gehenden Radius ist $q = \cos^2 \varphi$. Dann kommt eine Zone, wo $\cos a = \sqrt{\frac{1}{5}}$, $\mu = 5$ ist, für diese also $q = \cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi$. Die übrigen 6 Radien sind diesen entgegengesetzt; somit $Q = 4$.

Aus den Werten von Q ist ersichtlich, dass die Radien eines jeden der drei angeführten Polyeder eutaktisch sind. Werden nun vom Centrum aus nach den Mittelpunkten der in einem Eck zusammentreffenden Vielecke Strahlen gezogen und das Eck selbst als Pol aufgefasst, so sind die äquatorialen Projektionen jener Strahlen eutaktisch. Wird das Gleiche in Beziehung auf jedes Eck wiederholt, so fallen im Mittelpunkt jedes Vielecks so viele Strahlen zusammen, als dasselbe Ecken zählt, und da alle diese nach (2) eutaktisch sind, so wird man hieraus auch leicht auf die Eutaxie des Systems schliessen, worin jeder nach dem Mittelpunkt eines Vielecks gehende Strahl nur einmal gezählt wird, d. h. auf die Eutaxie der Radien des reciproken Polyeders. Also sind auch die Radien des Hexaeders und Dodekaeders eutaktisch, und die Eutaxie ist somit für alle regulären Polyeder bewiesen.

Durch eine ähnliche Betrachtung wird man sich auch überzeugen, dass alle Strahlen, welche vom Centrum eines regulären Polyeders nach den Mitten seiner Kanten gehen, eutaktisch sind.

III. Vierfache Totalität. Wird ein Eck eines regulären Polyschems als Pol aufgefasst, so können die übrigen nach Zonen geordnet werden; und da alle zu einer Zone gehörenden Ecken sich entweder geradezu wie Ecken eines regulären Polyeders oder wie Kantenmitten eines solchen verhalten, so sind die äquatorialen Projektionen der entsprechenden Radien des Polyschems eutaktisch. Wenn daher μ, a, φ, p, q eine ähnliche Bedeutung haben wie oben, so ist

$$p = \mu \cos a \cos \varphi, \quad q = \mu \cos^2 a \cos^2 \varphi + \frac{\mu}{3} \sin^2 a \sin^2 \varphi.$$

1. Pentaschem. Für das als Pol gewählte Eck ist $p = \cos \varphi$, $q = \cos^2 \varphi$; für die 4 übrigen ist $\cos a = -\frac{1}{4}$, daher $p = -\cos \varphi$, $q = \frac{1}{4} \cos^2 \varphi + \frac{5}{4} \sin^2 \varphi$; also $P = 0$, $Q = \frac{5}{4}$.

2. Hekkaidekaschem. Die 8 Radien können als positive und negative Hälften der Axen eines orthogonalen Systems gefasst werden; also ist $Q = 2$.

Ist die Eutaxie von den Radien irgend eines regulären Polyschems bewiesen, so folgt sie vermöge (II) und (2) auch für das reciproke Polyschem. Sie ist also nun auch für das Oktoschem bewiesen.

Da das Eikosikaitetraschem die Ecken des Hekkaidekaschems mit denen des Oktoschems vereinigt, so sind auch seine Radien eutaktisch.

3. Hexakosioschem.

$$(a) \quad a = 0, \quad \mu = 1, \quad q = \cos^2 \varphi,$$

$$(b) \quad a = \frac{\pi}{5}, \quad \mu = 12, \quad q = 12 \cos^2 \frac{\pi}{5} \cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \frac{\pi}{5} \sin^2 \varphi,$$

$$(c) \quad a = \frac{\pi}{3}, \quad \mu = 20, \quad q = 5,$$

$$(d) \quad a = \frac{2\pi}{5}, \quad \mu = 12, \quad q = 12 \cos^2 \frac{2\pi}{5} \cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \frac{2\pi}{5} \sin^2 \varphi,$$

$$(e) \quad a = \frac{\pi}{2}, \quad \mu = 30, \quad q = 10 \sin^2 \varphi.$$

Die Werte von q für die Ecken (a), (b), (c), (d) sind doppelt zu nehmen wegen der entgegengesetzten Radien. Da

$$\cos^2 \frac{\pi}{5} + \cos^2 \frac{2\pi}{5} = \frac{3}{4}, \quad \sin^2 \frac{\pi}{5} + \sin^2 \frac{2\pi}{5} = \frac{5}{4}$$

ist, so wird $Q = 30 = \frac{120}{4}$. Wegen der paarweise entgegengesetzten Radien ist ohnehin $P = 0$.

Aus der Eutaxie des Hexakosioschems folgt sogleich auch diejenige des Hekatonkaieikosaschems.

IV. n-fache Totalität.

1. Reguläres $(n+1)$-Schem $(3, 3, \ldots 3, 3)$. Für das zum Pol gewählte Eck ist $p = \cos\varphi$, $q = \cos^2\varphi$; für die n übrigen ist $\cos a = -\frac{1}{n}$, also $p = -\cos\varphi$, $q = \frac{1}{n}\cos^2\varphi + \frac{n+1}{n}\sin^2\varphi$; also zuletzt $P = 0$, $Q = \frac{n+1}{n}$.

2. Reguläres $2n$-Schem $(3, 3, \ldots 3, 4)$. Alle $2n$ Radien können als positive und negative Hälften der Axen des orthogonalen Systems aufgefasst werden; also $Q = 2 = \frac{2n}{n}$.

Hieraus folgt die Eutaxie auch für das reciproke Polyschem, d. h. für das $2n$-Schem $(4, 3, 3, \ldots 3, 3)$.

Ich muss noch bemerken, dass in dem für das $(n+1)$-Schem geführten Beweise die Richtigkeit der Formel für die $(n-1)$-fache Totalität schon vorausgesetzt ward.

Wir können das Bisherige in folgenden allgemeinen Satz zusammenfassen:

Wenn in der n-fachen Totalität mehrere (mehr als zwei) von einem gemeinschaftlichen Centrum ausgehende Strahlen, welche die Einheit zur Länge haben, auf reguläre Art geordnet sind, und man projiziert sie auf irgend eine Richtung, so ist 1. die Summe aller Projektionen gleich Null, 2. das arithmetische Mittel der Quadrate dieser Projektionen gleich $\frac{1}{n}$.

Es seien $a, b, \ldots$ die n Kosinus der Winkel, welche einer der λ eutaktischen Strahlen mit den orthogonalen Axen bildet, $p, q, \ldots$ dieselben Grössen für irgend einen einzigen Strahl s, so ist

$$\Sigma(ap + bq + \cdots)^2 = \frac{\lambda}{n}.$$

Da aber $p, q, \ldots$ beliebig sind, so folgt

$$\Sigma a^2 = \frac{\lambda}{n}, \quad \Sigma b^2 = \frac{\lambda}{n}, \text{ etc.,} \quad \Sigma ab = 0, \text{ etc.}$$

Ist nun noch ein zweiter Einzelstrahl s' durch die Richtungskosinus $p', q', \ldots$ bestimmt, und Θ der Winkel zwischen den Strahlen s und s', also $\cos\Theta = pp' + qq' + \cdots$, so folgt aus dem Vorigen leicht:

$$\Sigma(ap + bq + \cdots)(ap' + bq' + \cdots) = \frac{\lambda}{n}\cos\Theta.$$

Aus dieser für eutaktische Strahlen überhaupt geltenden Formel folgt im besondern der Satz:

Wenn in der n-fachen Totalität Radien nach allen Ecken eines regulären Polyschems gehen, und man multipliziert für jeden derselben die Kosinus der Winkel, welche er mit zwei beliebig gegebenen Richtungen bildet, so ist das arithmetische Mittel aller so erhaltenen Produkte gleich dem n-ten Teile des Kosinus des von den zwei gegebenen Richtungen gebildeten Winkels.

Diesem Satz, der endliche Summen zum Gegenstand hat, ist ein ähnlicher an die Seite zu setzen, welcher den Wert eines bestimmten Integrals angiebt. Da sein Beweis von gleicher Natur mit den in § 19 geführten Rechnungen ist, so spreche ich hier nur den Satz selbst aus, ohne in jenen mich einzulassen.

Wird das totale n-sphärische Kontinuum in lauter unendlich kleine Elemente geteilt, nach jedem derselben ein Radius gezogen und das Produkt der Kosinusse der Winkel, welche dieser Radius mit zweien beliebigen festen Richtungen bildet, mit dem entsprechenden Element selbst multipliziert, so ist die Summe aller so erhaltenen Produkte gleich dem n-ten Teile des totalen sphärischen Kontinuums, multipliziert mit dem Kosinus des Winkels der zwei festen Richtungen.

Dritter Teil.

Verschiedene Anwendungen der Theorie der vielfachen Kontinuität, welche das Gebiet des Linearen und Sphärischen übersteigen.

§ 36. *Bestimmung des Centrums eines quadratischen Kontinuums.*

Aufgabe. Es sei irgend eine Gleichung zweiten Grades mit den n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ gegeben; man soll den Ursprung so versetzen, dass die mit den ersten Potenzen der neuen Variabeln behafteten Glieder aus der Gleichung wegfallen.

Auflösung. Es seien $t_1, t_2, \ldots t_n$ die Werte der Variabeln für den gesuchten Ursprung, $y_1, y_2, \ldots y_n$ die neuen Variabeln und t_0 ein die Einheit bezeichnendes Symbol, durch dessen Einführung die gegebene Funktion homogen wird. Das Polynom der gegebenen Gleichung gehe in T über, wenn darin $1, x_1, x_2, \ldots x_n$ durch $t_0, t_1, t_2, \ldots t_n$ ersetzt werden, und es sei

$$D = y_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \cdots + y_n \frac{\partial}{\partial t_n},$$

so ist die transformierte Gleichung

$$T + D\,T + \frac{1}{2} D^2\,T = 0,$$

und die Aufgabe ist erfüllt, wenn, unabhängig von den Werten der neuen Variabeln, $D\,T = 0$ ist. Diese Bedingung zerfällt in die n linearen Gleichungen

$$\frac{\partial T}{\partial t_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t_2} = 0, \ldots \quad \frac{\partial T}{\partial t_n} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und so viele sind im allgemeinen nötig und hinreichend, um die n Konstanten $t_1, t_2, \ldots t_n$ zu bestimmen. Da die Gleichung

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial t_0} t_0 + \frac{\partial T}{\partial t_1} t_1 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial t_n} t_n\right)$$

in identischer Weise besteht, so reduziert sich die neue Gleichung des $(n-1)$-fachen Kontinuums auf

$$\frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial t_0}+\frac{1}{2}D^2 T=0. \quad \dots \dots \dots \dots \quad (2)$$

Ist irgend eine Lösung $(y_1, y_2, \dots y_n)$ bekannt, welche dieser Gleichung genügt, so wird nun auch die Lösung $(-y_1, -y_2, \dots -y_n)$, worin sämtliche Werte der Variabeln den vorigen gleich und entgegengesetzt sind, genügen. Jeder durch den Ursprung gehende und vom Kontinuum begrenzte Strahl wird also durch den Ursprung halbiert. Daher soll dieser Ursprung das Centrum des $(n-1)$-fachen Kontinuums zweiten Grades heissen.

Können die Gleichungen (1) nur befriedigt werden, indem man $t_0 = 0$ setzt, oder sind sie nicht alle unter sich unabhängig, so hat das Kontinuum kein wahres Centrum.

Wenn mit dem Bestand der Gleichungen (1) zugleich auch $\frac{\partial T}{\partial t_0}=0$ wird, so wird die Gleichung (2) in Beziehung auf die n neuen Variabeln homogen, und das Centrum selbst befindet sich im Kontinuum. Ist irgend eine andere Lösung $(y_1, y_2, \dots y_n)$ bekannt und bedeutet k einen willkürlichen Faktor, so wird auch die Lösung $(ky_1, ky_2, \dots ky_n)$ der Gleichung (2) genügen. Da somit jeder das Centrum mit irgend einer andern Lösung des Kontinuums verbindende Strahl ganz in dasselbe hineinfällt, so möge es strahliges Kontinuum zweiten Grades heissen. Für ein solches muss demnach die Determinante der Koeffizienten aller $n+1$ abgeleiteten linearen Polynome von T verschwinden; aber dieses Merkmal ist nicht hinreichend, wenn die vorhin erwähnten Ausnahmsfälle eintreten.

§ 37. *Bestimmung der Hauptaxen.*

Es sei $f(x, y, z, \dots)$ eine homogene Funktion zweiten Grades der n orthogonalen Variabeln $x, y, \dots$, und $f(x, y, \dots) = 1$ die Gleichung eines Kontinuums zweiten Grades, wo das Centrum als Ursprung angenommen ist. Eine orthogonale Transformation der Variabeln stellt $\frac{1}{2}n(n-1)$ Elemente zur Verfügung. Die Zahl der Glieder in $xy, xz, \dots$ ist gleich gross. Daher ist es möglich, die Variabeln so orthogonal zu transformieren, dass in der Gleichung des Kontinuums die Produkte der Variabeln wegfallen, und nur die Quadrate bleiben.

Es sei $x = at + a't' + a''t'' + \cdots$, $y = bt + b't' + b''t'' + \cdots$, etc. die gesuchte orthogonale Transformation und $pt^2 + p't'^2 + p''t''^2 + \cdots = 1$ die transformierte Gleichung des Kontinuums. Es sei ferner

$$\frac{1}{2}df(x, y, \dots) = X dx + Y dy + \cdots,$$

und wenn in den linearen Polynomen $X, Y, \ldots$ die alten Variabeln durch $a, b, \ldots$ ersetzt werden, so wollen wir sie durch $A, B, \ldots$ bezeichnen, und ähnlich mit Accenten. Dann ist

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t} = Xa + Yb + \cdots = Ax + By + \cdots = pt,$$

u. s. f. mit Accenten. Diese Gleichung schliesst in sich die n Gleichungen:

$$\begin{aligned} &Aa + Bb + Cc + \cdots = p\,, \\ &Aa' + Bb' + Cc' + \cdots = 0\,, \\ &Aa'' + Bb'' + Cc'' + \cdots = 0\,, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Multipliziert man diese mit $a, a', a'', \ldots$ und addiert sie, ebenso mit $b, b', b'', \ldots$, u. s. f., so ergeben sich die Gleichungen

$$A - pa = 0, \quad B - pb = 0, \quad C - pc = 0, \ldots \qquad (3)$$

Diese n Gleichungen sind in Beziehung auf $a, b, c, \ldots$ homogen und linear. Man kann also die $n-1$ Verhältnisse dieser Richtungskosinus eliminieren und wird eine Gleichung n-ten Grades $P = 0$ erhalten, in der die einzige Unbekannte p vorkommt. Es sei p eine Wurzel dieser Gleichung, so wird dieser im allgemeinen nur ein System von Richtungskosinussen $a, b, c, \ldots$ entsprechen; und die in Beziehung auf die einzelnen Elemente der Determinante P abgeleiteten Funktionen derselben werden mit $a^2, ab, ac, \ldots$; $ab, b^2, bc, \ldots$; $ac, bc, c^2, \ldots$; ... proportional sein. Wenn also $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die in die Diagonale fallenden abgeleiteten Funktionen der Determinante bezeichnen, so ist

$$a^2 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma + \cdots}, \quad b^2 = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma + \cdots}, \quad c^2 = \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \cdots}, \ldots$$

Für eine zweite von p verschiedene Wurzel p_1 der Gleichung $P = 0$ mögen $a, b, c, \ldots$, $A, B, \ldots$ in $a_1, b_1, \ldots, A_1, B_1, \ldots$ übergehen, so ist auch

$$A_1 = p_1 a_1, \quad B_1 = p_1 b_1, \quad C_1 = p_1 c_1, \ldots.$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit $a, b, c, \ldots$ und addiert sie, so ergiebt sich

$$p_1(aa_1 + bb_1 + cc_1 + \cdots) = A_1 a + B_1 b + \cdots = Aa_1 + Bb_1 + \cdots = p(aa_1 + bb_1 + \cdots)$$

oder
$$(p - p_1)(aa_1 + bb_1 + cc_1 + \cdots) = 0;$$

folglich
$$aa_1 + bb_1 + cc_1 + \cdots = 0. \qquad (4)$$

Wäre p imaginär, so könnte p_1 die konjugierte Wurzel sein; dann wären auch a, a_1; b, b_1; ... konjugiert, und daher könnte keines der Produkte $a a_1, b b_1, \ldots$ negativ sein, was der Gleichung (4) widerspricht. Die Gleichung $P = 0$ hat also lauter reelle Wurzeln.

Die Elemente der Determinante P seien $\binom{1}{1}, \binom{1}{2}, \binom{1}{3}, \ldots \binom{1}{n}$, etc., wo immer $\binom{h}{i} = \binom{i}{h}$, und, abgesehen von dieser Gleichheit je zweier in Beziehung auf die Diagonale gleichliegender Elemente, sei

$$\frac{\partial P}{\partial \binom{1}{\alpha}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial \binom{1}{\alpha}\ \partial \binom{2}{\beta}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}, \text{ etc.}$$

Da nun $\dfrac{\partial \binom{\alpha}{\alpha}}{\partial p} = -1$ ist, so folgt leicht, wenn P als Funktion von p aufgefasst und $P\,(p + w)$ nach steigenden Potenzen des Inkrements w entwickelt wird,

$$P(p + w) = P(p) - w\,\Sigma \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} + w^2\,\Sigma \begin{bmatrix} \alpha\,\beta \\ \alpha\,\beta \end{bmatrix} - w^3\,\Sigma \begin{bmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma \\ \alpha\,\beta\,\gamma \end{bmatrix} + \cdots + (-w)^n. \quad . \quad . \quad (5)$$

Hat nun die Gleichung $P\,(p) = 0$ nicht lauter ungleiche Wurzeln, und bezeichnet z. B. p eine Wurzel, welche m mal vorkommt, so behaupte ich, dass für diesen Wert von p alle $(m-1)$-ten abgeleiteten Funktionen von P (bloss formell verstanden, wie wenn sämtliche n^2 Elemente der Determinante P von einander unabhängig wären) verschwinden müssen. Zunächst ist nämlich klar, dass auf der rechten Seite der Gleichung (5) die Koeffizienten von $w^0, w^1, w^2, \ldots w^{m-1}$ verschwinden müssen; und es soll gezeigt werden, dass daraus das Verschwinden aller $(m - 1)$-ten Abgeleiteten der Determinante P mit Notwendigkeit folgt. Ist dieses für $m - 1$ gleiche Wurzeln schon geschehen, so kann man auch ferner beweisen, dass es für m gleiche Wurzeln gilt. Um nicht weitläufig zu werden, wollen wir $m = 4$ setzen; das allgemeine ist aus diesem besondern Fall leicht zu entnehmen. Da, wenn die Behauptung für $m = 3$ richtig ist, die zweiten Abgeleiteten von P einzeln verschwinden, so kann man setzen:

$$\begin{aligned} \binom{1}{i} &= \lambda_4 \binom{4}{i} + \lambda_5 \binom{5}{i} + \cdots + \lambda_n \binom{n}{i}, \\ \binom{2}{i} &= \mu_4 \binom{4}{i} + \mu_5 \binom{5}{i} + \cdots + \mu_n \binom{n}{i}, \\ \binom{3}{i} &= \nu_4 \binom{4}{i} + \nu_5 \binom{5}{i} + \cdots + \nu_n \binom{n}{i}, \end{aligned}$$

wofern nur nicht alle dritten Abgeleiteten der Determinante P auch verschwinden (in welchem Falle übrigens das zu Beweisende schon statt hätte). Dann ist, wenn die Zeiger α, β, γ von 1, 2, 3 verschieden sind,

$$\begin{bmatrix} 2\,3\,\alpha \\ 2\,3\,\alpha \end{bmatrix} = \lambda_\alpha^{\,2} \cdot \begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{bmatrix}, \text{ etc.,} \quad \begin{bmatrix} 1\,\alpha\,\beta \\ 1\,\alpha\,\beta \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_\alpha \cdot \mu_\beta \\ \nu_\alpha \cdot \nu_\beta \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{bmatrix}, \text{ etc.}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma \\ \alpha\,\beta\,\gamma \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_\alpha \cdot \lambda_\beta \cdot \lambda_\gamma \\ \mu_\alpha \cdot \mu_\beta \cdot \mu_\gamma \\ \nu_\alpha \cdot \nu_\beta \cdot \nu_\gamma \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{bmatrix}, \text{ etc.;}$$

also

$$\Sigma \begin{bmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma \\ \alpha\,\beta\,\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{bmatrix} \Big\{ 1 + \lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \cdots + \lambda_n^2 + \mu_4^2 + \mu_5^2 + \cdots + \mu_n^2 + \nu_4^2 + \nu_5^2 + \cdots + \nu_n^2$$
$$+ \begin{vmatrix} \mu_4 \cdot \mu_5 \\ \nu_4 \cdot \nu_5 \end{vmatrix}^2 + \text{etc.} + \begin{vmatrix} \lambda_4 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\ \mu_4 \cdot \mu_5 \cdot \mu_6 \\ \nu_4 \cdot \nu_5 \cdot \nu_6 \end{vmatrix}^2 + \text{etc.} \Big\}.$$

Diese Formeln gelten für drei gleiche Wurzeln. Sind vier gleiche vorhanden, so muss die Summe $\Sigma \begin{bmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma \\ \alpha\,\beta\,\gamma \end{bmatrix}$, wo jetzt α, β, γ beliebige Zeiger mit Einschluss von 1, 2, 3 bedeuten, gleich Null sein. Da aber im vorigen Ausdruck für dieselbe das mit ihrem ersten Gliede $\begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{bmatrix}$ multiplizierte Aggregat aus lauter Quadraten besteht, von denen eines 1 ist, so kann dieses Aggregat nicht verschwinden; weshalb notwendig der andere Faktor, das erste Glied $\begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{bmatrix}$ der Summe, verschwindet. Das gleiche kann aber auch von jedem andern einzelnen Gliede der Summe $\Sigma \begin{bmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma \\ \alpha\,\beta\,\gamma \end{bmatrix}$ gezeigt werden. Aus $\begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{bmatrix} = 0$ folgt, dass man setzen darf:

$$\binom{4}{i} = \xi_5 \binom{5}{i} + \xi_6 \binom{6}{i} + \cdots + \xi_n \binom{n}{i}, \quad [i = 4, 5, 6, \ldots n], \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

sobald nur nicht alle $\begin{bmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,3\,i \end{bmatrix}$ verschwinden, was man immer wird vermeiden können, wenn ausser den vier ersten Elementenreihen nicht auch noch die fünfte von den übrigen abhängt (in welchem Falle alle vierten Abgeleiteten der Determinante P verschwänden, also fünf gleiche Wurzeln vorhanden wären). Multipliziert man mit λ_i und summiert nach $i = 4, 5, \ldots n$, so erhält man

$$\binom{4}{1} = \xi_5 \binom{5}{1} + \xi_6 \binom{6}{1} + \cdots + \xi_n \binom{n}{1},$$

ähnliche Ausdrücke für $\binom{4}{2}$, $\binom{4}{3}$. Die Formel (6) gilt also für $i = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots n$. Da somit jede der vier ersten Horizontalreihen in ihrer ganzen Ausdehnung von den

übrigen abhängt, so müssen alle Determinanten, welche durch Weglassung von drei Horizontalreihen entstehen, verschwinden, d. h. alle dritten Abgeleiteten von P. Wenn also obige Behauptung für $m = 3$ richtig ist, so gilt sie auch für $m = 4$; und es ist leicht, diesen Beweis zu verallgemeinern.

Wenn demnach eine m-fache Wurzel p der Gleichung $P = 0$ im Systeme (3) substituiert wird, so werden m seiner Gleichungen von den übrigen abhängig. Man kann daher m unter sich unabhängige Gruppen von Verhältnissen:

$$a_1 : b_1 : c_1 : \ldots, \quad a_2 : b_2 : c_2 : \ldots, \quad \ldots, \quad a_m : b_m : c_m : \ldots.$$

angeben, deren jede dem System (3) genügt. Dann wird aber auch jede Gruppe

$$(\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_m a_m) : (\varepsilon_1 b_1 + \varepsilon_2 b_2 + \cdots + \varepsilon_m b_m) : \ldots,$$

wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m$ willkürliche Faktoren bezeichnen, genügen. So wie nun jeder einfachen Wurzel der Gleichung $P = 0$ ein durch die Richtungskosinus $a, b, c, \ldots$ bestimmter Strahl als Hauptaxe entspricht, so wird demnach jeder m-fachen Wurzel ein m-faches lineares Kontinuum, bestimmt durch jene m unter sich unabhängigen Lösungen des Systems (3), entsprechen; und wie man auch innerhalb dieses Kontinuums m orthogonale Axen wählen mag, so kann man sie immer als Hauptaxen des gegebenen quadratischen Kontinuums auffassen.

Setzt man in der transformierten Gleichung

$$p t^2 + p' t'^2 + p'' t''^2 + \cdots = 1$$

$t' = t'' = \cdots = 0$, so erhält man $t = \frac{1}{\sqrt{p}}$ als absoluten Wert der betreffenden Hauptaxe. Ist p positiv, so wird die Axe der t zu beiden Seiten in gleichen Abständen vom Centrum durch das quadratische Kontinuum reell begrenzt; die Lösungen, in denen dieses geschieht, mögen Hauptscheitel des Kontinuums heissen. — Die Wurzeln der Gleichung $P = 0$ sind die umgekehrten Werte der Quadrate der Hauptaxen des quadratischen Kontinuums. Dieses hat also so viele imaginäre Hauptaxen, als die Gleichung $P = 0$ negative Wurzeln. Soll das quadratische Kontinuum reelle Lösungen enthalten, so dürfen nicht sämtliche Wurzeln p negativ sein. Je nachdem nun die Zahl der negativen Wurzeln $0, 1, 2, \ldots n - 1$ ist, kann man n Gattungen von quadratischen Kontinuen unterscheiden.

§ 38. *Konjugierte Halbmesser.*

Die auf Hauptaxen und Centrum bezogene Gleichung des quadratischen Kontinuums sei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \cdots + \frac{w^2}{d^2} = 1,$$

wo die Axen $a, b, \ldots d$ teils reell, teils rein imaginär sind. Es sei ferner $\alpha, \beta, \gamma, \ldots; \alpha', \beta', \gamma', \ldots; \ldots$ ein orthogonales System von Richtungskosinussen, und $t, t', t'', \ldots$ seien neue Variabeln eines schiefen Systems, in welche die alten übergehen durch die Relationen

$$\frac{x}{a} = \alpha \frac{t}{h} + \alpha' \frac{t'}{h'} + \alpha'' \frac{t''}{h''} + \cdots, \; \frac{y}{b} = \beta \frac{t}{h} + \beta' \frac{t'}{h'} + \beta'' \frac{t''}{h''} + \cdots, \text{ etc.},$$

so ist die transformierte Gleichung des quadratischen Kontinuums

$$\frac{t^2}{h^2} + \frac{t'^2}{h'^2} + \frac{t''^2}{h''^2} + \cdots = 1,$$

und $h, h', h'', \ldots$ sind die Werte der konjugierten Halbmesser oder schiefen Axen des neuen Systems. Sind $\lambda, \mu, \nu, \ldots; \lambda', \mu', \nu', \ldots$; etc. die Richtungskosinus der konjugierten Halbmesser, so muss sein

$$x = \lambda\, t + \lambda' t' + \lambda'' t'' + \cdots, \quad y = \mu\, t + \mu' t' + \mu'' t'' + \cdots, \text{ etc.}$$

woraus folgt

$$\alpha = \frac{h\lambda}{a}, \; \beta = \frac{h\mu}{b}, \; \gamma = \frac{h\nu}{c}, \cdots; \; \alpha' = \frac{h'\lambda'}{a}, \; \beta' = \frac{h'\mu'}{b}, \cdots; \text{ etc.}$$

Die einzigen Bedingungen, durch welche Richtungen und Werte der konjugierten Halbmesser von einander abhängen, sind also folgende:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda\lambda'}{a^2} + \frac{\mu\mu'}{b^2} + \frac{\nu\nu'}{c^2} + \cdots = 0, \text{ etc.} \\ \frac{1}{h^2} = \frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} + \frac{\nu^2}{c^2} + \cdots, \; \frac{1}{h'^2} = \frac{\lambda'^2}{a^2} + \frac{\mu'^2}{b^2} + \cdots, \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Da überdies noch $\lambda^2 + \mu^2 + \cdots = 1$, $\lambda'^2 + \mu'^2 + \cdots = 1$, etc. ist, so enthält das System der konjugierten Halbmesser nur $\frac{1}{2} n(n-1)$ freie Grössen. Es ist auch

$$\left.\begin{aligned} a^2 = h^2\lambda^2 + h'^2\lambda'^2 + h''^2\lambda''^2 + \cdots, \; b^2 = h^2\mu^2 + h'^2\mu'^2 + h''^2\mu''^2 + \cdots, \text{ etc.} \\ h^2\lambda\mu + h'^2\lambda'\mu' + h''^2\lambda''\mu'' + \cdots = 0, \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \; (2)$$

Ist $\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2} < \cdots < \frac{1}{d^2}$, so ist jedes $\frac{1}{h^2}, \frac{1}{h'^2}, \frac{1}{h''^2}, \ldots$ zwischen dem Minimum $\frac{1}{a^2}$ und dem Maximum $\frac{1}{d^2}$ enthalten. Ist ferner jenes negativ, dieses positiv, so kann z. B. $\frac{1}{h^2}$ den Nullwert passieren. Setzt man aber $a^2, b^2, \ldots d^2$ sämtlich als endlich voraus, so ist aus den Gleichungen (2) klar, dass dieses nicht geschehen kann, ohne dass zugleich

wenigstens noch ein reciprokes Halbmesserquadrat z. B. $\frac{1}{h'^2}$, durch Null geht. Bleiben bei diesem Uebergang alle andern Halbmesserquadrate endlich, so hat man annähernd: $h^2\lambda^2 + h'^2\lambda'^2 = 0$, $h^2\mu^2 + h'^2\mu'^2 = 0$, etc., und durch Addition dieser Gleichungen: $h^2 + h'^2 = 0$; ferner $h^2\lambda\mu + h'^2\lambda'\mu' = 0$, etc.; also annähernd $\lambda^2 = \lambda'^2$, $\mu^2 = \mu'^2$, etc., $\lambda\mu = \lambda'\mu'$, etc., woraus $\lambda : \mu : \nu : \ldots = \lambda' : \mu' : \nu' : \ldots$ folgt. Wenn also ein reciprokes Halbmesserquadrat unendlich klein wird, so muss wenigstens noch eines zugleich unendlich klein werden, und wenn dann alle übrigen endlich bleiben, so sind die unendlich grossen Werte dieser zwei Halbmesserquadrate gleich und entgegengesetzt, und ihre Richtungen fallen unendlich nahe zusammen. Es scheint nun im allgemeinen immer möglich, ein System konjugierter Halbmesser von reeller Richtung allmählich durch eben solche Systeme hindurch in irgend ein anderes gegebenes System reeller konjugierter Richtungen überzuführen und dabei zu vermeiden, dass je mehr als zwei Halbmesser zugleich unendlich werden. Da nun bei jedem Durchgang bloss zweier Halbmesserquadrate durchs Unendliche beide vorher entgegengesetzt gewesen sind und nachher ihre Zeichen gewechselt haben, und da sonst kein Halbmesserquadrat sein Zeichen wechseln kann, so scheint es im allgemeinen unmöglich, dass in zwei Systemen konjugierter Halbmesserquadrate die Anzahl der negativen Quadrate verschieden sei. Um dieses noch strenger zu beweisen, schicke ich folgenden leichten Hilfssatz voran:

Sind in der n-fachen Totalität nur m konjugierte Halbmesser eines quadratischen Kontinuums (oder auch nur das durch dieselben gelegte m-fache lineare Kontinuum) gegeben, so ist dadurch das $(n-m)$-fache lineare Kontinuum, welches die $n-m$ übrigen konjugierten Halbmesser enthält, schon bestimmt; aber innerhalb desselben können diese übrigen Halbmesser gerade mit derselben Freiheit gewählt werden, wie wenn überhaupt nur $n-m$ Variabeln in der quadratischen Gleichung vorkommen. Man kann daher sagen, in Beziehung auf ein gegebenes quadratisches Kontinuum in der n-fachen Totalität sei einem diametralen m-fachen linearen Kontinuum immer ein bestimmtes $(n-m)$-faches lineares Kontinuum konjugiert.

Beweis. Ist $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + \cdots = 1$ die auf Centrum und Hauptaxen bezogene quadratische Gleichung, und ist ein diametrales m-faches lineares Kontinuum durch die Richtungen $(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$, $(\lambda', \mu', \nu', \ldots)$, etc. bestimmt, so wird jeder demselben angehörende Strahl durch die Projektionen $\Theta\lambda + \Theta'\lambda' + \Theta''\lambda'' + \cdots$, $\Theta\mu + \Theta'\mu' + \Theta''\mu'' + \cdots$, etc. dargestellt, wo $\Theta, \Theta', \Theta'', \ldots$ ganz beliebige reelle Faktoren bezeichnen. Sind nun $l, m, n, \ldots$ die Projektionen irgend eines dem letzten konjugierten Strahls, so muss die Bedingung

$$A(\Theta\lambda + \Theta'\lambda' + \Theta''\lambda'' + \cdots)\,l + B(\Theta\mu + \Theta'\mu' + \Theta''\mu'' + \cdots)\,m + \text{etc.} = 0$$

erfüllt sein. Soll aber dieses unabhängig von den m Faktoren $\Theta, \Theta', \ldots$ geschehen, so zerfällt die letzte Gleichung in m einzelne Gleichungen, welche ein diametrales

$(n-m)$-faches lineares Kontinuum darstellen, welches alle dem gegebenen m-fachen linearen Kontinuum konjugierte Strahlen enthält.

Satz. In jedem System konjugierter Halbmesser eines Kontinuums zweiten Grades sind immer so viele negative Halbmesserquadrate als negative Hauptaxenquadrate. — Oder: Wenn n reelle Grössen $A, B, C \ldots$ gegeben sind, und n Gruppen von je n Grössen $(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$, $(\lambda', \mu', \nu', \ldots)$, etc. den $\frac{1}{2}\, n\,(n-1)$ Bedingungen $A\lambda\lambda' + B\mu\mu' + C\nu\nu' + \cdots = 0$, etc. genügen, so sind unter den n Grössen $A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 + \cdots$, $A\lambda'^2 + B\mu'^2 + C\nu'^2 + \cdots$, etc. immer eben so viele negative, wie unter den gegebenen Grössen $A, B, C, \ldots$

Beweis. Zwischen das System der Hauptaxen $a, b, c, \ldots$ und dasjenige der konjugierten Halbmesser $h, h', h'', \ldots$ kann man immer zwei Systeme konjugierter Halbmesser einschalten, welche unter sich $n-2$ Halbmesser gemein haben, und von denen das eine mit dem Hauptaxensystem z. B. den Halbmesser a, das andere mit dem gegebenen Systeme konjugierter Halbmesser z. B. den Halbmesser h gemein hat. Denn a und h bestimmen ein zweifaches lineares Kontinuum, welchem das durch die zwei Gleichungen $x = 0$, $B\mu y + C\nu z + \cdots = 0$ dargestellte $(n-2)$-fache lineare Kontinuum konjugiert ist. In diesem wähle man nach Belieben die konjugierten Halbmesser $k_1, k_2, \ldots k_{n-2}$. Im zweifachen Kontinuum seien die Halbmesser a, $\mathfrak{a}$ und h, $\mathfrak{h}$ konjugierte Paare. Dann hat man folgende Reihe von 4 Systemen konjugierter Halbmesser:

$$(a, b, c, \ldots), \quad (a, \mathfrak{a}, k_1, k_2, \ldots k_{n-2}), \quad (h, \mathfrak{h}, k_1, \ldots k_{n-2}), \quad (h, h', h'', \ldots).$$

Für eine Kurve zweiten Grades ist nun der Satz bekannt; also sind in den Systemen $(a, \mathfrak{a})$ und $(h, \mathfrak{h})$ gleich viele negative Halbmesserquadrate. Nehmen wir nun an, der Satz sei für $n-1$ Dimensionen bereits bewiesen, so enthalten auch die Systeme $(b, c, \ldots)$ und $(\mathfrak{a}, k_1, k_2, \ldots k_{n-2})$ gleich viele negative Halbmesserquadrate, ebenso die Systeme $(\mathfrak{h}, k_1, k_2, \ldots k_{n-2})$ und $(h', h'', \ldots)$. Also müssen auch die gegebenen Systeme $(a, b, c, \ldots)$ und $(h, h', h'', \ldots)$ gleich viele negative Halbmesserquadrate enthalten. Da nun der Satz für $n = 2$ gilt, so gilt er auch für $n = 3$, deshalb auch für $n = 4$, u. s. f.; also gilt er allgemein.

Wenn wir der Kürze wegen jedes durch m Hauptaxen gelegte m-fache lineare Kontinuum einen m-fachen Hauptschnitt des gegebenen quadratischen Kontinuums von n Dimensionen nennen, so gilt folgender

Satz. Werden alle m-fachen Paralleloscheme, welche aus den konjugierten Halbmessern irgend eines Systems gebildet werden können, auf einen oder auf zwei verschiedene m-fache Hauptschnitte projiziert, so ist

im ersten Falle die Summe der Quadrate der Projektionen gleich dem Quadrate des Produkts der m Hauptaxen des betreffenden Hauptschnitts, und im zweiten Falle ist die Summe der Produkte je zweier gleichnamiger Projektionen gleich Null.

Beweis. Nimmt man z. B. $m = 3$ an, so ist vermöge der Gleichungen (2) und nach Sätzen, die aus der Theorie der Determinante bekannt sind:

$$a^2 b^2 c^2 = \begin{vmatrix} h^2\lambda^2 + h'^2\lambda'^2 + \cdots, & h^2\lambda\mu + h'^2\lambda'\mu' + \cdots, & h^2\lambda\nu + h'^2\lambda'\nu' + \cdots \\ h^2\mu\lambda + h'^2\mu'\lambda' + \cdots, & h^2\mu^2 + h'^2\mu'^2 + \cdots, & h^2\mu\nu + h'^2\mu'\nu' + \cdots \\ h^2\nu\lambda + h'^2\nu'\lambda' + \cdots, & h^2\nu\mu + h'^2\nu'\mu' + \cdots, & h^2\nu^2 + h'^2\nu^2 + \cdots \end{vmatrix}$$

$$= \left\| \begin{matrix} \lambda \,.\, \lambda' \,.\, \lambda'' \,.\, \lambda''' \,.\,.\,.\,.\,. \\ \mu \,.\, \mu' \,.\, \mu'' \,.\, \mu''' \,.\,.\,.\,.\,. \\ \nu \,.\, \nu' \,.\, \nu'' \,.\, \nu''' \,.\,.\,.\,.\,. \end{matrix} \right| \left. \begin{matrix} h^2\lambda \,.\, h'^2\lambda' \,.\, h''^2\lambda'' \,.\, h'''^2\lambda''' \,.\,.\,.\,. \\ h^2\mu \,.\, h'^2\mu' \,.\, h''^2\mu'' \,.\, h'''^2\mu''' \,.\,.\,.\,. \\ h^2\nu \,.\, h'^2\nu' \,.\, h''^2\nu'' \,.\, h'''^2\nu''' \,.\,.\,.\,. \end{matrix} \right\|$$

$$= \Sigma\, h^2 h'^2 h''^2 \begin{vmatrix} \lambda \,.\, \lambda' \,.\, \lambda'' \\ \mu \,.\, \mu' \,.\, \mu'' \\ \nu \,.\, \nu' \,.\, \nu'' \end{vmatrix}^2,$$

wo die durch Σ bezeichnete Summe sich auf alle Kombinationen dritter Klasse, welche aus den n konjugierten Halbmessern $h, h', h'', h''', \ldots$ gebildet werden können, erstreckt. Da nun der Ausdruck

$$h\, h'\, h'' \begin{vmatrix} \lambda \,.\, \lambda' \,.\, \lambda'' \\ \mu \,.\, \mu' \,.\, \mu'' \\ \nu \,.\, \nu' \,.\, \nu'' \end{vmatrix}$$

z. B. die Projektion des von den Halbmessern h, h', h'' gebildeten dreifachen Paralleloschems auf den Hauptschnitt $(a\,b\,c)$ darstellt, so ist hiemit der erste Teil des Satzes bewiesen.

Wird dasselbe Paralleloschem $(h\,h'\,h'')$ auf die Hauptschnitte $(a\,b\,c)$ und $(a\,b\,d)$ projiziert, so ist das Produkt der Projektionen

$$h\, h'\, h'' \begin{vmatrix} \lambda \,.\, \lambda' \,.\, \lambda'' \\ \mu \,.\, \mu' \,.\, \mu'' \\ \nu \,.\, \nu' \,.\, \nu'' \end{vmatrix} \times h\, h'\, h'' \begin{vmatrix} \lambda \,.\, \lambda' \,.\, \lambda'' \\ \mu \,.\, \mu' \,.\, \mu'' \\ \xi \,.\, \xi' \,.\, \xi'' \end{vmatrix}$$

und die auf alle Kombinationen der n Halbmesser $h, h', h'', \ldots$ sich erstreckende Summe solcher Produkte

$$\Sigma h^2 h'^2 h''^2 \begin{vmatrix} \lambda \,.\, \lambda' \,.\, \lambda'' \\ \mu \,.\, \mu' \,.\, \mu'' \\ \nu \,.\, \nu' \,.\, \nu'' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \lambda \,.\, \lambda' \,.\, \lambda'' \\ \mu \,.\, \mu' \,.\, \mu'' \\ \xi \,.\, \xi' \,.\, \xi'' \end{vmatrix}$$

$$= \left\| \begin{matrix} \lambda \,.\, \lambda' \,.\, \lambda'' \,.\, \lambda''' \,.\,.\,.\,.\,. \\ \mu \,.\, \mu' \,.\, \mu'' \,.\, \mu''' \,.\,.\,.\,.\,. \\ \nu \,.\, \nu' \,.\, \nu'' \,.\, \nu''' \,.\,.\,.\,.\,. \end{matrix} \middle| \begin{matrix} h^2\lambda \,.\, h'^2\lambda' \,.\, h''^2\lambda'' \,.\, h'''^2\lambda''' \,.\,.\,.\,.\,. \\ h^2\mu \,.\, h'^2\mu' \,.\, h''^2\mu'' \,.\, h'''^2\mu''' \,.\,.\,.\,.\,. \\ h^2\xi \,.\, h'^2\xi' \,.\, h''^2\xi'' \,.\, h'''^2\xi''' \,.\,.\,.\,.\,. \end{matrix} \right\|$$

$$= \begin{vmatrix} h^2\lambda^2 + h'^2\lambda'^2 + \cdots, & h^2\mu\lambda + h'^2\mu'\lambda' + \cdots, & h^2\nu\lambda + h'^2\nu'\lambda' + \cdots \\ h^2\lambda\mu + h'^2\lambda'\mu' + \cdots, & h^2\mu^2 + h'^2\mu'^2 + \cdots, & h^2\nu\mu + h'^2\nu'\mu' + \cdots \\ h^2\lambda\xi + h'^2\lambda'\xi' + \cdots, & h^2\mu\xi + h'^2\mu'\xi' + \cdots, & h^2\nu\xi + h'^2\nu'\xi' + \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 \,.\, 0 \,.\, 0 \\ 0 \,.\, b^2 \,.\, 0 \\ 0 \,.\, 0 \,.\, 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Es wird kaum nötig sein, dem hier behandelten Fall, wo die zwei Hauptschnitte, auf welche projiziert ward, zwei Hauptaxen gemein hatten, noch Beispiele der zwei übrigen Fälle, wo die Hauptschnitte entweder nur eine oder gar keine Hauptaxe gemein haben, beizufügen. Wir können demnach den zweiten Teil des Satzes für $m = 3$ als bewiesen ansehen. Wenn wir endlich auch, um in der schriftlichen Darstellung Raum zu ersparen, den ganzen Satz nur für $m = 3$ bewiesen haben, so ist doch die Verallgemeinerung des gebrauchten Verfahrens klar genug.

Erste Folgerung. **Die Summe der Quadrate der orthogonalen Projektionen aller aus den konjugierten Halbmessern eines Systems gebildeten m-fachen Parallelescheme auf irgend ein gegebenes m-faches lineares Kontinuum ist konstant.**

Denn, wenn z. B. $m = 3$ ist, und $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \ldots)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \ldots)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3, \ldots)$ sind die Kosinus dreier unter sich orthogonaler Richtungen, durch welche das gegebene dreifache lineare Kontinuum bestimmt wird, so ist z. B. die Projektion des Paralleloschems $(h h' h'')$ auf dieses Kontinuum

$$h h' h'' \begin{vmatrix} \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \cdots, & \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 + \cdots, & \lambda\alpha_3 + \mu\beta_3 + \cdots \\ \lambda'\alpha_1 + \mu'\beta_1 + \cdots, & \lambda'\alpha_2 + \mu'\beta_2 + \cdots, & \lambda'\alpha_3 + \mu'\beta_3 + \cdots \\ \lambda''\alpha_1 + \mu''\beta_1 + \cdots, & \lambda''\alpha_2 + \mu''\beta_2 + \cdots, & \lambda''\alpha_3 + \mu''\beta_3 + \cdots \end{vmatrix}$$

$$= h h' h'' \begin{vmatrix} \lambda \,.\, \mu \,.\, \nu \\ \lambda' \,.\, \mu' \,.\, \nu' \\ \lambda'' \,.\, \mu'' \,.\, \nu'' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha_1 \,.\, \beta_1 \,.\, \gamma_1 \\ \alpha_2 \,.\, \beta_2 \,.\, \gamma_2 \\ \alpha_3 \,.\, \beta_3 \,.\, \gamma_3 \end{vmatrix} + h h' h'' \begin{vmatrix} \lambda \,.\, \mu \,.\, \xi \\ \lambda' \,.\, \mu' \,.\, \xi' \\ \lambda'' \,.\, \mu'' \,.\, \xi'' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha_1 \,.\, \beta_1 \,.\, \delta_1 \\ \alpha_2 \,.\, \beta_2 \,.\, \delta_2 \\ \alpha_3 \,.\, \beta_3 \,.\, \delta_3 \end{vmatrix} + \text{etc.}$$

Bezeichnet nun Σ eine Summe, welche sich auf alle Kombinationen $h h' h''$, S dagegen eine solche, die sich auf alle Kombinationen $a\, b\, c$ der Hauptaxen oder auch auf alle binären Verbindungen von zweien dieser Kombinationen erstreckt, so ist

Σ (Quadrat der obigen Projektion des Paralleloschems)

$$= S\left\{ \begin{vmatrix} \alpha_1 . \beta_1 . \gamma_1 \\ \alpha_2 . \beta_2 . \gamma_2 \\ \alpha_3 . \beta_3 . \gamma_3 \end{vmatrix}^2 . \Sigma \left(h\, h'\, h'' \begin{vmatrix} \lambda \;. \mu \;. \nu \\ \lambda' . \mu' . \nu' \\ \lambda'' . \mu'' . \nu'' \end{vmatrix} \right)^2 \right\}$$

$$+ 2\, S \left\{ \begin{vmatrix} \alpha_1 . \beta_1 . \gamma_1 \\ \alpha_2 . \beta_2 . \gamma_2 \\ \alpha_3 . \beta_3 . \gamma_3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha_1 . \beta_1 . \delta_1 \\ \alpha_2 . \beta_2 . \delta_2 \\ \alpha_3 . \beta_3 . \delta_3 \end{vmatrix} . \Sigma\, h^2 h'^2 h''^2 \begin{vmatrix} \lambda \;. \mu \;. \nu \\ \lambda' . \mu' . \nu' \\ \lambda'' . \mu'' . \nu'' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \lambda \;. \mu \;. \xi \\ \lambda' . \mu' . \xi' \\ \lambda'' . \mu'' . \xi'' \end{vmatrix} \right\}$$

$$= S\, a^2 b^2 c^2 \begin{vmatrix} \alpha_1 . \beta_1 . \gamma_1 \\ \alpha_2 . \beta_2 . \gamma_2 \\ \alpha_3 . \beta_3 . \gamma_3 \end{vmatrix}^2 .$$

Da der letzte Ausdruck von den Richtungen der konjugierten Halbmesser unabhängig ist, so ist die Behauptung bewiesen.

Zweite Folgerung. Die Summe der Quadrate aller m-fachen aus den konjugierten Halbmessern eines Systems gebildeten Paralleloscheme ist gleich, wie wenn das System von den Hauptaxen gebildet wird.

Wird nämlich das Quadrat eines jeden der zuerst genannten Paralleloscheme nach § 12 der Summe der Quadrate seiner Projektionen auf alle m-fachen Hauptschnitte gleich gesetzt, und kehrt man dann in der so entstandenen Doppelsumme die Ordnung der Summationen um, so folgt die Richtigkeit der Behauptung sogleich aus dem ersten Teil des vorhergehenden Lehrsatzes.

§ 39. *Berührende Kontinua ersten Grades.*

Wenn ein lineares Kontinuum eine Lösung und die derselben entsprechende erste Differentialgleichung mit einem höhern Kontinuum gemein hat, so ist jenes das Tangentialkontinuum für diese Lösung. Ist

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} + \cdots = 1$$

die Gleichung eines quadratischen Kontinuums, so ist für die Lösung $(x, y, z, \ldots)$ die Gleichung des Tangentialkontinuums

$$\frac{x x'}{A} + \frac{y y'}{B} + \frac{z z'}{C} + \cdots = 1,$$

wo die Variabeln $x', y', z', \ldots$ dem letzten linearen Kontinuum angehören. Dem vom Centrum nach der Lösung $(x, y, \ldots)$ hin gehenden Halbmesser h ist das diametrale Kontinuum, dessen Gleichung

$$\frac{xx'}{A} + \frac{yy'}{B} + \frac{zz'}{C} + \cdots = 0$$

ist, konjugiert. Dieses ist also mit dem Tangentialkontinuum parallel. Der von der Lösung $(x, y, \ldots)$ ausgehende zum Tangentialkontinuum normale Strahl heisse die Normale jener Lösung. Setzt man

$$\frac{1}{p^2} = \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} + \cdots,$$

so sind

$$\alpha = \frac{px}{A}, \quad \beta = \frac{py}{B}, \quad \gamma = \frac{pz}{C}, \cdots$$

die Richtungskosinus der Normale, und der Abstand des Centrums vom Tangentialkontinuum oder das Perpendikel ist $\alpha x + \beta y + \cdots = p$. Man hat also auch

$$p^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + \cdots.$$

Hieraus erhellt, dass, wenn vom Centrum aus auf der Richtung des Perpendikels sein reciproker Wert aufgetragen wird, die so erhaltene Lösung wiederum einem quadratischen Kontinuum angehört, dessen Hauptaxen zwar gleich liegen wie beim ursprünglichen quadratischen Kontinuum, aber die reciproken Werte haben, ferner, dass die Normale mit h parallel ist, und dass das Perpendikel den Wert $\frac{1}{h}$ hat.

Das Tangentialkontinuum schneidet das quadratische Kontinuum in einem $(n-2)$-fachen Kontinuum. Die Beschaffenheit desselben wird am leichtesten erkannt, wenn man das System der Hauptaxen in ein System konjugierter Halbmesser transformiert, welchem h angehört. Geht dadurch die quadratische Gleichung über in

$$\frac{t^2}{H} + \frac{t'^2}{H'} + \frac{t''^2}{H''} + \cdots = 1,$$

wo $H = h^2$, so ist $t = h$ die Gleichung des Tangentialkontinuums für die Lösung $(t = h, t' = t'' = \cdots = 0)$, und das $(n-2)$-fache Durchschnittskontinuum wird durch die Gleichungen

$$t = h, \quad \frac{t'^2}{H'} + \frac{t''^2}{H''} + \frac{t'''^2}{H'''} + \cdots = 0$$

dargestellt, ist also innerhalb der durch $t = h$ bezeichneten $(n-1)$-fachen Totalität ein strahliges Kontinuum zweiten Grades. Für dessen Reellität reicht es hin, wenn nicht alle Halbmesserquadrate H', H'', H''', . . . gleichartig sind. Diese Ausnahme ereignet sich nur in zwei Fällen: 1. wenn alle Hauptaxenquadrate A, B, . . . positiv sind, 2. wenn nur eines positiv, alle übrigen negativ sind. Daher der Satz:

In den zwei Gattungen von quadratischen Kontinuen, wo entweder alle Hauptaxenquadrate oder nur eines positiv sind, hat jedes Tangentialkontinuum mit ihm nur die Berührungslösung in reeller Weise gemein; in den $n-2$ übrigen Gattungen dagegen schneidet das Tangentialkontinuum das quadratische Kontinuum in einem strahligen Kontinuum zweiten Grades.

Sind $f, g, h, \ldots$ die Werte einer beliebigen Lösung, durch welche ein Tangentialkontinuum an das gegebene quadratische Kontinuum gelegt werden soll, so muss die Berührungslösung $(x, y, \ldots)$ der Bedingung

$$\frac{fx}{A} + \frac{gy}{B} + \cdots = 1$$

genügen. Diese stellt das polare lineare Kontinuum zu $(f, g, \ldots)$ dar. Alle Tangentialstrahlen, welche den Pol $(f, g, \ldots)$ mit je einer Berührungslösung $(x, y, \ldots)$ verbinden, bilden ein umschriebenes strahliges Kontinuum, dessen Gleichung

$$\left(\frac{f^2}{A} + \frac{g^2}{B} + \cdots - 1\right)\left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots - 1\right) - \left(\frac{fx}{A} + \frac{gy}{B} + \cdots - 1\right)^2 = 0$$

oder

$$\frac{(fy-gx)^2}{AB} + \text{etc.} - \frac{(x-f)^2}{A} - \frac{(y-g)^2}{B} - \text{etc.} = 0$$

ist. Der Beweis ist aus der Identität beider Formen dieser Gleichung zu entnehmen.

Dass jeder vom Pol $(f, g, \ldots)$ ausgehende Strahl vom polaren linearen Kontinuum in Beziehung auf die beiden Lösungen, in denen er das quadratische Kontinuum trifft, harmonisch geschnitten wird, ist leicht einzusehen. Man braucht nur durch den Strahl ein zweifaches lineares Kontinuum zu legen.

Wenn, wie bisher, A, B, . . . die Quadrate der Hauptaxen eines Kontinuums zweiten Grades, p das auf ein Tangentialkontinuum aus dem Centrum gefällte Perpendikel und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ dessen Richtungskosinus oder, wenn man will, diejenigen der entsprechenden Normale bezeichnen, so war oben $p^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + \cdots$. Versieht man nun in dieser Gleichung $p, \alpha, \beta, \ldots$ nach und nach mit den Zeigern $1, 2, \ldots n$ und setzt die entsprechenden Richtungen als sämtlich unter sich orthogonal voraus, so

folgt sogleich aus den bekannten Eigenschaften eines orthogonalen Transformationssystems

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \cdots + p_n^2 = A + B + C + \cdots$$

Dann sind aber auch die entsprechenden Tangentialkontinua alle zu einander orthogonal; es seien $x, y, \ldots$ die Werte ihrer Durchschnittslösung. Dieselbe ist offenbar das dem Centrum entgegengesetzte Eck eines orthogonalen Paralleloschems, dessen Kanten $p_1, p_2, \ldots p_n$ sind; folglich ist $x^2 + y^2 + \cdots = p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2$; also zuletzt

$$x^2 + y^2 + z^2 + \cdots = A + B + C + \cdots$$

eine Gleichung, welcher jene Durchschnittslösung genügt. Wenn also ein solches Eck, wie wir es früher als Masseinheit des n-sphärischen Kontinuums gebraucht haben, von lauter Tangentialkontinuen eines quadratischen Kontinuums der n-fachen Totalität gebildet wird, so liegt dasselbe auf einer konzentrischen n-Sphäre, deren Radiusquadrat gleich ist der Summe der n Hauptaxenquadrate.

Die entsprechenden Sätze für die Ebene und den Raum sind bekannt, der letztere trägt Monge's Namen.

§ 40. *Bestimmung der Hauptaxen eines diametralen Schnitts; Definition der konfokalen Kontinuen.*

Dem Halbmesser h, dessen Projektionen $x, y, \ldots$ sind, sei ein diametrales lineares Kontinuum konjugiert; $\alpha, \beta, \ldots$ seien die Richtungskosinus der Normale des letzten, also $\alpha = \frac{px}{A}, \quad \beta = \frac{py}{B}, \ldots$ Sind nun $(\alpha', \beta', \gamma', \ldots)$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'', \ldots)$, etc. die Richtungskosinus der Hauptaxen dieses diametralen Schnitts, R', R'', etc., deren Quadrate, so müssen die Bedingungen

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \cdots = 0, \qquad \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' + \cdots = 0, \text{ etc.}$$

$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' + \cdots = 0, \text{ etc.}, \qquad \frac{\alpha'\alpha''}{A} + \frac{\beta'\beta''}{B} + \frac{\gamma'\gamma''}{C} + \cdots = 0, \text{ etc.}$$

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + \cdots = 1, \text{ etc.}$$

erfüllt sein; und dann ist

$$\frac{1}{R'} = \frac{\alpha'^2}{A} + \frac{\beta'^2}{B} + \frac{\gamma'^2}{C} + \cdots, \text{ etc.}$$

Stellt man nun die Gleichungen

$$\alpha\,\frac{\alpha'}{A}+\beta\,\frac{\beta'}{B}+\gamma\,\frac{\gamma'}{C}+\cdots=\frac{1}{S'},$$
$$\alpha'\,\frac{\alpha'}{A}+\beta'\,\frac{\beta'}{B}+\gamma'\,\frac{\gamma'}{C}+\cdots=\frac{1}{R'},$$
$$\alpha''\,\frac{\alpha'}{A}+\beta''\,\frac{\beta'}{B}+\gamma''\,\frac{\gamma'}{C}+\cdots=0,$$
$$\alpha'''\,\frac{\alpha'}{A}+\beta'''\,\frac{\beta'}{B}+\gamma'''\,\frac{\gamma'}{C}+\cdots=0,$$
etc.

zusammen, multipliziert sie mit $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ und addiert sie, so folgt, nachdem man mit $A - R'$ dividiert hat:

$$\frac{1}{R'}\cdot\frac{\alpha'}{A}+\frac{1}{S'}\cdot\frac{\alpha}{A-R'}=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $A\alpha$ und summiert sie in Beziehung auf $A, B, C, \ldots$, so ergiebt sich

$$\frac{A\,\alpha^2}{A-R'}+\frac{B\,\beta^2}{B-R'}+\frac{C\,\gamma^2}{C-R'}+\cdots=0,$$

oder, wenn für $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ihre Werte $\frac{p\,x}{A}, \frac{p\,y}{B}, \ldots$ substituiert werden,

$$\frac{x^2}{A\,(A-R')}+\frac{y^2}{B\,(B-R')}+\frac{z^2}{C\,(C-R')}+\cdots=0,$$

oder, da

$$\frac{R'}{A\,(A-R')}=\frac{1}{A-R'}-\frac{1}{A}, \text{ etc.}, \quad \frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\cdots=1$$

ist, auch

$$\frac{x^2}{A-R'}+\frac{y^2}{B-R'}+\frac{z^2}{C-R'}+\cdots=1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wird diese Gleichung von Brüchen befreit, so erscheint sie in Beziehung auf die Unbekannte R' vom n-ten Grade. Da sie aber schon durch $R' = 0$ befriedigt ist, so sind ihre $n - 1$ übrigen Wurzeln gerade die gesuchten Quadrate $R', R'', R''', \ldots$ der Hauptaxen des der Lösung $(x, y, \ldots)$ konjugierten diametralen Schnitts.

Die Gleichung (1) giebt nun

$$\alpha' : \beta' : \gamma' : \cdots = \frac{x}{A-R'} : \frac{y}{B-R'} : \frac{z}{C-R'} : \cdots$$

Wird (2) als Gleichung eines quadratischen Kontinuums aufgefasst und das entsprechende Perpendikel mit p' bezeichnet, so sind

$$\alpha' = \frac{p' x}{A - R'}, \quad \beta' = \frac{p' y}{B - R'}, \quad \gamma' = \frac{p' z}{C - R'}, \ldots$$

zugleich die Richtungskosinus der Normale dieses neuen quadratischen Kontinuums.

Wenn für zwei quadratische Kontinua die Hauptaxen der Richtung nach zusammenfallen, und die Hauptaxenquadrate des einen Kontinuums alle um gleich viel von den gleichnamigen des andern sich unterscheiden, so sollen sie **konfokale Kontinua** heissen.

Wenn demnach in der Gleichung $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots = 1$ die Hauptaxenquadrate $A, B, \ldots$ so variiert werden, dass immer $dA = dB = dC = \cdots$ ist, so stellt dieselbe eine **Schar konfokaler Kontinua** dar. Ist die reelle Lösung $(x, y, \ldots)$ gegeben, so zeigt die Diskussion der Gleichung, dass sie in Beziehung auf die Unbekannte A vom n-ten Grade ist, und dass ihre n Wurzeln immer alle reell sind; für die erste Wurzel sind alle Hauptaxenquadrate $A, B, C, \ldots$ positiv, für die zweite ist eines, für die dritte sind zwei, u. s. f., für die n-te sind deren $n - 1$ negativ. Setzen wir $A > B > C > \cdots$ und lassen A von 0 bis $+\infty$ wachsen, so geht das quadratische Kontinuum n mal durch jede in der n-fachen Totalität enthaltene Lösung. Durch jede gegebene reelle Lösung gehen also immer gerade n konfokale Kontinua, und diese gehören allen n Gattungen von quadratischen Kontinuen an.

Man kann auch leicht zeigen, dass zwei konfokale Kontinua derselben Gattung keine reelle Lösung gemein haben können. Sind nämlich $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots = 1$, $\frac{x^2}{A'} + \frac{y^2}{B'} + \cdots = 1$ ihre Gleichungen, und zieht man diese von einander ab und dividiert durch $A - A' = B - B' = C - C' =$ etc., so folgt

$$\frac{x^2}{AA'} + \frac{y^2}{BB'} + \frac{z^2}{CC'} + \cdots = 0 . \qquad (a)$$

Da aber hier der Voraussetzung zufolge alle Nenner positiv sind, so kann die Gleichung für reelle Werte $x, y, \ldots$ nicht bestehen.

Gehören aber die beiden quadratischen Kontinua verschiedenen Gattungen an, so wird es in der Gleichung (a) auch negative Nenner geben; diese ist daher möglich, und sie zeigt zugleich, dass **die Normalen der konfokalen Kontinua in einer gemeinschaftlichen Lösung auf einander senkrecht stehen.**

Die obige Bestimmung der Hauptaxen eines diametralen Schnitts des quadratischen Kontinuums kann nun in folgendem Satze ausgesprochen werden:

Ist ein diametraler Schnitt eines quadratischen Kontinuums gegeben, so ziehe man aus dem Centrum O den konjugierten Halbmesser OA, führe durch die Lösung A die $n-1$ konfokalen Kontinua und errichte in A auf

jedes die Normale. Dann sind die Hauptaxen des Schnitts mit diesen Normalen parallel, und ihre Quadrate sind gleich den Ueberschüssen eines Hauptaxenquadrats des gegebenen quadratischen Kontinuums über das gleichnamige Hauptaxenquadrat eines jeden konfokalen Kontinuums.

§ 41. *Fortsetzung der Lehre von den konfokalen Kontinuen.*

I. Konfokale Kontinua sind orthogonal. Schon bewiesen.

II. Satz. Wenn n konfokale Kontinua, deren Centrum O, sich in einer Lösung P schneiden, und gilt P wiederum als Centrum einer Schar konfokaler Kontinua, deren Hauptaxen mit den Normalen der vorigen zusammenfallen; werden ferner diese Hauptaxen resp. irgend n gleichnamigen Hauptaxen der vorigen n konfokalen Kontinua gleichgesetzt: so geht das so bestimmte quadratische Kontinuum durch O, und seine dortige Normale hat gleiche Richtung mit den erwähnten gleichnamigen Hauptaxen der ursprünglichen Schar.

Beweis. Der Ausdruck

$$V = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} + \dots \quad (dA = dB = dC = \dots)$$

erhalte für $A = A_1, A_2, A_3, \dots A_n$ den Wert 1, oder, wenn man will, $A_1, A_2, \dots A_n$ seien die Wurzeln der Gleichung $V = 1$. Dann ist

$$V = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \dots = 1 - \frac{(A - A_1)\,(A - A_2)\dots(A - A_n)}{A\,B\,C\dots\dots}, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

für jeden beliebigen Wert von A. Schafft man nämlich die Brüche weg, so sind links die höchsten Glieder vom $(n - 1)$-ten Grade; rechts sind die höchsten Glieder $ABC\dots$ und $- A^n$, und es ist klar, dass bei ihrer Entwicklung die n-ten Potenzen der Variabeln A sich aufheben. Die vorliegende Gleichung ist also höchstens vom $(n - 1)$-ten Grade. Nun wird sie aber durch die n Werte $A = A_1$, $A = A_2$, $A = A_3, \dots A = A_n$ befriedigt und muss also eine identische Gleichung sein.

Multipliziert man die Gleichung (1) mit A und setzt dann $A = 0$, so erhält man

$$x^2 = \frac{A_1\,A_2\,A_3\dots A_n}{(A - B)\,(A - C)\dots}, \text{ ebenso } y^2 = \frac{B_1\,B_2\dots B_n}{(B - A)\,(B - C)\dots}, \text{ etc.}$$

Lässt man $A - A_1$ verschwinden, so ergiebt sich nach vorhergegangener Differentiation

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{B_1^2} + \dots = \frac{(A_1 - A_2)\,(A_1 - A_3)\dots(A_1 - A_n)}{A_1\,B_1\,C_1\dots\dots}.$$

Wenn man also die vom Centrum auf die Tangentialkontinua der konfokalen Kontinua gefällten Perpendikel mit $p_1, p_2, \ldots p_n$ bezeichnet, so ist

$$p_1^2 = \frac{A_1 B_1 C_1 \ldots\ldots}{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3) \ldots (A_1 - A_n)}, \quad p_2^2 = \frac{A_2 B_2 C_2 \ldots\ldots}{(A_2 - A_1)(A_2 - A_3) \ldots (A_2 - A_n)}, \text{ etc.}$$

Da diese Ausdrücke denen für $x^2, y^2, \ldots$ genau entsprechen, wenn man $A, B, C, \ldots$ mit $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ vertauscht, so ist

$$\frac{p_1^2}{A_1} + \frac{p_2^2}{A_2} + \cdots + \frac{p_n^2}{A_n} = 1, \quad \frac{p_1^2}{B_1} + \frac{p_2^2}{B_2} + \cdots + \frac{p_n^2}{B_n} = 1, \text{ etc.}$$

Denkt man sich aber die Lösung $(x, y, \ldots)$ als Ursprung und die Normalen als neues Axensystem, so sind $p_1, p_2, \ldots p_n$ die Werte der neuen Variabeln, welche dem alten Centrum O zukommen. Da nun die letzten n Gleichungen ein System konfokaler Kontinua darstellen, so ist die im Satz ausgesprochene wechselseitige Beziehung zwischen dem Centrum O und der Lösung P bewiesen.

III. Satz. Wenn n konfokale Kontinua, welche eine reelle Lösung gemein haben, auf einem beliebigen Strahle resp. die Sehnen $2s, 2s', 2s'', \ldots$ abschneiden, wenn ferner $H, H', H'', \ldots$ die Quadrate ihrer mit dem gegebenen Strahle parallelen Halbmesser, $p, p' p'', \ldots$ die aus dem Centrum auf die Tangentialkontinua der gemeinschaftlichen Lösung gefällten Perpendikel bedeuten, so ist

$$\left(\frac{s\,p}{H}\right)^2 + \left(\frac{s'p'}{H'}\right)^2 + \left(\frac{s''p''}{H''}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{s^{(n-1)}\,p^{(n-1)}}{H^{(n-1)}}\right)^2 = 1.$$

Beweis. Es sei $(x, y, \ldots)$ irgend eine dem gegebenen Strahl angehörende Lösung L, und P eine Lösung, die er mit dem Kontinuum $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots = 1$ gemein hat; dann seien $r\lambda, r\mu, r\nu, \ldots$ die Projektionen von $L\,P = r$ auf die n Hauptaxen. Da $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ gegeben sind, so liefert die Gleichung

$$\frac{(x + r\lambda)^2}{A} + \frac{(y + r\mu)^2}{B} + \cdots = 1$$

zwei Werte für die Unbekannte r; ihr Unterschied ist die Sehne $2s$; ferner ist

$$\frac{1}{H} = \frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \frac{\nu^2}{C} + \cdots;$$

setzt man noch

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} + \cdots = 1 - V,$$

so wird die Gleichung für r:

$$\frac{r^2}{H} + 2\left(\frac{\lambda x}{A} + \frac{\mu y}{B} + \cdots\right) r - V = 0,$$

woraus folgt, wenn man das Summenzeichen Σ auf die Variabeln $x, y, \ldots$ bezieht,

$$\left(\frac{s}{H}\right)^2 = \left(\Sigma \frac{\lambda x}{A}\right)^2 + V \Sigma \frac{\lambda^2}{A}.$$

Betrachtet man jetzt in der Gleichung $V = 0$ ein Axenquadrat, z. B. A, als Unbekannte, bezeichnet ihre Werte mit $A_1, A_2, \ldots A_n$, die entsprechenden Perpendikel mit $p_1, p_2, \ldots p_n$ und die Kosinus der Winkel, welche der gegebene Strahl mit den Normalen dieser durch L gelegten konfokalen Kontinua bildet, durch $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ und gebraucht S als Summenzeichen für den untern Zeiger $i = 1, 2, \ldots n$, so ist

$$\lambda = x\, S \frac{\varepsilon_i\, p_i}{A_i}, \quad \mu = y\, S \frac{\varepsilon_i\, p_i}{B_i}, \text{ etc.,}$$

$$\Sigma \frac{\lambda x}{A} = S\, \varepsilon_i\, p_i \left(\Sigma \frac{x^2}{A\, A_i}\right) = S \frac{\varepsilon_i\, p_i}{A - A_i}\left(\Sigma \frac{x^2}{A_i} - \Sigma \frac{x^2}{A}\right) = V S \frac{\varepsilon_i\, p_i}{A - A_i},$$

$$\Sigma \frac{\lambda^2}{A} = S\, \varepsilon_i\, p_i \left(\Sigma \frac{\lambda x}{A\, A_i}\right) = S \frac{\varepsilon_i\, p_i}{A - A_i}\left(\Sigma \frac{\lambda x}{A_i} - \Sigma \frac{\lambda x}{A}\right) = S \frac{\varepsilon_i\, p_i}{A - A_i}\left(\Sigma \frac{\lambda x}{A_i}\right) - V\left(S \frac{\varepsilon_i\, p_i}{A - A_i}\right)^2;$$

also

$$\left(\frac{s}{H}\right)^2 = V \,.\, S \frac{\varepsilon_i\, p_i}{A - A_i}\left(\Sigma \frac{\lambda x}{A_i}\right);$$

aber z. B.

$$\Sigma \frac{\lambda x}{A_1} = S\, \varepsilon_i\, p_i \left(\Sigma \frac{x^2}{A_1\, A_i}\right) = \varepsilon_1\, p_1\, \Sigma \frac{x^2}{A_1^2} = \frac{\varepsilon_1}{p_1}$$

daher

$$\left(\frac{s}{H}\right)^2 = V \,.\, S \frac{\varepsilon_i^2}{A - A_i}.$$

Nun ist vermöge der Formel (1)

$$V = \frac{(A - A_1)(A - A_2) \ldots (A - A_n)}{A\, B\, C \ldots\ldots},$$

überdies

$$p^2 = \frac{A\, B\, C \ldots\ldots}{(A - A')(A - A'')(A - A''') \ldots};$$

also

$$\left(\frac{p s}{H}\right)^2 = \frac{(A - A_1)(A - A_2) \ldots (A - A_n).}{(A - A')(A - A'')(A - A''') \ldots} \cdot S \frac{\varepsilon_i^2}{A - A_i}. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Ist nun Q die gemeinschaftliche Lösung der n gegebenen konfokalen Kontinua, welche durch die ersten Hauptaxenquadrate A, A', A'', . . . bestimmt sind, und werden die Normalen dieser Kontinua in Q als Axen der Variabeln t, t', t'', . . . eines neuen durch die Gleichung

$$\frac{t^2}{A-u} + \frac{t'^2}{A'-u} + \frac{t''^2}{A''-u} + \cdots = 1$$

dargestellten Systems konfokaler Kontinua aufgefasst, werden endlich die Variabeln t, t', t'', . . . dadurch völlig bestimmt, dass sie den Werten $u = A_1$, $u = A_2$, . . . $u = A_n$ entsprechen sollen, so giebt die Gleichung (2)

$$\left(\frac{ps}{H}\right)^2 = t^2 S \frac{\varepsilon_i^2}{A - A_i}, \quad \left(\frac{p's'}{H'}\right)^2 = t'^2 S \frac{\varepsilon_i^2}{A' - A_i}, \text{ etc.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Addiert man diese Gleichungen und bedenkt, dass $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2 = 1$ ist, so erhält man

$$\left(\frac{ps}{H}\right)^2 + \left(\frac{p's'}{H'}\right)^2 + \left(\frac{p''s''}{H''}\right)^2 + \cdots = 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

IV. Setzt man

$$\frac{t^2}{(A - A_i)^2} + \frac{t'^2}{(A' - A_i)^2} + \frac{t''^2}{(A'' - A_i)^2} + \cdots = \frac{1}{q_i^2},$$

woraus z. B.

$$q_1^2 = \frac{(A - A_1)(A' - A_1)(A'' - A_1)\ldots}{(A_2 - A_1)(A_3 - A_1)\ldots(A_n - A_1}$$

folgt, dividiert die Gleichungen (3) resp. durch $A - A_1$, $A' - A_1$, $A'' - A_1$, . . . und addiert sie, so erhält man

$$\frac{\varepsilon_1^2}{q_1^2} = \frac{\left(\frac{ps}{H}\right)^2}{A - A_1} + \frac{\left(\frac{p's'}{H'}\right)^2}{A' - A_1} + \frac{\left(\frac{p''s''}{H''}\right)^2}{A'' - A_1} + \cdots, \text{ etc.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Sind die konfokalen Flächen A, A', A'', . . . und die Lösung L (also auch $A_1, A_2, \ldots A_n$) gegeben, so sind p, p', p'', . . .; $q_1, q_2, \ldots q_n$ bekannt. Man kann nun für die Brüche $\frac{s}{H}, \frac{s'}{H'}$, . . . beliebige Werte annehmen, welche der Relation (4) genügen, und dann bestimmen die Gleichungen (5) die Richtung des von L ausgehenden Strahls, welcher den genannten Bedingungen hinsichtlich der auf ihm abgeschnittenen Sehnen entspricht.

V. Soll das quadratische Kontinuum, dessen erstes Axenquadrat A ist, den Strahl berühren, so muss die halbe Sehne s verschwinden; man bekommt so die Bedingung

$$\frac{\varepsilon_1^2}{A - A_1} + \frac{\varepsilon_2^2}{A - A_2} + \frac{\varepsilon_3^2}{A - A_3} + \cdots + \frac{\varepsilon_n^2}{A - A_n} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Sie ist in Beziehung auf A vom $(n-1)$-ten Grade. Irgend ein Strahl wird also gerade von $n-1$ konfokalen Kontinuen berührt. Sind diese dieselben mit denen, deren erste Axenquadrate vorhin mit $A', A'', \ldots A^{(n-1)}$ bezeichnet wurden, so ist $s' = s'' = \cdots = 0$, und die Gleichung (4) giebt $p\,s = H$. Sind die Kontinua $A, A', A'', \ldots$ alle fest, aber die Richtung des Strahls veränderlich, so ist p konstant, und s daher mit H proportional. D. h.:

Wenn durch einen beweglichen Strahl das erste von n festen konfokalen Kontinuen geschnitten und die übrigen berührt werden, so ist die vom ersten Kontinuum auf dem Strahl abgeschnittene Sehne dem Quadrat seines mit dieser parallelen Halbmessers proportional.

VI. Denkt man sich in der Gleichung (6) nur die Kosinus $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n$ variabel, so bewegt sich der Strahl um die Lösung L herum, indem er fortwährend das quadratische Kontinuum (A) berührt; er beschreibt also um dieses ein strahliges Kontinuum. Die Formel (6) liefert dann den Satz:

Wenn aus einer beliebigen Spitze einem quadratischen Kontinuum ein strahliges Kontinuum umschrieben wird, so sind seine Hauptaxen die Normalen der durch die Spitze gelegten mit dem erstern konfokalen Kontinua, und die unendlich kleinen Hauptaxenquadrate sind proportional mit den Ueberschüssen eines Axenquadrats des gegebenen Kontinuums über die gleichnamigen der konfokalen Kontinua.

VII. Bei diesem Anlasse wollen wir auch den allgemeinen Fall untersuchen, wo ein quadratisches Kontinuum überhaupt einem andern umschrieben ist. — Betrachten wir zuerst zwei quadratische Kontinua, die sich schneiden, und setzen $u = 0$, $v = 0$ als Gleichungen derselben, so wird $u + \lambda v = 0$, wo λ einen willkürlichen Faktor bedeutet, jedes quadratische Kontinuum darstellen, welches durch das $(n-2)$-fache Kontinuum des Durchschnitts geht. (Durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Lösungen wird nämlich im allgemeinen ein quadratisches Kontinuum bestimmt. Wählt man nun $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ Lösungen auf dem Durchschnittskontinuum und eine ausserhalb desselben auf dem durchgelegten quadratischen Kontinuum nach Belieben, so befriedigen jene Lösungen die Gleichung $u + \lambda v = 0$ schon von selbst, und diese einzige Lösung dient zur Bestimmung des Faktors λ. Da jetzt das durch $u + \lambda v = 0$ dargestellte Kontinuum mit dem vorigen $\frac{1}{2}n(n+3)$ Lösungen gemein hat, so fallen beide in ihrer ganzen Ausdehnung zusammen.) Macht man nun die Polynome u, v durch Einführung einer $(n+1)$-ten Variabeln homogen und setzt die Determinante der zweiten abgeleiteten Funktionen oder die Funktionaldeterminante $\nabla(u + \lambda v) = 0$, so bekommt man eine Gleichung

$(n+1)$-ten Grades für λ, durch welche die Bedingung eines strahligen Kontinuums ausgedrückt wird, das durch jenen Durchschnitt gehen soll. (Siehe die Bemerkung am Ende von § 36.) Es giebt also solche strahlige Kontinua, seien sie nun reell oder imaginär. — Nehmen wir jetzt an, der Durchschnitt sei im Besondern eine Berührung, d. h. für jede gemeinschaftliche Lösung der Gleichungen $u=0$, $v=0$ seien die $n+1$ ersten abgeleiteten Funktionen von u mit den entsprechenden von v proportional, so sind sie es auch mit denen von $u+\lambda v$, d. h. alle in der Gleichung $u+\lambda v=0$ enthaltenen quadratischen Kontinua berühren einander in der ganzen Ausdehnung eines $(n-2)$-fachen Berührungskontinuums. Unter diesen giebt es strahlige Kontinua. Ist ein solches nicht schon linear, so liegt das Berührungskontinuum ganz in dem $(n-1)$-fachen linearen Polarkontinuum seiner Spitze. Hieraus fliesst der Satz:

Wenn zwei quadratische Kontinua sich in einem $(n-2)$-fachen Kontinuum berühren, so fällt dieses Berührungskontinuum ganz in ein $(n-1)$-faches lineares Kontinuum.

Wird dieses lineare Kontinuum durch die Gleichung $s=0$ dargestellt, so muss also v die Form $u+ks^2$ haben, wo k einen willkürlichen Faktor bedeutet. Setzen wir nun

$$u=\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\cdots-1,\quad s=ax+by+\cdots-1,$$

so wird

$$v=\Sigma\frac{x^2}{A}-1+k(\Sigma ax-1)^2=0$$

die Gleichung irgend eines dem Kontinuum $u=0$ umschriebenen Kontinuums sein. Wir suchen zunächst die Werte $f, g, h, \ldots$ seines Centrums. Setzt man $f, g, h, \ldots$ anstatt $x, y, \ldots$, so sind sie durch die Gleichungen $\frac{\partial v}{\partial f}=0$, $\frac{\partial v}{\partial g}=0$, etc. bestimmt. Also ist

$$\frac{f}{A}+kas=0,\quad \frac{g}{B}+kbs=0,\ \text{etc.}$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit $Aa, Bb, \ldots$ und addiert sie, so erhält man

$$s+1+ks\,\Sigma Aa^2=0,\quad s=-\frac{1}{1+k\,\Sigma Aa^2},$$

$$f=\frac{kAa}{1+k\,\Sigma Aa^2},\quad g=\frac{kBb}{1+k\,\Sigma Aa^2},\ \text{etc.}$$

Hierdurch sind die Werte des Centrums bestimmt. Setzt man nun $x=f+x'$, $y=g+y'$, ..., so wird

$$v=\Sigma\frac{x'^2}{A}+k(\Sigma ax')^2+\Theta-1,\quad \text{wo } \Theta=\frac{k}{1+k\,\Sigma Aa^2}.$$

Es seien ferner $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ die Richtungskosinus einer Hauptaxe, $w\,(1-\Theta)$ das Quadrat derselben, $\varLambda = a\,\lambda + b\,\mu + \cdots$, so hat man

$$\frac{\lambda}{A} + k\,\varLambda\,a = \frac{\lambda}{w}, \text{ etc.,}$$

also

$$\lambda = k\,\varLambda\,w\,\frac{A\,a}{A-w}, \quad \mu = k\,\varLambda\,w\,\frac{B\,b}{B-w}, \text{ etc.,}$$

und wenn man diese Gleichungen mit $a, b, \ldots$ multipliziert und addiert,

$$1 = k\,w\,\Sigma\,\frac{A\,a^2}{A-w} = k\left(\Sigma\,\frac{(A\,a)^2}{A-w} - \Sigma\,A\,a^2\right),$$

oder

$$\Sigma\,\frac{(A\,a)^2}{A-w} = \frac{1}{\Theta}, \quad \text{oder} \quad \Sigma\,\frac{f^2}{A-w} = \Theta.$$

Es ist ferner $a = \frac{f}{\Theta\,A}, \quad b = \frac{g}{\Theta\,B}$, etc., also

$$\Sigma\,A\,a^2 = \frac{1}{\Theta^2}\,\Sigma\,\frac{f^2}{A}, \quad k = \Theta + \frac{k}{\Theta}\,\Sigma\,\frac{f^2}{A}, \quad k = \frac{\Theta^2}{\Theta - \Sigma\frac{f^2}{A}}.$$

Die Gleichung des umschriebenen Kontinuums kann jetzt unter der Form

$$\left(\frac{f^2}{A} + \frac{g^2}{B} + \cdots - \Theta\right)\left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots - 1\right) - \left(\frac{f\,x}{A} + \frac{g\,y}{B} + \cdots - \Theta\right)^2 = 0$$

gegeben werden. Es sind dann $f, g, h, \ldots$ die Werte seines Centrums, $\frac{f}{\Theta}, \frac{g}{\Theta}, \cdots$ diejenigen des Pols des $(n-1)$-fachen linearen Kontinuums, welches durch die Berührung gelegt ist. Wird das Centrum festgehalten, so kann also der Pol sich nur auf dem Strahle bewegen, welcher beide Centra verbindet. Man verändere nun die linearen Dimensionen des ersten quadratischen Kontinuums im Verhältnisse $1 : \sqrt{\Theta}$, und lasse dieses neue dem ersten ähnliche und konzentrische Kontinuum eine Schar konfokaler Kontinua bestimmen, von denen n durch das zweite Centrum $(f, g, \ldots)$ gehen werden und durch die Gleichung $\Sigma\,\frac{f^2}{A-w} = \Theta$ dargestellt sind, wo man für w nach und nach n verschiedene Werte zu denken hat. Da aus den obigen Relationen jezt leicht $\lambda : \mu : \nu : \cdots = \frac{f}{A-w} : \frac{g}{B-w} : \frac{h}{C-w} : \cdots$ folgt, so sind die im zweiten Centrum errichteten Normalen der Richtung nach die Hauptaxen des umschriebenen zweiten Kontinuums, und im Ausdruck $w\,(1-\Theta)$ sind alle entsprechenden Axenquadrate enthalten.

Durch diese Erörterung ist die Aufgabe gelöst, einem gegebenen quadratischen Kontinuum (dessen Centrum O) ein anderes umzuschreiben, wenn sein Centrum L und auf dem beide Centra verbindenden Strahle OL nach Belieben ein das Berührungskontinuum bestimmender Pol $P \left(OP = \frac{1}{\Theta} \cdot OL\right)$ gegeben sind.

§ 42. *Reduzierte Form der Differentialgleichung zweiter Ordnung eines höhern Kontinuums.*

Es sei $f(x, y, \ldots) = 0$ die Gleichung eines höhern Kontinuums, $\xi, v, \ldots$ seien die (als unendlich kleine Grössen erster Ordnung zu denkenden) Inkremente der n-Variabeln $x, y, \ldots$, und

$$D = \xi \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \cdots$$

ein Ableitungssymbol, für welches $\xi, v, \ldots$ als konstant gelten; dann ist bis zur zweiten Ordnung der Inkremente

$$f(x + \xi, y + v, \ldots) = f(x, y, \ldots) + Df + \frac{1}{2} DDf = 0,$$

also

$$Df + \frac{1}{2} DDf = 0,$$

und da DDf von der zweiten Ordnung ist, so muss auch Df von der zweiten Ordnung sein. Sind nun $\lambda, \mu, \ldots$ die Richtungskosinus der Normale, $\frac{\partial f}{\partial x} = R\lambda$, $\frac{\partial f}{\partial y} = R\mu, \ldots$, also

$$Df = R(\lambda\xi + \mu v + \nu\zeta + \cdots) = Rt,$$

so ist auch t, oder „die Entfernung der Lösung $(x + \xi, y + v, \ldots)$ des gegebenen höhern Kontinuums vom linearen Tangentialkontinuum“, eine Grösse zweiter Ordnung. Demnach ist in der vollständigen Gleichung $DDf = D. Rt = tDR + RDt$ rechts das Glied tDR als Grösse dritter Ordnung im Vergleich mit $Dt = \xi D\lambda + vD\mu + \cdots$ als einer Grösse zweiter Ordnung zu vernachlässigen, sodass man einfach hat: $DDf = RDt$. Folglich ist

$$t + \frac{1}{2} Dt = 0$$

die Differentialgleichung zweiter Ordnung des gegebenen Kontinuums.

Es seien jetzt $\xi = \lambda t + \alpha' t' + \alpha'' t'' + \cdots$, $\quad v = \mu t + \beta' t' + \beta'' t'' + \cdots$, etc. orthogonale Transformationsformeln, durch welche $D t$ in $\frac{t'^2}{\varrho'} + \frac{t''^2}{\varrho''} + \cdots$ übergeht, und die Ableitungssymbole mögen sich nur auf $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, aber nicht auf die übrigen bis jetzt noch unbestimmten Richtungskosinus beziehen, ebensowenig auf $t', t'', \ldots$. Es sei ferner

$$\delta' = \alpha' \frac{\partial}{\partial x} + \beta' \frac{\partial}{\partial y} + \cdots, \; \delta'' = \alpha'' \frac{\partial}{\partial x} + \beta'' \frac{\partial}{\partial y} + \cdots, \text{ etc.; also } D = t' \delta' + t'' \delta'' + \cdots;$$

$$\text{daher } \frac{\partial (D t)}{\partial t'} = \delta' t + D \frac{\partial t}{\partial t'}; \quad \text{aber } \frac{\partial t}{\partial t'} = \lambda \frac{\partial \xi}{\partial t'} + \mu \frac{\partial v}{\partial t'} + \cdots = \lambda \alpha' + \mu \beta' + \cdots,$$

was bloss formell zu verstehen ist; also $D \frac{\partial t}{\partial t'} = \alpha' D \lambda + \beta' D \mu + \cdots$ Nun ist $\delta' D f = D \delta' f$, oder

$$\delta'(R t) = \alpha' D \frac{\partial f}{\partial x} + \beta' D \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots = \alpha' D (R \lambda) + \beta' D (R \mu) + \cdots,$$

oder

$$t \delta' R + R \delta' t = R (\alpha' D \lambda + \beta' D \mu + \cdots) + (\lambda \alpha' + \mu \beta' + \cdots) D R.$$

Da aber t von der zweiten Ordnung und $\lambda \alpha' + \mu \beta' + \cdots = 0$ ist, so folgt

$$\delta' t = \alpha' D \lambda + \beta' D \mu + \cdots.$$

Demnach ist endlich

$$\frac{\partial (D t)}{\partial t'} = 2 \delta' t,$$

oder, da $D t = \frac{t'^2}{\varrho'} + \frac{t''^2}{\varrho''} + \cdots$ vorausgesetzt war,

$$\frac{t'}{\varrho'} = \delta' t = \xi \delta' \lambda + v \delta' \mu + \cdots$$

Da diese Gleichung in Beziehung auf $t', t'', \ldots$ identisch, und ohnehin wegen $\lambda^2 + \mu^2 + \cdots = 1$ auch $\lambda \delta' \lambda + \mu \delta' \mu + \cdots = 0$ ist, so darf man $t = \lambda$, $t' = \alpha'$, $t'' = \alpha''$, ... darin substituieren, wodurch $\xi = 1$, $v = \zeta = \cdots = 0$ wird, und bekommt

$$\frac{\alpha'}{\varrho'} = \delta' \lambda, \text{ ebenso } \frac{\beta'}{\varrho'} = \delta' \mu, \; \frac{\gamma'}{\varrho'} = \delta' \nu, \text{ etc.,}$$

oder in expliciter Form:

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}-\frac{1}{\varrho'}\right)\alpha'+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\beta'+\frac{\partial\lambda}{\partial z}\gamma'+\cdots=0,\\ \frac{\partial\mu}{\partial x}\alpha'+\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}-\frac{1}{\varrho'}\right)\beta'+\frac{\partial\mu}{\partial z}\gamma'+\cdots=0,\\ \text{etc.}\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Eliminiert man aus diesen n Gleichungen die $n-1$ Verhältnisse $\alpha':\beta':\gamma':\ldots$, so scheint sich auf den ersten Blick eine Endgleichung n-ten Grades für die Unbekannte $\frac{1}{\varrho'}$ zu ergeben. Das von derselben freie Glied ist aber die Determinante $\Sigma\pm\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial\nu}{\partial z}\cdots$ und muss wegen der Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\cdot\lambda+\frac{\partial\mu}{\partial x}\cdot\mu+\frac{\partial\nu}{\partial x}\cdot\nu+\cdots=0,\\ \frac{\partial\lambda}{\partial y}\cdot\lambda+\frac{\partial\mu}{\partial y}\cdot\mu+\frac{\partial\nu}{\partial y}\cdot\nu+\cdots=0,\\ \text{etc.}\end{array}\right\}$$

verschwinden, da $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ nicht alle zugleich verschwinden dürfen. Jene Endgleichung hat also den Faktor $\frac{1}{\varrho'}$, den wir nicht brauchen können, und erniedrigt sich nach Entfernung desselben auf den $(n-1)$-ten Grad. Bezeichnet man ihre $n-1$ Wurzeln mit $\frac{1}{\varrho'}, \frac{1}{\varrho''}, \frac{1}{\varrho'''}$, etc., so geben die Gleichungen (α) für jede derselben im allgemeinen nur eine Gruppe bestimmter Verhältnisse $(\alpha':\beta':\gamma':\ldots)$, $(\alpha'':\beta'':\gamma'':\ldots)$, $(\alpha''':\beta''':\gamma''':\ldots)$, etc., und es bleibt noch nachzuweisen, dass diese Verhältnisse wirklich den Orthogonalitätsbedingungen genügen. Multipliziert man die Gleichungen (α) mit $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ und addiert sie, so ergiebt sich

$$-\frac{\lambda\alpha'+\mu\beta'+\cdots}{\varrho'}=0, \quad \text{oder} \quad \lambda\alpha'+\mu\beta'+\cdots=0.$$

Multipliziert man sie mit R, so erscheinen sie unter der Form:

$$\delta'\frac{\partial f}{\partial x}=\lambda\,\delta' R+R\frac{\alpha'}{\varrho'}, \quad \delta'\frac{\partial f}{\partial y}=\mu\,\delta' R+R\frac{\beta'}{\varrho'}, \text{ etc.}$$

Multipliziert man jetzt die Gleichungen mit $\alpha'', \beta'' \ldots$ und addiert sie, so erhält man, da schon $\lambda\alpha''+\mu\beta''+\cdots=0$ bewiesen ist,

$$\delta'\delta'' f=\frac{R}{\varrho'}(\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\cdots), \text{ ebenso } \delta''\delta' f=\frac{R}{\varrho''}(\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\cdots);$$

da aber $\delta'\delta''f = \delta''\delta'f$ ist, so folgt hieraus

$$\left(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho''}\right)(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \cdots) = 0,$$

und, wenn die Wurzeln $\frac{1}{\varrho'}$, $\frac{1}{\varrho''}$ ungleich sind, notwendig

$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \cdots = 0.$$

Hieraus kann ebenso, wie bei der Bestimmung der Hauptaxen eines quadratischen Kontinuums in § 40, geschlossen werden, dass, wenn alles übrige reell ist, immer alle gesuchten Grössen ϱ', ϱ'', ... und die entsprechenden Transformationselemente α', β', ... reell sein werden.

Was den Fall betrifft, wo die Endgleichung für ϱ dieselbe Wurzel mehrfach enthält, so weiss ich da nicht anders zu helfen, als indem ich dem System der Gleichungen (a) eine Form gebe, wo die Vertikalzeilen der Koeffizienten mit den Horizontalzeilen gleichen Rangs übereinstimmen, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial f}{\partial x}\alpha' + \frac{\partial f}{\partial y}\beta' + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma' + \cdots = 0,\\
\frac{\partial f}{\partial x}\psi' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - s'\right)\alpha' + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\beta' + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\gamma' + \cdots = 0,\\
\frac{\partial f}{\partial y}\psi' + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\alpha' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - s'\right)\beta' + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\gamma' + \cdots = 0,\\
\frac{\partial f}{\partial z}\psi' + \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}\alpha' + \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}\beta' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - s'\right)\gamma' + \cdots = 0,\\
\text{etc.}
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (b)$$

Hier ist $s' = \frac{R}{\varrho'}$, $\psi' = -\delta' \log R$. Die Form dieses Systems giebt auch sogleich zu erkennen, dass die Endgleichung in s' nur vom $(n-1)$-ten Grade ist. Wendet man auf dieses System die gleichen Schlüsse an wie in § 40, so gewinnt man auch die Einsicht, dass, wenn die Gleichung für s' z. B. eine m-fache Wurzel hat, auch m Gleichungen des Systems von den übrigen abhängen müssen, sodass man statt der gesuchten einfachen Richtung ein m-faches lineares Kontinuum erhält.

Zu den Gleichungen (b) gelangt man unmittelbar so. Es war $Df + \frac{1}{2}DDf = 0$; und es soll $Df = R(\lambda\xi + \mu v + \cdots) = Rt$, $\lambda^2 + \mu^2 + \cdots = 1$, ferner, wenn $\xi = \lambda t + \alpha' t' + \alpha'' t'' + \cdots$, etc. orthogonale Transformationsformeln sind und $t = 0$ gesetzt wird, $DDf = s't'^2 + s''t''^2 + \cdots$ sein. Dann ist $s't' = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t'}DDf$, und, wenn $\frac{\partial}{\partial t'}D = \alpha'\frac{\partial}{\partial x} + \beta'\frac{\partial}{\partial y} + \cdots = \delta'$, etc. gesetzt wird, $s't' = D\delta' f$. Da diese Gleichung

in Bezug auf $t', t'', \ldots$ identisch ist, so kann man auch $t' = \alpha', t'' = \alpha'', \ldots$ setzen, wodurch $\xi = 1 - \lambda^2$, $v = -\lambda\mu$, $\zeta = -\lambda\nu$, also $D = \frac{\partial}{\partial x} - \lambda\left(\lambda\frac{\partial}{\partial x} + \mu\frac{\partial}{\partial y} + \cdots\right)$ wird. Setzt man nun abkürzend

$$-R\psi' = \lambda\delta'\frac{\partial f}{\partial x} + \mu\delta'\frac{\partial f}{\partial y} + \cdots = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\delta'\frac{\partial f}{\partial x} + \cdots\right) = \delta' R,$$

also $\psi' = -\delta' \log R$, so hat man

$$s'\alpha' = \delta'\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\psi', \text{ etc.,}$$

woraus durch Entwicklung die Gleichungen (b) hervorgehen.

Setzen wir nun $s' = -\frac{R}{\varrho'}$, $s'' = -\frac{R}{\varrho''}, \ldots$ (ändern also die Vorzeichen der früher gebrauchten $\varrho', \varrho'', \ldots$), so nimmt die zweite Differentialgleichung des gegebenen höhern Kontinuums die Gestalt

$$2\,t = \frac{t'^2}{\varrho'} + \frac{t''^2}{\varrho''} + \frac{t'''^2}{\varrho'''} + \cdots.$$

an. Denkt man sich im Tangentialkontinuum $t = 0$ von der Berührungslösung aus irgend einen Strahl r gezogen, der mit den orthogonalen Axen der $t', t'', \ldots$ Winkel bildet, deren Kosinus $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ seien, so ist

$$\frac{2t}{r^2} = \frac{\varepsilon'^2}{\varrho'} + \frac{\varepsilon''^2}{\varrho''} + \frac{\varepsilon'''^2}{\varrho'''} + \cdots = \frac{1}{k}.$$

Da das Aggregat auf der rechten Seite dieser Gleichung nur gegebene Grössen enthält, so ist k konstant, und man kann den Schnitt ($r^2 = 2\,k\,t$) des durch die Variabeln t, r bestimmten linearen zweifachen Kontinuums (Ebene) als Kreisbogen auffassen vom Halbmesser k; sein Centrum hätte die Werte $x + \lambda k$, $y + \mu k, \ldots\ldots$ Wir nennen $\frac{1}{k}$ die der Richtung r entsprechende Krümmung des höhern Kontinuums, k den Krümmungsradius, $\frac{1}{\varrho'}, \frac{1}{\varrho''}, \ldots$ die Hauptkrümmungen und die entsprechenden Richtungen $(\alpha', \beta', \gamma', \ldots)$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'', \ldots)$, etc. die Hauptkrümmungsrichtungen. Ist

$$\frac{1}{\varrho'} < \frac{1}{\varrho''} < \frac{1}{\varrho'''} < \cdots < \frac{1}{\varrho^{(n-1)}},$$

so ist

$$\frac{1}{\varrho'} < \frac{1}{k} < \frac{1}{\varrho^{(n-1)}};$$

unter den Hauptkrümmungsrichtungen ist also eine die Richtung der grössten, eine andere die der kleinsten Krümmung.

Satz. Werden in dem $(n-1)$-fachen linearen Tangentialkontinuum aus der Berührungslösung Radien eines regulären Polyschems gezogen, so ist das arithmetische Mittel der allen diesen Radien entsprechenden Krümmungen des höhern Kontinuums gleich dem arithmetischen Mittel der $n-1$ Hauptkrümmungen und bleibt also konstant, wenn auch jenes reguläre Polyschem um sein Centrum gedreht wird.

Beweis. Oben war die Krümmung $\frac{1}{k} = \frac{\varepsilon'^2}{\varrho'} + \frac{\varepsilon''^2}{\varrho''} + \cdots$, wenn $\varrho', \varrho'', \ldots$ die Hauptkrümmungsradien und $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ die Kosinus der Winkel bezeichnen, welche die Richtung der Krümmung $\frac{1}{k}$ mit den $n-1$ Hauptkrümmungsrichtungen bildet. Da nun vermöge § 35, wenn das Symbol M ein arithmetisches Mittel anzeigt, im Sinne des ausgesprochenen Satzes $M \cdot \varepsilon'^2 = M \cdot \varepsilon''^2 = \cdots = \frac{1}{n-1}$ ist, so folgt

$$M \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''} + \cdots\right), \text{ oder}$$

$$M \cdot \frac{1}{k} = M \cdot \frac{1}{\varrho}.$$

Da wenigstens für den Raum die Summe und das Produkt aller Hauptkrümmungen von Bedeutung sind, so wollen wir aus der algebraischen Gleichung für ϱ die betreffenden Ausdrücke herleiten. Der Krümmungsradius ϱ ist hier so zu verstehen, dass $x - \lambda\varrho$, $y - \mu\varrho, \ldots$ die Werte des Krümmungszentrums sind. Wir können den $(n-1)$-ten Teil der Summe aller Hauptkrümmungen auch mittlere Krümmung nennen; die algebraische Gleichung, welche aus dem Systeme (a) durch Elimination der Richtungskosinus $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ hervorgeht, giebt für dieselbe den Ausdruck

$$M \cdot \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{\partial\mu}{\partial y} + \frac{\partial\nu}{\partial z} + \cdots\right).$$

Entwickelt man die Determinante der Koeffizienten in den Gleichungen (b), so bekommt die höchste Potenz s'^{n-1} den Koeffizienten $-(-1)^{n-1}R^2$, und da $s'^{n-1} = R^{n-1} : \varrho'^{n-1}$ ist, so erhält man für das Produkt aller Hauptkrümmungen den Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho'\varrho''\varrho'''\ldots} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} & \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} : \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \cdots\right)^{\frac{n+1}{2}}.$$

Am Ende dieses Paragraphen gebe ich noch einige mehr unmittelbare Ausdrücke für die Krümmung und für ihre Variation. Oben waren die Hauptkrümmungsrichtungen durch die Gleichungen

$$\frac{\alpha'}{\varrho'} = \delta'\lambda,\ \frac{\beta'}{\varrho'} = \delta'\mu, \ldots;\ \frac{\alpha''}{\varrho''} = \delta''\lambda,\ \frac{\beta''}{\varrho''} = \delta''\mu, \ldots;\ \text{etc.}$$

bestimmt. Geht nun im Tangentialkontinuum von der Berührungslösung aus irgend eine Richtung, welche mit den Axen der $x, y, \ldots$ Winkel, deren Kosinus $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, und mit den Hauptkrümmungsrichtungen Winkel, deren Kosinus $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ sind, bildet, so ist

$$\alpha = \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + \cdots,\quad \beta = \beta'\varepsilon' + \beta''\varepsilon'' + \cdots,\ \text{etc.};$$

also

$$\alpha \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \beta \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \cdots = \varepsilon'\delta'\lambda + \varepsilon''\delta''\lambda + \cdots = \frac{\alpha'\varepsilon'}{\varrho'} + \frac{\alpha''\varepsilon''}{\varrho''} + \cdots.$$

$$\alpha \frac{\partial \mu}{\partial x} + \beta \frac{\partial \mu}{\partial y} + \cdots = \frac{\beta'\varepsilon'}{\varrho'} + \frac{\beta''\varepsilon''}{\varrho''} + \cdots,\ \text{etc.},$$

$$\alpha\left(\alpha \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \beta \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \cdots\right) + \beta\left(\alpha \frac{\partial \mu}{\partial x} + \beta \frac{\partial \mu}{\partial y} + \cdots\right) + \text{etc.} = \frac{\varepsilon'^2}{\varrho'} + \frac{\varepsilon''^2}{\varrho''} + \cdots = \frac{1}{k},$$

oder, da $dx = \alpha\, ds,\ dy = \beta\, ds, \ldots,\ ds^2 = dx^2 + dy^2 + \cdots$, auch

$$\frac{1}{k} = \frac{dx\, d\lambda + dy\, d\mu + dz\, d\nu + \cdots}{dx^2 + dy^2 + dz^2 + \cdots};$$

dies ist der anfangs erwähnte Ausdruck für die allgemeine Krümmung.

Derselbe soll nun bloss in Beziehung auf die Differentiale $dx, dy, \ldots$ variiert werden, und δ sei das Symbol dieser Variation. Es ist

$$\Sigma\, dx\, \delta\, d \frac{\partial f}{\partial x} = \Sigma\, dx\, \delta\,(R\, d\lambda + \lambda\, dR) = R\, \Sigma\, dx\, \delta\, d\lambda + \delta\, d\, R\, \Sigma\, \lambda\, dx;$$

also, da $\Sigma\, \lambda\, dx = 0$ sein muss, $\Sigma\, dx\, \delta\, d \frac{\partial f}{\partial x} = R\, \Sigma\, dx\, \delta\, d\lambda$. Andererseits ist

$$\delta\, d \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, \delta\, d\, y + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, \delta\, d\, y + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\, \delta\, d\, z + \cdots.$$

daher

$$\Sigma\, dx\, \delta\, d \frac{\partial f}{\partial x} = \Sigma\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\, dz + \cdots\right) \delta\, dx$$

$$= d \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \delta\, dx + d \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \delta\, dy + \cdots = \Sigma\,(R\, d\lambda + \lambda\, dR)\, \delta\, dx = R\, \Sigma\, d\lambda \,.\, \delta\, dx + dR\, \Sigma\, \lambda\, \delta\, dx.$$

Da aber $\Sigma \lambda\, dx = 0$ ist, so folgt auch $\Sigma\, \lambda\, \delta\, dx = 0$; also ist $\Sigma\, dx\, \delta\, d \frac{\partial f}{\partial x} = R\, \Sigma\, d\lambda \,.\, \delta\, dx$. Aus beiden Verwandlungen folgt endlich

$$\Sigma\, dx\, \delta\, d\lambda = \Sigma\, d\lambda \,.\, \delta\, dx.$$

Mittelst dieser Relation ergiebt sich nun leicht

$$\delta \frac{1}{k} = 2 \frac{\left(d\lambda - \frac{dx}{k}\right)\delta\, d\, x + \left(d\mu - \frac{dy}{k}\right)\delta\, d\, y + \left(d\nu - \frac{dz}{k}\right)\delta\, d\, z + \cdots}{d\,x^2 \qquad + \qquad d\,y^2 \qquad + \qquad d\,z^2 \qquad + \cdots}\,.$$

Wenn diese Variation, unabhängig von den Variationen $\delta\,d\,x$, $\delta\,d\,y, \ldots$, verschwindet, so möge das betreffende k durch ϱ ersetzt werden; man erhält dann die Bedingungen

$$\varrho = \frac{dx}{d\lambda} = \frac{dy}{d\mu} = \frac{dz}{d\nu} = \text{etc.},$$

welche die Bedingung $\lambda\,d\,x + \mu\,d\,y + \nu\,d\,z + \cdots = 0$ schon in sich enthalten; es ist sogleich klar, dass sie mit den Gleichungen (a) zusammenfallen; sie dienen daher ebenfalls, um die einer Hauptkrümmungsrichtung entsprechenden Verhältnisse $d\,x : d\,y : d\,z : \ldots$ und den zugehörigen Hauptkrümmungshalbmesser ϱ zu bestimmen. D. h. dieselbe analytische Bedingung $\delta\,k = 0$, welche den grössten und kleinsten Krümmungshalbmesser liefert, giebt zugleich alle Hauptkrümmungsrichtungen samt den zugehörigen Halbmessern.

§ 43. *Ueber orthogonale Kontinua überhaupt, und über die Hauptkrümmungen eines quadratischen Kontinuums.*

Definition. Wenn n Funktionen $f, f', f'', \ldots$ der n Variabeln $x, y, \ldots$ so beschaffen sind, dass die $\frac{1}{2}\,n\,(n-1)$ Gleichungen von der Form

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f'}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f'}{\partial z} + \cdots = 0$$

alle in identischer Weise bestehen, so bilden die n durch die Gleichungen $f = \text{const.}$, $f' = \text{const.}$, $f'' = \text{const.}$, etc. dargestellten Scharen ($n-1$)-facher höherer Kontinua ein System orthogonaler Kontinua.

Dass solche Systeme auch für eine beliebige Dimensionszahl existieren, ist durch die konfokalen Kontinua zweiten Grades bewiesen.

Satz. Orthogonale Kontinua schneiden einander in den Hauptkrümmungsrichtungen.

Beweis. Es sei $\frac{\partial f}{\partial x} = R\lambda$, $\frac{\partial f}{\partial y} = R\mu, \ldots,$ $\lambda^2 + \mu^2 + \cdots = 1$, $\frac{\partial f'}{\partial x} = R'\lambda'$, $\frac{\partial f'}{\partial y} = R'\mu', \ldots,$ $\lambda'^2 + \mu'^2 + \cdots = 1$, etc., so sind $\lambda, \mu, \ldots;$ $\lambda', \mu', \ldots;$ etc. orthogonale Transformationselemente.

Wenn man also die Gleichungen

$$\frac{df}{R} = \lambda\, dx + \mu\, dy + \cdots, \quad \frac{df'}{R'} = \lambda' dx + \mu' dy + \cdots \text{ etc.}$$

mit $\lambda, \lambda', \ldots$ multipliziert und addiert, so folgt

$$dx = \lambda \frac{df}{R} + \lambda' \frac{df'}{R'} + \cdots, \quad dy = \mu \frac{df}{R} + \mu' \frac{df'}{R'} + \cdots, \text{ etc.}$$

Daher ist, wenn man jetzt $f, f', f'', \ldots$ als die unabhängigen Variabeln ansieht,

$$\lambda = R \frac{\partial x}{\partial f}, \quad \mu = R \frac{\partial y}{\partial f}, \ldots; \quad \lambda' = R' \frac{\partial x}{\partial f'}, \ldots; \text{ etc.}$$

Wir wollen nun die Summe

$$G = \lambda'' \frac{\partial \lambda}{\partial f'} + \mu'' \frac{\partial \mu}{\partial f'} + \cdots = \Sigma \lambda'' \frac{\partial \lambda}{\partial f'}$$

betrachten. Zuerst folgt aus der Gleichung $\lambda \lambda'' + \mu \mu'' + \cdots = 0$, wenn sie in Beziehung auf f' differentiiert wird, sogleich

$$G = -\Sigma \lambda \frac{\partial \lambda''}{\partial f'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Zweitens folgt aus den Gleichungen $\lambda = R \frac{\partial x}{\partial f}, \ldots$, dass

$$G = \Sigma \lambda'' \frac{\partial \cdot R \frac{\partial x}{\partial f}}{\partial f'} = R \Sigma \lambda'' \frac{\partial^2 x}{\partial f \partial f'} + \frac{\partial R}{\partial f'} \Sigma \lambda'' \frac{\partial x}{\partial f}$$

ist. Da aber $\Sigma \lambda'' \frac{\partial x}{\partial f} = \frac{1}{R} \Sigma \lambda \lambda'' = 0$ ist, und der Ausdruck $\Sigma \lambda'' \frac{\partial^2 x}{\partial f \partial f'}$ durch Vertauschung von f und f' nicht geändert wird, so folgt

$$R R' \Sigma \lambda'' \frac{\partial^2 x}{\partial f \partial f'} = R' \Sigma \lambda'' \frac{\partial \lambda}{\partial f'} = R \Sigma \lambda'' \frac{\partial \lambda'}{\partial f} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Wegen der Relation (1) ist

$$R \Sigma \lambda'' \frac{\partial \lambda'}{\partial f} = -R \Sigma \lambda' \frac{\partial \lambda''}{\partial f},$$

und wegen (2) sind

$$R'\Sigma\lambda\frac{\partial\lambda''}{\partial f'} = R''\Sigma\lambda\frac{\partial\lambda'}{\partial f''},\quad R\,\Sigma\lambda'\frac{\partial\lambda''}{\partial f} = R''\,\Sigma\lambda'\frac{\partial\lambda}{\partial f''}.$$

Da nun jeder der beiden Ausdrücke links $= - R'G$ ist, so folgt

$$\Sigma\lambda\frac{\partial\lambda'}{\partial f''} = \Sigma\lambda'\frac{\partial\lambda}{\partial f''}.$$

Nach (1) ist aber auch

$$\Sigma\lambda\frac{\partial\lambda'}{\partial f''} + \Sigma\lambda'\frac{\partial\lambda}{\partial f''} = 0.$$

Also ist $\Sigma\lambda\frac{\partial\lambda'}{\partial f''} = 0$, oder $G = 0$.

Betrachten wir ferner die Summe $H = \Sigma\lambda'\frac{\partial\lambda}{\partial f'}$, so ist

$$H = \Sigma\,\lambda'\frac{\partial\cdot R\frac{\partial x}{\partial f}}{\partial f'} = R\,\Sigma\lambda'\frac{\partial^2 x}{\partial f\,\partial f'} = R\,\Sigma\lambda'\frac{\partial\frac{\lambda'}{R'}}{\partial f} = R\frac{\partial\frac{1}{R'}}{\partial f}.$$

Differentiiert man endlich die Gleichung $\lambda^2 + \mu^2 + \cdots = 1$ nach f', so hat man

$$\Sigma\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial f'} = 0.$$

Nach dieser Vorbereitung stellen wir die n Gleichungen

$$\begin{aligned}
\lambda\;\frac{\partial\lambda}{\partial f'} + \mu\;\frac{\partial\mu}{\partial f'} + \nu\;\frac{\partial\nu}{\partial f'} + \cdots &= 0,\\
\lambda'\frac{\partial\lambda}{\partial f'} + \mu'\frac{\partial\mu}{\partial f'} + \nu'\frac{\partial\nu}{\partial f'} + \cdots &= H,\\
\lambda''\frac{\partial\lambda}{\partial f'} + \mu''\frac{\partial\mu}{\partial f'} + \nu''\frac{\partial\nu}{\partial f'} + \cdots &= 0,\\
\lambda'''\frac{\partial\lambda}{\partial f'} + \mu'''\frac{\partial\mu}{\partial f'} + \nu'''\frac{\partial\nu}{\partial f'} + \cdots &= 0,
\end{aligned}$$

etc.

zusammen; man sieht dann sogleich, dass

$$\frac{\partial\lambda}{\partial f'} = \lambda' H,\ \frac{\partial\mu}{\partial f'} = \mu' H,\ \frac{\partial\nu}{\partial f'} = \nu' H, \text{ etc.}$$

ist. Da wir aber $\lambda' = R'\frac{\partial x}{\partial f'}$, etc. hatten, so bekommen wir nun die Proportionen

$$\frac{\partial\lambda}{\partial f'} : \frac{\partial\mu}{\partial f'} : \frac{\partial\nu}{\partial f'} : \cdots = \frac{\partial x}{\partial f'} : \frac{\partial y}{\partial f'} : \frac{\partial z}{\partial f'} : \cdots,$$

oder, wenn $f', f'', f''', \ldots$ als konstant angenommen werden,

$$R'H = \frac{d\lambda}{dx} = \frac{d\mu}{dy} = \frac{d\nu}{dz} = \ldots = \frac{1}{\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Betrachten wir weiter nichts als diese $n-1$ Differentialgleichungen $\frac{d\lambda}{dx} = \frac{d\mu}{dy} = \cdots$, so ist klar, dass ihre vollständige Integration $n-1$ finite Gleichungen mit $n-1$ arbiträren Konstanten erfordert. Nehmen wir alle früheren Voraussetzungen hinzu, so kennen wir wirklich das vollständige System Integralgleichungen für (3), nämlich $f' =$ const., $f'' =$ const., $f''' =$ const., etc.; denn dieses enthält $n-1$ arbiträre Konstanten.

Die Gleichungen (3) sind uns aber auch sonst schon aus § 42 bekannt als Bedingungen für eine Hauptkrümmungsrichtung des Kontinuums $f =$ const. Wenn also in der n-fachen Totalität ein System orthogonaler Kontinua existiert, so wird jedes einzelne Kontinuum von je $n-2$ der übrigen in einer Hauptkrümmungsrichtung geschnitten. Wir wollen dieses noch strenger begründen.

Durch das System der Gleichungen (3) sind die Verhältnisse $dx : dy : dz : \ldots$ in algebraischer Weise bestimmt. Nach der obigen Herleitung von (3) würden dieselben den Verhältnissen $\lambda' : \mu' : \nu' : \ldots$ gleich sein. Da man aber nur die Funktion f zu kennen braucht, um die Gleichungen (3) bilden zu können, so ist klar, dass auch die Verhältnisse $\lambda'' : \mu'' : \nu'' : \ldots$, oder die Verhältnisse $\lambda''' : \mu''' : \nu''' : \ldots$, oder u. s. f., für $dx : dy : dz : \ldots$ gesetzt, dem System (3) genügen. Dieses hat also **wenigstens** $n-1$ algebraische Lösungen $(dx : dy : dz : \ldots)$. Wir wissen nun schon, dass es **gerade** $n-1$ solche Lösungen hat; es sind die Hauptkrümmungsrichtungen. Wenn wir also die n arbiträren Konstanten durch die Substitution einer bestimmten Lösung $(x, y, \ldots)$, von der die Hauptkrümmungsrichtungen des Kontinuums $f =$ const. ausgehen sollen, fixieren und dann der Gleichung dieses Kontinuums je $n-2$ der Gleichungen $f' =$ const., $f'' =$ const., etc. beifügen, so bestimmt jede der so erhaltenen $n-1$ Gruppen von finiten Gleichungen je eine Hauptkrümmungsrichtung des ersten Kontinuums.

Wenn man in der Gleichung $\frac{1}{\varrho} = R'H$ (siehe (3)) für H seinen früher gefundenen Wert setzt, so erhält man als Hauptkrümmung des Kontinuums $f =$ const. in der Richtung der Normale des Kontinuums $f' =$ const.

$$\frac{1}{\varrho} = -R\frac{\partial \log R'}{\partial f}.$$

Die allgemeinen Betrachtungen sollen jetzt auf die **konfokalen Kontinua** angewandt werden. Da eine vollständige Schar derselben alle n Gattungen reeller Kontinua zweiten Grades enthält, und jedes Kontinuum aus einer Gattung von allen Kontinuen der übrigen Gattungen reell und orthogonal, aber von keinem derselben Gattung

geschnitten wird, so zerfällt jene vollständige Schar in n besondere Scharen, die ein vollständiges System orthogonaler Kontinua darstellen. Wenn daher in der n-fachen Totalität irgend ein reelles quadratisches Kontinuum und auf demselben eine Lösung gegeben ist, und man legt durch diese die $n-1$ konfokalen Kontinua, so wird jenes erste von irgend $n-2$ aus diesen in einer Hauptkrümmungsrichtung geschnitten. Oder kürzer ausgedrückt:

Konfokale Kontinua schneiden einander in den Hauptkrümmungsrichtungen.

Sind nun, wie früher, $A_1, A_2, \ldots A_n$ die ersten Axenquadrate konfokaler Kontinua aus n verschiedenen Gattungen, so treten diese Grössen an die Stelle von $f, f', f'', \ldots$, und wir wollen die Hauptkrümmung des Kontinuums (A_1) suchen, deren Richtung in die Normale des Kontinuums (A_2) fällt. Zunächst haben wir $R_1^2 = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)^2 + \cdots$ zu berechnen. Wenn wir die Gleichung $\frac{x^2}{A_1} + \frac{y^2}{B_1} + \cdots = 1$ nach x differentiieren, so erhalten wir $\frac{2x}{A_1} - \left(\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{B_1^2} + \cdots\right)\frac{\partial A_1}{\partial x} = 0$, oder wenn p_1 das entsprechende Perpendikel und $\lambda_1, \mu_1, \ldots$ die Richtungskosinus der Normale bezeichnen

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} = 2\frac{p_1^2 x}{A_1} = 2p_1, \lambda_1, \text{ ebenso } \frac{\partial A_1}{\partial y} = 2p_1\mu_1, \text{ u. s. f.;}$$

also $R_1 = 2p_1$, $R_2 = 2p_2$. Bedeutet $\frac{1}{\varrho}$ die gesuchte Hauptkrümmung, so haben wir nach der obigen allgemeinen Formel

$$\frac{1}{\varrho} = -R_1\frac{\partial \log R_2}{\partial A_1} = -2p_1\frac{\partial \log p_2}{\partial A_1},$$

oder, da $p_2^2 = \frac{A_2 B_2 C_2 \ldots.}{(A_2 - A_1)(A_2 - A_3)\ldots(A_2 - A_n)}$ ist, $\frac{1}{\varrho} = p_1\frac{\partial \log(A_2 - A_1)}{\partial A_1} = \frac{p_1}{A_2 - A_1}$,

oder endlich
$$p_1\varrho = A_1 - A_2.$$

D. h. für jede auf einem quadratischen Kontinuum gegebene Lösung L ist das Produkt des zugehörigen Perpendikels mit einem der $n-1$ Hauptkrümmungsradien gleich dem Ueberschuss eines der Axenquadrate des gegebenen Kontinuums über das gleichnamige Axenquadrat desjenigen durch L gelegten konfokalen Kontinuums, dessen Normale in die gewählte Hauptkrümmungsrichtung fällt. Oder nach dem am Ende von § 40 ausgesprochenen Satz: Die $n-1$ von der Lösung L ausgehenden Hauptkrümmungsrichtungen sind parallel mit den Axen des zu L konjugierten diametralen Schnitts, und die Quadrate dieser Axen sind resp. gleich den Produkten des zu L gehörenden

Perpendikels mit den entsprechenden Hauptkrümmungsradien. Hieraus folgt leicht, dass überhaupt das Quadrat irgend eines Halbmessers des diametralen Schnitts gleich ist dem Produkt des Perpendikels mit dem Radius der Krümmung von paralleler Richtung: — ein Satz, der auch unmittelbar bewiesen werden kann.

§ 44. Allgemeine Betrachtungen über die Existenz orthogonaler Kontinua; Konstruktion eines ganz beliebigen Systems orthogonaler Flächen im Raume.

I. Während für den Raum die Untersuchung über die Bedingungen der Existenz eines beliebigen Systems orthogonaler Kontinua völlig erledigt werden kann, unterliegt sie für eine mehr als dreifache Totalität bedeutenden Schwierigkeiten. Man erwarte daher hier keine Entscheidung der Frage, ob z. B. in der vierfachen Totalität noch andere Systeme orthogonaler Kontinuen existieren ausser den konfokalen; sondern der Zweck dieses Paragraphen ist nur, die erwähnten Schwierigkeiten in den einfachsten Ausdrücken darzulegen. Für den Raum hingegen werde ich am Schluss dieses Paragraphen als Anwendung der allgemeinen Formeln die Konstruktion eines Systems orthogonaler Flächen zeigen, wenn eine einzige derselben beliebig gegeben ist. Ob diese Konstruktion neu ist, weiss ich nicht, da mir die Originalabhandlungen, worin der Begriff der orthogonalen Flächen zuerst erörtert ward, nicht zugänglich gewesen sind.

Wenn die n Funktionen $f, f', f'', \ldots$ ein orthogonales System in der n-fachen Totalität darstellen, so muss, da nach der Bezeichnungsweise des vorigen Paragraphen $df' = R'(\lambda' dx + \mu' dy + \cdots)$ ist, die Differentialgleichung

$$\lambda' dx + \mu' dy + \nu' dz + \cdots = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

integrabel sein. Die Zahl der hierdurch geforderten Bedingungen ist

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + \frac{1}{2}n(n-1) - (n-1)$$

und stimmt daher mit der Zahl der in der Natur der Aufgabe liegenden Bedingungen für die Funktion f überein; denn wir hatten ursprünglich $\frac{1}{2}n(n-1)$ Gleichungen, worin die $n-1$ Funktionen $f', f'', \ldots$ zu eliminieren sind. Da ferner $\lambda', \mu', \ldots$ die Richtungskosinus einer Hauptkrümmung des Kontinuums $f =$ const. und daher aus § 42 uns als irrationale Funktionen der partiellen Differentialkoeffizienten erster und zweiter Ordnung von f bekannt sind, deren Verhältnisse sämtlich in rationalen Funktionen einer und derselben Wurzel einer algebraischen Gleichung $(n-1)$-ten Grades ausgedrückt werden können, so muss auch jede der erwähnten Integrabilitätsbedingungen, von der

Irrationalität befreit, als partielle Differentialgleichung dritter Ordnung in Bezug auf die unbekannte Funktion f sich darstellen lassen; und man wird sich aus der Form der Gleichungen (α) § 42 leicht davon überzeugen, dass sie in Beziehung auf die Differentialkoeffizienten dritter Ordnung höchstens auf den (n — 1)-ten Grad steigen wird. Haben wir aber einmal die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Integrabilitätsbedingungen der Differentialgleichung (4) in rationaler Form, so ist sofort klar, dass in denselben auch diejenigen für die übrigen Gleichungen $\lambda'' dx + \mu'' dy + \cdots = 0$, etc. schon mitbegriffen sind. Wir hätten demnach für die gesuchte Funktion f wirklich nur dieselbe Zahl $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ von Bedingungen zu erfüllen, welche die Natur der Aufgabe auf den ersten Blick zu erfordern scheint. Wir sollten es aber im allgemeinen für unmöglich halten, dass eine einzige Funktion mehrern partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung zugleich genügen könnte, wenn nicht die Existenz der orthogonalen Kontinuen uns faktisch von der Möglichkeit überzeugte. Es wäre daher höchst interessant, wenn es gelänge, a priori von den partiellen Differentialgleichungen aus zu entscheiden, ob ausser den konfokalen Kontinuen noch andere orthogonale Systeme existieren oder nicht, und im letzten Falle aus den Bedingungen mit Notwendigkeit auf die konfokalen Kontinuen zu schliessen. Das Wenige, was nun folgen wird, steht freilich weit hinter diesem Ziele zurück.

Wir wollen sämtliche Integrabilitätsbedingungen der Gleichung (4) in einer einzigen Formel zusammenfassen, und um für diesen Zweck die Bezeichnung möglichst abzukürzen, setzen wir

$$\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x, \frac{\partial}{\partial y} = \partial_y, \cdots, \; \lambda \frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y} + \cdots = D,$$

wo $\lambda, \mu, \ldots$ die zugleich mit der Funktion f gegebenen Richtungskosinus der Normale sind; und, um auch für das Auge die in irrationaler Weise bestimmten Hauptkrümmungsrichtungskosinus von jenen scharf zu unterscheiden und unsre gänzliche Unbekanntschaft mit den Funktionen $f', f'', \ldots$ anzuzeigen, bezeichnen wir diese $n-1$ Kosinusreihen mit $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, $(\alpha', \beta', \gamma', \ldots)$, etc. und setzen ferner

$$\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} + \cdots = d, \quad \alpha' \frac{\partial}{\partial x} + \beta' \frac{\partial}{\partial y} + \cdots = d', \text{ etc.},$$

so dass, wenn $\varrho, \varrho', \varrho'', \ldots$ die entsprechenden Hauptkrümmungsradien bedeuten,

$$\frac{d\lambda}{\alpha} = \frac{d\mu}{\beta} = \frac{d\nu}{\gamma} = \cdots = \frac{1}{\varrho}, \; \frac{d'\lambda}{\alpha'} = \frac{d'\mu}{\beta'} = \cdots = \frac{1}{\varrho'}, \text{ etc.}$$

wird; endlich gebrauchen wir $n-3$ unter sich unabhängige Reihen von je n beliebigen

Grössen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \ldots; \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \ldots;$ etc.; $\mathfrak{a}_{n-3}, \mathfrak{b}_{n-3}, \ldots$ Wird nun über die Zeichen der Variabeln, auf welche die Operationen $D, d, d', \ldots$ einzig ausgeübt werden sollen, ein horizontaler Strich gesetzt, so sind sämtliche Integrabilitätsbedingungen der Gleichung $\alpha\, d\, x + \beta\, d\, y + \cdots = 0$ in der Formel

$$U = \begin{vmatrix} \partial_x & . & \partial_y & . & \partial_z & \ldots\ldots \\ \alpha & . & \beta & . & \gamma & \ldots\ldots \\ \alpha & . & \beta & . & \gamma & \ldots\ldots \\ \mathfrak{a}_1 & . & \mathfrak{b}_1 & . & \mathfrak{c}_1 & \ldots\ldots \\ \mathfrak{a}_2 & . & \mathfrak{b}_2 & . & \mathfrak{c}_2 & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{a}_{n-3} & . & \mathfrak{b}_{n-3} & . & \mathfrak{c}_{n-3} & \ldots\ldots \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

vereinigt. Denn man würde z. B. die Integrabilitätsbedingung

$$\alpha\left(\frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial y}\right) + \beta\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial z}\right) + \gamma\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\right) = 0$$

aus (5) erhalten, wenn man $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2 = \cdots = \mathfrak{a}_{n-3} = 0$, $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2 = \cdots = \mathfrak{b}_{n-3} = 0$, $\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c}_2 = \cdots = \mathfrak{c}_{n-3} = 0$ setzte. Wir können nun der Determinante U eine andere Gestalt geben, wenn wir die nicht überstrichenen Variabeln $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ durch Determinanten $(n-1)$-ter Ordnung ersetzen. Wenn nämlich

$$\varDelta = \Sigma \pm \lambda\, \beta\, \gamma'\, \delta''\, \varepsilon''' \ldots$$

die Determinante aller orthogonalen Transformationselemente $\lambda, \mu, \ldots; \alpha, \beta, \ldots; \alpha', \beta', \ldots; \alpha'', \beta'' \ldots;$ etc. bezeichnet, deren Wert bekanntlich $+1$ oder -1 sein kann, und wir uns für die Annahme des positiven Werts entscheiden, so ist, wenn die Differentialkoeffizienten rein formell verstanden werden, $\alpha = \frac{\partial \varDelta}{\partial \alpha}$, $\beta = \frac{\partial \varDelta}{\partial \beta}$, etc.; daher

$$U = \left\| \begin{matrix} \bar\partial_x & . & \bar\partial_y & . & \bar\partial_z & \ldots \\ \bar\alpha & . & \bar\beta & . & \bar\gamma & \ldots \\ \mathfrak{a}_1 & . & \mathfrak{b}_1 & . & \mathfrak{c}_1 & \ldots \\ \mathfrak{a}_2 & . & \mathfrak{b}_2 & . & \mathfrak{c}_2 & \ldots \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & \ldots \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} \lambda & . & \mu & . & \nu & \ldots \\ \alpha' & . & \beta' & . & \gamma' & \ldots \\ \alpha'' & . & \beta'' & . & \gamma'' & \ldots \\ \alpha''' & . & \beta''' & . & \gamma''' & \ldots \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} D & . & \bar d' & . & \bar d'' & \ldots \\ (\lambda\bar\alpha) & . & (\alpha'\bar\alpha) & . & (\alpha''\bar\alpha) & \ldots \\ (\lambda\,\mathfrak{a}_1) & . & (\alpha'\,\mathfrak{a}_1) & . & (\alpha''\,\mathfrak{a}_1) & \ldots \\ (\lambda\,\alpha_2) & . & (\alpha'\,\mathfrak{a}_2) & . & (\alpha''\,\mathfrak{a}_2) & \ldots \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

wo abkürzend z. B. $(\alpha\,\mathfrak{a}) = \lambda\,\mathfrak{a} + \mu\,\mathfrak{b} + \nu\,\mathfrak{c} + \cdots$ gesetzt ward. Im ersten durch einen einfachen mittlern Vertikalstrich in zwei Hälften geschiedenen Schema enthält jede Hälfte $n-1$ Horizontalzeilen mit je n Elementen. Das Schema bedeutet, dass man in

beiden Hälften je zwei gleichnamige Vertikalzeilen weglassen, die zwei Determinanten der übrigen Elemente miteinander multiplizieren und die Summe der so entstandenen n Produkte nehmen solle. Diese Summe wird nun bekanntlich auch erhalten, wenn man die Elemente irgend einer Horizontalzeile der ersten Hälfte des Schemas mit den in irgend einer Horizontalzeile der zweiten Hälfte enthaltenen gleichnamigen Elementen multipliziert, die Produkte addiert und aus allen solchen Produktsummen die Determinante bildet. In der zweiten Horizontalzeile dieser Determinante steht $(\lambda \bar{\alpha})$ als erstes Element; da es mit dem Operationszeichen D in der gleichen Vertikalzeile liegt, so können auf dasselbe nur die übrigen mit $d', d'', \ldots$ bezeichneten Operationen ausgeübt werden. Nun ist $\lambda\alpha + \mu\beta \cdots = 0$, also

$$0 = d'(\bar{\lambda}\,\bar{\alpha}) = d'(\bar{\lambda}\,\alpha) + d'(\lambda\bar{\alpha}), \text{ oder } d'(\lambda\bar{\alpha}) = -\Sigma\alpha\, d'\lambda;$$

aber $d'\lambda = \frac{\alpha'}{\varrho'}, \cdots$; also $d'(\lambda\bar{\alpha}) = -\frac{\alpha\alpha' + \beta\beta' + \cdots}{\varrho'} = 0$, ebenso $d''(\lambda\bar{\alpha}) = 0$, u. s. f. Man kann also in der letzten mit U äquivalenten Determinante das Element $(\lambda\bar{\alpha})$ geradezu durch 0 ersetzen. Da man ferner die $n(n-3)$ freien Grössen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ immer so wählen kann, dass in der betrachteten Determinante $(n-1)$-ter Ordnung jedes in den $n-3$ letzten Horizontalzeilen vorkommende Element einen willkürlich gegebenen Wert erhält, dass z. B. alle in irgend zweien Vertikalzeilen vorkommenden Elemente gleich Null werden, so folgt aus $U = 0$, dass alle im Schema

$$\begin{Vmatrix} D \,. & d' & . & d'' & . & d''' & \ldots\ldots \\ 0 \,. & (\alpha'\bar{\alpha}) & . & (\alpha''\bar{\alpha}) & . & (\alpha'''\bar{\alpha}) & \ldots\ldots \end{Vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

enthaltenen Determinanten zweiter Ordnung einzeln verschwinden; und umgekehrt, aus (6) folgt (5) oder die Integrabilität der Differentialgleichung $\alpha\, dx + \beta\, dy + \cdots = 0$. Wir bekommen also $n-2$ Gleichungen

$$\alpha' D\alpha + \beta' D\beta + \cdots = 0, \quad \alpha'' D\alpha + \beta'' D\beta + \cdots = 0, \text{ etc.} \quad \ldots \quad (7)$$

und $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ Gleichungen

$$\alpha'' d'\alpha + \beta'' d'\beta + \cdots = \alpha' d''\alpha + \beta' d''\beta + \cdots, \text{ etc.} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

In der Absicht, diesen Gleichungen eine Form zu geben, worin die dritten Differentialkoeffizienten der Funktion f sichtbar hervortreten, führen wir zuvor einige Abkürzungen ein. Wenn z. B. die Polynome $\alpha x + \beta y + \gamma z + \cdots$ und $\lambda x + \mu y + \nu z + \cdots$ mit einander multipliziert und im entwickelten Produkt Glieder wie x^2, xy resp. durch $\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}$ ersetzt werden, so soll die entsprechende zusammengesetzte Operation durch

$(d \,.\, D)$ oder $(D \,.\, d)$ bezeichnet werden; die Elemente der operativen Polynome D, d werden dann wie Konstanten behandelt, und bei ihrer Multiplikation wird den Operationen selbst kein gegenseitiger Einfluss verstattet. Bezieht sich hingegen z. B. die Operation D nur auf die Elemente des operativen Polynoms d, so soll die daraus hervorgehende neue Operation durch $\overline{D\,d}$ bezeichnet sein. Es wäre demnach, wenn φ irgend eine Funktion der Variabeln $x, y, \ldots$ bezeichnet,

$$\overline{D\,d}\,\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} D\,\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} D\,\beta + \cdots, \text{ aber } \overline{d\,D}\,\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\,\lambda + \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\,\mu + \cdots$$

Dieses vorausgesetzt, ist z. B.

$$D\,(d\,\varphi) = (D\,.\,d)\,\varphi + \overline{D\,d}\,\varphi,$$
$$D\,\big((d\,.\,d')\,\varphi\big) = (D\,.\,d\,.\,d')\,\varphi + (d'\,.\,\overline{D\,d})\,\varphi + (d\,.\,\overline{D\,d'})\,\varphi,$$

u. s. f. Die zusammengesetztern Anwendungen dieser Bezeichnungsart werden sich nun leicht von selbst verstehen.

Mit Rücksicht auf

$$R^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \cdots, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = R\,\lambda, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = R\,\mu, \ldots, \; \lambda\,\alpha + \mu\,\beta + \cdots = 0, \text{ etc.}$$

erhält man leicht

$$Df = R, \quad df = 0, \quad d'f = 0, \quad d''f = 0, \text{ etc.}$$

Wenn nun δ irgend ein lineares operatives Polynom bedeutet, so ist

$$\overline{\delta\,D}\,f = \Sigma\,\frac{\partial f}{\partial x}\,\delta\,\lambda = R\,\Sigma\,\lambda\,\delta\,\lambda = 0 \text{ wegen } \lambda^2 + \mu^2 + \cdots = 1,$$
$$\overline{\delta\,d}\,f = \Sigma\,\frac{\partial f}{\partial x}\,\delta\,\alpha = R\,\Sigma\,\lambda\,\delta\,\alpha = -R\,\Sigma\,\alpha\,\delta\,\lambda.$$

Man hat daher, weil $\delta\,(Df) = (D\,.\,\delta) f + \overline{\delta\,D}\,f$, u. s. f.,

$$(D\,.\,\delta) f = \delta\,R, \quad \ldots \quad (9) \qquad (d\,.\,\delta) f = R\,\Sigma\,\alpha\,\delta\,\lambda, \text{ etc.} \quad \ldots \quad (10)$$

Setzt man in der zweiten Formel $\delta = d'$ und erinnert sich, dass $d\,\lambda = \frac{\alpha}{\varrho}$, etc., so erhält man

$$(d\,.\,d') f = 0. \quad \ldots \quad (11)$$

Es ist ferner

$$(d\,.\,\delta d')f - \Sigma\,\delta\,\alpha'\,.\,d\,\frac{\partial f}{\partial x} = \Sigma\,\delta\,\alpha'\,.\,(\lambda\,d\,R + R\,d\,\lambda) = d\,R\,.\,\Sigma\,\lambda\,\delta\,\alpha' + \frac{R}{\varrho}\,\Sigma\,\alpha\,\delta\,\alpha',$$

oder, da $(d'\,.\,\delta)f = R\,\Sigma\,\alpha'\delta\,\lambda = -R\,\Sigma\,\lambda\,\delta\,\alpha'$, auch

$$(d\,.\,\delta d')f = -\frac{d\,R}{R}\,(d'\,.\,\delta)f - \frac{R}{\varrho}\,\Sigma\,\alpha'\delta\,\alpha.$$

Wendet man aber die Operation δ auf die Gleichung (11) an, so bekommt man

$$(d\,.\,d'\,.\,\delta)f + (d\,.\,\delta\,d')f + (d'\,.\,\overline{\delta\,d})f = 0.$$

Daher ist

$$(d\,.\,d'\,.\,\delta)f = \frac{d R}{R}\,(d'\,.\,\delta)f + \frac{d' R}{R}\,(d\,.\,\delta)f + R\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'}\right)\Sigma\,\alpha'\delta\,\alpha. \quad . \quad . \quad (12)$$

Setzt man hier zuerst $\delta = D$, dann $\delta = d''$, und berücksichtigt die Gleichungen (9) und (11), so erhält man

$$(D\,.\,d\,.\,d')f = 2\,\frac{d\,R\,.\,d'R}{R} + R\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'}\right)\Sigma\,\alpha' D\,\alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

$$(d\,.\,d'\,.\,d'')f = R\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'}\right)\Sigma\,\alpha' d''\alpha. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Da in (14) links die Symbole d, d', d'' permutiert werden dürfen, so ergeben sich rechts sechs verschiedene Ausdrücke; unter anderm hat man

$$\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'}\right)\Sigma\,\alpha' d''\alpha = \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho''}\right)\Sigma\,\alpha'' d'\alpha. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Die Formel (13) kann auf folgende Weise vereinfacht werden. Es ist

$$(d\,.\,d')\,R = (d\,.\,d')\,(Df) = \Sigma\,(d\,.\,d')\left(\lambda\,\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$= \Sigma\,(d\,.\,d')\,\lambda\,.\,\frac{\partial f}{\partial x} + \Sigma\,d\,\lambda\,.\,d'\,\frac{\partial f}{\partial x} + \Sigma\,d'\lambda\,.\,d\,\frac{\partial f}{\partial x} + \Sigma\,\lambda\,(d\,.\,d')f$$

$$= R\,\Sigma\,\lambda\,(d\,.\,d')\,\lambda + \Sigma\,d\,\lambda\,.\,(\lambda\,d'R + R\,d'\lambda) + \Sigma\,d'\lambda\,.\,(\lambda\,d\,R + R\,d\,\lambda) + (D\,.\,d\,.\,d')f.$$

Da nun überhaupt $\Sigma\,\lambda\,\delta\,\lambda = 0$ und daher $\Sigma\,\lambda\,(\delta\,.\,\delta')\,\lambda + \Sigma\,\delta\,\lambda\,.\,\delta'\lambda = 0$, so ist

$$\Sigma\,\lambda\,(d\,.\,d')\,\lambda = -\Sigma\,d\,\lambda\,.\,d'\lambda = -(\Sigma\,\alpha\,\alpha') : \varrho\,\varrho' = 0;$$

folglich

$$(d\,.\,d')\,R = (D\,.\,d\,.\,d')f.$$

Nun ist ferner $(d\,.\,d')\frac{1}{R} = -\frac{(d\,.\,d')\,R}{R^2} + 2\frac{dR\,.\,d'R}{R^3}$. Wenn man also die Gleichung (13) durch R^2 dividiert, so ergiebt sich

$$(d\,.\,d')\frac{1}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho}\right)\Sigma\,\alpha' D\,\alpha. \quad \text{. . . . . (16)}$$

Wenden wir jetzt diese allgemeinen Formeln auf die transformierten Integrabilitätsbedingungen (7) und (8) an, so ergiebt sich namentlich aus der Vergleichung von (8) mit (15), da im allgemeinen ϱ' und ϱ'' verschieden sein werden, offenbar $\Sigma\alpha' d''\alpha = 0$. Daher haben wir jetzt

$$(d\,.\,d')\frac{1}{R} = 0,\ (d\,.\,d'')\frac{1}{R} = 0, \text{ etc.} \quad . \ . \ . \quad (17) \qquad (n-2 \text{ Gleichungen})$$

$$(d\,.\,d'\,.\,d'')f = 0,\ (d\,.\,d'\,.\,d''')f = 0, \text{ etc.}, (d\,.\,d''\,.\,d''')f = 0, \text{ etc.} \ (18) \ \left(\binom{n-2}{2} \text{ Gleichungen}\right)$$

als Bedingungen der Integrabilität der Gleichung $\alpha\,dx + \beta\,dy + \cdots = 0$. Da z. B.

$$(d\,.\,d'\,.\,d'')f = \alpha\,\alpha'\alpha''\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + (\alpha'\alpha''\beta + \alpha\,\alpha''\beta' + \alpha\,\alpha'\beta'')\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y} + \text{etc.}$$

ist, so sind die Gleichungen (18) in Beziehung auf die dritten Differentialkoeffizienten von f linear und homogen, aber in Beziehung auf die ersten und zweiten irrational. Will man auch in den Gleichungen (17) die dritten Differentialkoeffizienten sichtbar machen, so bringe man sie unter die Form

$$(D\,.\,d\,.\,d')f = 2\frac{dR\,.\,d'R}{R}.$$

Da auch die übrigen Differentialgleichungen $\alpha' dx + \beta' dy + \cdots = 0$, etc. integrabel sein müssen, so bekommen wir im ganzen so viele Bedingungsgleichungen von der Form $(d\,.\,d')\frac{1}{R} = 0$, als die $n-1$ Symbole $d, d', d'', d''', \ldots$ zu zweien, und so viele von der Form $(d\,.\,d'\,.\,d'')f = 0$, als dieselben Symbole zu dreien kombiniert werden können, im ganzen also $\binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} = \binom{n}{3}$ Bedingungen. Es liegt also die schwierige Aufgabe vor, nachzuweisen, dass alle diese $\binom{n}{3}$ Bedingungen schon in den $\binom{n-1}{2}$ Gleichungen (17) und (18) enthalten seien, eine Aufgabe, für deren Lösung ich durchaus keinen Rat weiss.

Wir wollen nun annehmen, die Form der Funktion f, welche der Aufgabe vollkommen genügt, sei verloren gegangen; aber aus der ganzen Schar der durch $f = \text{const.}$

dargestellten Kontinua sei ein einziges für unsre Anschauung zurückgeblieben und durch die Gleichung $V = 0$ dargestellt, welche explicite nur die n Variabeln $x, y, z, \ldots$ enthält. Wir müssen uns dann V auch implicite als Funktion von f denken, in der aber durch die Annahme eines konstanten Werts für f und Verschmelzung desselben mit allen andern Konstanten jede Spur der Funktionsweise in Beziehung auf f ausgelöscht ist. Welchen Bedingungen wird die Funktion V genügen müssen, damit das entsprechende einzelne Kontinuum einer Schar angehören könne, welche fähig ist, einem orthogonalen Systeme sich einzureihen?

Wird V nicht nur explicite, sondern auch implicite vermittelst f als Funktion von $x, y, \ldots$ aufgefasst, so ist V mit Null identisch; daher wird auch jede ableitende Operation ein mit Null identisches Resultat liefern. Wird V so aufgefasst, so soll es durch $\overline{V}$ bezeichnet werden; sonst aber mögen alle ableitenden Operationen nur explicite verstanden werden und unter sich unabhängig sein. Werden sie mit $\delta, \delta', \delta''$ bezeichnet, so ist

$$\delta \overline{V} = \left(\delta + \delta f \cdot \frac{\partial}{\partial f}\right) V = 0,$$

$$\delta \delta' \overline{V} = \left(\delta + \delta f \cdot \frac{\partial}{\partial f}\right) \left(\delta' + \delta' f \cdot \frac{\partial}{\partial f}\right) V + \delta \delta' f \cdot \frac{\partial V}{\partial f} = 0,$$

$$\delta \delta' \delta'' \overline{V} = \left(\delta + \delta f \cdot \frac{\partial}{\partial f}\right) \left(\delta' + \delta' f \cdot \frac{\partial}{\partial f}\right) \left(\delta'' + \delta'' f \cdot \frac{\partial}{\partial f}\right) V$$

$$+ \delta' \delta'' f \cdot \left(\delta + \delta f \cdot \frac{\partial}{\partial f}\right) \frac{\partial V}{\partial f} + \delta \delta'' f \cdot \left(\delta' + \delta' f \cdot \frac{\partial}{\partial f}\right) \frac{\partial V}{\partial f} + \delta \delta' f \cdot \left(\delta'' + \delta'' f \cdot \frac{\partial}{\partial f}\right) \frac{\partial V}{\partial f} + \delta \delta' \delta'' f \cdot \frac{\partial V}{\partial f} = 0.$$

Setzt man in der ersten Gleichung $\delta = D$, so erhält man

$$D V + R \frac{\partial V}{\partial f} = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Werden in der dritten Gleichung $\delta, \delta', \delta''$ durch d, d', d'' ersetzt, so ergiebt sich vermöge der von speziellen Voraussetzungen unabhängigen Gleichung (11)

$$(d \,.\, d' \,.\, d'') V + (d \,.\, d' \,.\, d'') f \cdot \frac{\partial V}{\partial f} = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

Da $\frac{\partial V}{\partial f}$ unbekannt ist, so reicht die Gleichung (19) zur Bestimmung der Funktion R nicht hin; die Gleichung (20) hingegen verglichen mit (18) giebt $(d \,.\, d' \,.\, d'') V = 0$.

Wenn also das einzelne Kontinuum $V = 0$ einem orthogonalen System soll angehören können, so müssen erstens alle $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$ in der Form $(d \,.\, d' \,.\, d'') V = 0$ begriffenen Bedingungen erfüllt sein, und zweitens dürfen

die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung von der Form $(d\,.\,d')\frac{1}{R}=0$, durch welche die unbekannte Funktion R der n Variabeln $x, y, \ldots$ bestimmt wird, einander nicht widersprechen.

Obgleich nach § 42 die Elemente $\lambda, \mu, \ldots, \alpha, \beta, \ldots, \alpha', \beta', \ldots$ der operativen Polynome $D, d, d', \ldots$ als Richtungskosinus der Normale und der Hauptkrümmungen des Kontinuums $V=0$ ihren Werten nach bekannt sind, so sind uns doch ihre Funktionsweisen wegen des Verlusts der Funktion f gänzlich unbekannt; und wenn wir auch die genannten Elemente durch Funktionen aller n Variabeln $x, y, \ldots$ ausdrücken, ohne irgend eine Substitution oder Elimination mittelst der Gleichung $V=0$ anzuwenden, so haben wir doch lauter unechte Funktionsweisen, welche sich ändern, so oft wir dasselbe Kontinuum durch eine von $\varphi(V)=\varphi(0)$ verschiedene Gleichungsform darstellen, wie z. B. $x-\psi(y, z, \ldots)=0$. Daher sind alle Variationen willkürlich, welche Richtungen entsprechen, die vom gegebenen Kontinuum $V=0$ sich entfernen; und ihren Werten nach bestimmt sind nur diejenigen Variationen, welche tangierenden Richtungen entsprechen; zu diesen gehören nun allerdings die mit $d, d', \ldots$ bezeichneten Variationen, zu jenen unbestimmten hingegen die Variation D. Diese Betrachtungen mögen anschaulich zeigen, dass man allerdings, wenn die Werte einer Funktion $\frac{1}{R}=W$ nur für jede dem Kontinuum $V=0$ angehörende Lösung bekannt sind, die Differentialgleichung $(d\,.\,d')W=0$ in der ganzen Ausdehnung dieses Kontinuums verifizieren kann, wenn anders W derselben genügt. Denn da d' einer tangierenden Richtung entspricht, so ist $d'W$ überall auf dem Kontinuum bekannt, daher auch $d(d'W)$. Da ferner $\alpha', \beta', \ldots$ überall auf dem Kontinuum bekannt sind, so sind es auch $d\alpha', d\beta', \ldots$. Die diesen Elementen entsprechende Richtung tangiert aber, weil $\Sigma\lambda\, d\alpha' = -\Sigma\alpha' d\lambda = -\frac{1}{\varrho}\Sigma\alpha\alpha' = 0$. Daher ist auch $\overline{d\,d'}\,W$ überall auf dem Kontinuum bekannt; also ist es endlich auch $(d\,.\,d')W = d(d'W) - \overline{d\,d'}\,W$. Da ferner leicht gezeigt werden kann, dass überhaupt

$$(d\,.\,d'd'')V = DV\cdot\left(\frac{1}{\varrho'}-\frac{1}{\varrho''}\right)\Sigma\alpha''d\alpha',$$

so sieht man sogleich ein, dass auch die Gleichung $(d\,.\,d'.\,d'')V=0$ auf dem ganzen gegebenen Kontinuum verifiziert werden kann, indem man sie durch $\Sigma\alpha''d\alpha'=0$ ersetzt.

Die partielle Differentialgleichung $(d\,.\,d')W=0$ z. B. enthält eigentlich eine unabhängige Variable zu viel. Will man dieselbe nicht bloss gleichsam graphisch verifizieren, sondern sie auf eine echte analytische Form bringen, so kann man, um möglichst allgemein zu verfahren, jede der n Variabeln $x, y, \ldots$ so in Funktion von n neuen Variabeln $t_1, t_2, \ldots t_n$ ausdrücken, dass $t_n=$ const. dasselbe Kontinuum, wie $V=0$, darstellt. Es ist dann möglich, alle nach $x, y, \ldots$ genommenen partiellen Differentialkoeffizienten durch solche, die nach $t_1, t_2, \ldots t_n$ genommen sind, auszudrücken; und

zuletzt wird man anstatt $(d \,.\, d')\, W = 0$ eine Gleichung erhalten, worin nur die nach den $n - 1$ Variabeln $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$ genommenen partiellen Differentialkoeffizienten erster und zweiter Ordnung von $x, y, \ldots, W$ vorkommen.

Um dieses Verfahren durch ein leichtes Beispiel zu erläutern, legen wir den Raum mit den drei orthogonalen Koordinaten x, y, z zu Grunde, und denken uns diese als solche Funktionen der drei neuen Variabeln t, u, v, dass $v =$ const. eine krumme Fläche, und überdies, was angeht und zur Vereinfachung beiträgt, $u =$ const. die der Richtung (α, β, γ) entsprechende, $t =$ const. die andere Krümmungslinie darstellt. Es sei dann $\frac{\partial x}{\partial t} = p\alpha$, $\frac{\partial y}{\partial t} = p\beta$, $\frac{\partial z}{\partial t} = p\gamma$; $\frac{\partial x}{\partial u} = q\alpha'$, $\frac{\partial y}{\partial u} = q\beta'$, $\frac{\partial z}{\partial u} = q\gamma'$; (λ, μ, ν) die Richtung der Normale. Da nun $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{\alpha}{\varrho}, \ldots, \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{\alpha'}{\varrho'}, \ldots$, so ist leicht nachzuweisen, dass

$$\lambda \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial u} + \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t\, \partial u} + \nu \frac{\partial^2 z}{\partial t\, \partial u} = 0$$

ist, d. h., dass die den Elementen $\frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial u}, \cdots$ entsprechende Richtung die Fläche tangiert. Man darf daher setzen

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial u} = T\frac{\partial x}{\partial t} + U\frac{\partial x}{\partial u},\; \frac{\partial^2 y}{\partial t\, \partial u} = T\frac{\partial y}{\partial t} + U\frac{\partial y}{\partial u},\; \frac{\partial^2 z}{\partial t\, \partial u} = T\frac{\partial z}{\partial t} + U\frac{\partial z}{\partial u},$$

indem von diesen drei Gleichungen immer eine die notwendige Folge der zwei übrigen ist; und T, U sind als bekannte Funktionen von t, u anzusehen. Nun ist

$$d' W = \frac{1}{q}\frac{\partial W}{\partial u}, \quad d\,(d' W) = \frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{q}\frac{\partial W}{\partial u}\right),$$

$$\bar{d}\, d' W = \frac{1}{p}\sum \frac{\partial \alpha'}{\partial t}\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{p}\sum \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{q}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{p}\frac{\partial \frac{1}{q}}{\partial t}\frac{\partial W}{\partial u} + \frac{1}{pq}\sum \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial u}\frac{\partial W}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{p}\frac{\partial \frac{1}{q}}{\partial t}\frac{\partial W}{\partial u} + \frac{1}{pq}\left(T\frac{\partial W}{\partial t} + U\frac{\partial W}{\partial u}\right);$$

man erhält also zuletzt

$$p\,q(d \,.\, d')\, W = \frac{\partial^2 W}{\partial t\, \partial u} - T\frac{\partial W}{\partial t} - U\frac{\partial W}{\partial u} = 0,$$

eine partielle Differentialgleichung mit bloss 2 unabhängigen Variabeln.

Um den Gang der folgenden auf den Raum bezüglichen speziellen Erörterung nicht zu unterbrechen, wollen wir hier noch eine allgemeine Relation voranschicken. Setzt man in (10) $\delta = d$, so ergiebt sich

$$(d\,.\,d)\,f = R\,\Sigma\,\alpha\,d\,\lambda = \frac{R}{\varrho};$$

thut man das Gleiche in (12), so bekommt man mit Rücksicht auf (11)

$$(d\,.\,d\,.\,d')\,f = \frac{d'R}{\varrho} + R\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'}\right)\Sigma\,\alpha' d\,\alpha.$$

Wendet man aber die Operation d' auf die vorletzte Gleichung an, so hat man

$$d'\,\frac{R}{\varrho} = (d\,.\,d\,.\,d')\,f + 2\,(d\,.\,\overline{d'd})\,f.$$

Hier ist

$$(d\,.\,\overline{d'd})\,f = \Sigma\,d'\alpha\,.\,d\,\frac{\partial f}{\partial x} = \Sigma\,d'\alpha\,(\lambda\,d\,R + R\,d\,\lambda) = -\,d\,R\,.\,\Sigma\,\alpha\,d'\lambda + \frac{R}{\varrho}\,\Sigma\,\alpha\,d'\alpha = 0;$$

also

$$(d\,.\,d\,.\,d')\,f = \frac{d'R}{\varrho} - \frac{R}{\varrho^2}\,d'\varrho.$$

Durch Vergleichung der zwei Ausdrücke für $(d\,.\,d\,.\,d')\,f$ ergiebt sich demnach

$$\Sigma\,\alpha\,d\,\alpha' = \frac{\varrho' d' \log \varrho}{\varrho' - \varrho},$$

folglich auch

$$\Sigma\,\alpha' d'\alpha = \frac{\varrho\,d \log \varrho'}{\varrho - \varrho'}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

ein Ausdruck, den man als Wert einer Hauptkrümmung des Kontinuums mit der Normale $(\alpha, \beta, \ldots)$, und zwar nach der Richtung $(\alpha', \beta', \ldots)$ hin, auffassen kann.

II. Anwendung auf den Raum. Für $n = 3$ giebt es nur die einzige Bedingung $(d\,.\,d')\,\frac{1}{R} = 0$. Da nun überhaupt

$$(d\,.\,d') = \Sigma\,\alpha\,\alpha'\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Sigma\,(\alpha\,\beta' + \alpha'\beta)\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}$$

ist, so muss für $n = 3$ die Irrationalität wegfallen. Es sei $\alpha\,\alpha' = A$, $\beta\,\beta' = B$, $\gamma\,\gamma' = C$, $\beta\,\gamma' + \beta'\gamma = D$, $\gamma\,\alpha' + \gamma'\alpha = E$, $\alpha\,\beta' + \alpha'\beta = F$, so gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2\,\lambda\,A + \mu\,F + \nu\,E &= 0, \\ \lambda\,F + 2\,\mu\,B + \nu\,D &= 0, \\ \lambda\,E + \mu\,D + 2\,\nu\,C &= 0, \end{aligned}$$

aus denen sich leicht

$$\left.\begin{aligned} \mu\nu D &= \lambda^2 A - \mu^2 B - \nu^2 C, \\ \nu\lambda E &= -\lambda^2 A + \mu^2 B - \nu^2 C, \\ \lambda\mu F &= -\lambda^2 A - \mu^2 B + \nu^2 C \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

ergiebt. Wenn man ferner die zwei Gleichungen

$$\alpha \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \beta \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \frac{\alpha}{\varrho}, \quad \alpha' \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \beta' \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \gamma' \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \frac{\alpha'}{\varrho'}$$

resp. mit α', α multipliziert und addiert, so erhält man

$$2A \frac{\partial \lambda}{\partial x} + F \frac{\partial \lambda}{\partial y} + E \frac{\partial \lambda}{\partial z} = A\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right), \text{ oder, da } \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} \text{ ist,}$$

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial z}\right) A + \frac{\partial \lambda}{\partial z} E + \frac{\partial \lambda}{\partial y} F = 0.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\lambda\mu\nu$, eliminiert E und F mittelst (22), setzt

$$\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial x} = -\mu \frac{\partial \mu}{\partial x} - \nu \frac{\partial \nu}{\partial x}, \quad \mu \frac{\partial \mu}{\partial y} = -\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial y} - \nu \frac{\partial \nu}{\partial y}, \quad \nu \frac{\partial \nu}{\partial z} = -\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial z} - \mu \frac{\partial \mu}{\partial z}$$

und führt die abkürzenden Bezeichnungen

$$l = \mu \frac{\partial \lambda}{\partial z} - \nu \frac{\partial \lambda}{\partial y}, \quad m = \nu \frac{\partial \mu}{\partial x} - \lambda \frac{\partial \mu}{\partial z}, \quad n = \lambda \frac{\partial \nu}{\partial y} - \mu \frac{\partial \nu}{\partial x}$$

ein, wo dann $l + m + n = 0$ als Bedingung für die Integrabilität der Gleichung $\lambda\,dx + \mu\,dy + \nu\,dz = 0$ schon erfüllt ist, so erhält man $(-\mu^2 m + \nu^2 n) A + \mu^2 l B - \nu^2 l C = 0$, und wenn man A mittelst der Gleichung $A + B + C = 0$ eliminiert, $(\mu^2 + \nu^2)(mC - nB) = 0$. Also ist $A : B : C = l : m : n$. Setzt man deshalb

$$A = \frac{\lambda\mu\nu}{T} l, \quad B = \frac{\lambda\mu\nu}{T} m, \quad C = \frac{\lambda\mu\nu}{T} n, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

so folgt

$$D = \frac{\lambda}{T}(\lambda^2 l - \mu^2 m - \nu^2 n), \; E = \frac{\mu}{T}(-\lambda^2 l + \mu^2 m - \nu^2 n), \; F = \frac{\nu}{T}(-\lambda^2 l - \mu^2 m + \nu^2 n). \quad (24)$$

Da ferner $\lambda = \beta\gamma' - \beta'\gamma$, $A = \alpha\alpha'$, $D = \beta\gamma' - \beta'\gamma$ ist, so hat man $\lambda A D = \alpha\alpha'(\beta^2\gamma'^2 - \beta'^2\gamma^2)$, etc.,

$$\lambda A D + \mu B E + \nu C F = \begin{vmatrix} \alpha\alpha' & \beta\beta' & \gamma\gamma' \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha'^2 & \beta'^2 & \gamma'^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' & \beta\beta' & \gamma\gamma' \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 & \beta'^2 & \gamma'^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \beta\beta' & \gamma\gamma' \\ 1 & \beta^2 & \gamma^2 \\ 1 & \beta'^2 & \gamma'^2 \end{vmatrix}$$

$$= -(\beta\gamma + \beta'\gamma')(\beta\gamma' - \beta'\gamma) = \lambda\mu\nu,$$

und, wenn man in dieser letzten Gleichung die vorigen Ausdrücke für $A, B, \ldots$ substituiert,

$$T^2 = \lambda^4 l^2 + \mu^4 m^2 + \nu^4 n^2 - 2\,\mu^2 m\,\nu^2 n - 2\,\nu^2 n\,\lambda^2 l - 2\,\lambda^2 l\,\mu^2 m \ldots \quad (25)$$

Durch die Gleichungen (23), (24) und (25) sind uns die Elemente des quadratischen operativen Polynoms $(d \,.\, d')$ vollständig bekannt, und die einzige Bedingung, von der oben die Rede war, ist nun, wenn $\frac{1}{R} = W$ gesetzt wird,

$$T \,.\, (d \,.\, d')\,W = \lambda\,\mu\,\nu \left(l\,\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + m\,\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + n\,\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)$$

$$+ \lambda(\lambda^2 l - \mu^2 m - \nu^2 n)\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial z} + \mu(-\lambda^2 l + \mu^2 m - \nu^2 n)\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial z} + \nu(-\lambda^2 l - \mu^2 m + \nu^2 n)\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial z} = 0. \quad (26)$$

Setzt man endlich hier $W = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{R}$, $\lambda = \frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial x}$, etc. und multipliziert mit R^{12}, so wird die Gleichung in Beziehung auf alle partiellen Differentialkoeffizienten der gesuchten Funktion f ganz und rational.

Ich führe bloss noch an, dass die partielle Differentialgleichung dritter Ordnung für eine Funktion f, welche eine zu einem orthogonalen Systeme gehörende Flächenschar darstellt, auch unter folgende Form gebracht werden kann:

$$T^2 \Sigma\left(\lambda\frac{\partial \beta}{\partial x} - \beta\frac{\partial \gamma}{\partial x}\right) = \lambda\mu\nu\Sigma\lambda\left(m\frac{\partial n}{\partial x} - n\frac{\partial m}{\partial x}\right) + \Sigma\lambda\,l\,(\lambda^2 l - \mu^2 m - \nu^2 n)\left(\frac{\partial \nu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial z}\right) = 0.$$

Trägt man auf jeder Normale des Kontinuums $f =$ const. ein unendlich kleines Stück $\frac{\delta f}{R}$ auf, so liegen die Endpunkte aller dieser Stücke in dem successiven Kontinuum derselben Schar, für welches $f(x, y, \ldots) =$ const. $+ \delta f$ ist. Wenn man also eine Funktion W kennt, welche der Bedingung $(d \,.\, d')\,W = 0$ genügt, und trägt dann auf jeder Normale der Fläche $V = 0$ ein Stück $W\omega$ auf, wo ω einen sehr kleinen konstanten Faktor bedeutet, so liegen die Endpunkte in einer neuen Fläche, welche fähig ist, zugleich mit der vorigen einem orthogonalen System anzugehören. Diese Bemerkung führt uns zu einer graphischen Konstruktion eines beliebigen orthogonalen Flächensystems.

Da $\Sigma\lambda\,d'\alpha = 0$, $\Sigma\alpha\,d'\alpha = 0$ ist, so folgt $d'\alpha : d'\beta : d'\gamma = \alpha' : \beta' : \gamma'$ und hieraus $d'\alpha = \alpha' . \Sigma\alpha' d'\alpha$, etc. Daher ist das operative Polynom $\overline{d'd} = \Sigma d'\alpha\frac{\partial}{\partial x} = \Sigma\alpha' d'\alpha \times d'$, und es wird dadurch $(d \,.\, d')\,W = d'(d\,W) - \Sigma\alpha' d'\alpha \times d'\,W$. Wenn also die Funktion W der Bedingung $(d \,.\, d')\,W = 0$ genügt, so ist mit Rücksicht auf die Formel (21) überall auf der Fläche

$$d'(d\,W) = \frac{\varrho\,d\log\varrho'}{\varrho - \varrho'} \cdot d'\,W \ldots \quad (27)$$

Man wähle nun eine ganz beliebige Fläche, ziehe alle ihre Krümmungslinien, nehme von diesen zwei sich im Punkt A kreuzende l, l' heraus und verfüge nach Belieben über die Werte der Funktion W, welche diesen Krümmungslinien entlang stattfinden sollen. Entspricht die Krümmungslinie l der Richtung (α, β, γ), so kennen wir derselben entlang die Werte von dW. Auf der andern l' liege A_1 unendlich nahe bei A, und es gehe durch A_1 die auf l folgende Krümmungslinie l_1. Da W längs l' bekannt ist, so ist auch $d'W$ in A bekannt; der Faktor $\frac{\varrho\, d\log\varrho'}{\varrho-\varrho'}$ ist auf der ganzen Fläche bekannt; folglich ist $d'(dW)$ in A bekannt. Aber dW in A_1 ist gleich dW in A plus $AA_1 \times d'(dW)$ in A; also ist dW in A_1 bekannt; und da W in A_1 bekannt ist, so kennen wir, wenn $A_1 B_1$ ein Element der Krümmungslinie l_1 ist, auch W in B_1 ($= W$ in $A_1 + A_1 B_1 \times dW$ in A_1). Die zwei successiven Krümmungslinien l, l_1 mögen von den aufeinander folgenden Krümmungslinien $l', m', n', \ldots$ in die entsprechenden Elemente AB, $A_1 B_1$; BC, $B_1 C_1$; CD, $C_1 D_1$; ... geteilt werden. Da W in B und in B_1 bekannt ist, so kennt man $d'W$ in B, also vermöge jener Relation (27) auch $d'(dW)$ in B. Aber dW in B ist bekannt; man kennt also auch dW in B_1, und, da W in B_1 bekannt ist, auch W in C_1. Folglich kennt man $d'W$ in C, u. s. f. Man lernt so W längs der ganzen Krümmungslinie l_1 kennen. Ist l_2 eine unmittelbar folgende Krümmungslinie, welche l' in A_2 schneidet, so wird man ebenso, vom Werte der W in A_2 willkürlich beigelegt ward ausgehend, die Werte der Funktion W längs der ganzen Krümmungslinie l_2 bestimmen können. Wird dieses Verfahren fortgesetzt, so ist klar, dass die Werte der Funktion W für alle Punkte der Fläche durch die, welche wir längs der Krümmungslinien l und l' willkührlich angenommen haben, bestimmt sind.

Ist jetzt ω eine unendlich kleine Grösse, und wird $W\omega$ in jedem Punkte der Fläche auf die Normale aufgetragen, so bilden die Endpunkte eine neue Fläche. Da die Bedingung $(d\,.\,d')W = 0$ erfüllt ist, so werden die Endpunkte der auf den Normalen der ersten Fläche aufgetragenen Stücke, längs einer Krümmungslinie derselben verfolgt, immer eine Krümmungslinie der zweiten Fläche bilden.

Die zweite Fläche kann man wieder wie die erste behandeln und unter anderm die beiden Krümmungslinien, längs denen über die Funktion W von neuem frei verfügt wird, den mit l und l' bezeichneten der ersten Fläche entsprechen lassen. Nun ist

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(Df) = D\frac{\partial f}{\partial x} + \Sigma \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + D\frac{\partial f}{\partial x} = R\,D\lambda + \lambda\,D\,R,$$

und zugleich

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \lambda\,D\,R + \alpha\,d\,R + \alpha' d' R;$$

folglich

$$D\lambda = \alpha\,d\log R + \alpha' d' \log R, \text{ etc.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Man kennt also $D\lambda$, $D\mu$, $D\nu$ für jeden Punkt der ersten Fläche $\left(\text{indem } W = \frac{1}{R}\right)$, also auch λ, μ, ν für jeden Punkt der zweiten. Wir sehen so durch die Bedingungen (28) die entsprechenden Krümmungslinien der ersten, zweiten, dritten, etc. Fläche sich an einander reihen, und dadurch die zwei andern Flächenscharen entstehen, welche mit jener ersten Schar ein orthogonales System bilden.

Ich behaupte nun, dass, wenn drei im übrigen beliebige Flächen gegeben sind, welche sich in drei je zweien gemeinschaftliche Krümmungslinien orthogonal schneiden, diese Flächen, ohne einer ferneren Bedingung zu genügen, immer einem orthogonalen System angehören und dasselbe vollständig bestimmen.

Vom Punkte A aus, in welchem die drei gegebenen Flächen sich schneiden, gehen auf der ersten die Krümmungslinien l, l' und die der zweiten und dritten Fläche gemeinschaftliche Krümmungslinie. Auf dieser schneide man von A an ein unendlich kleines Stück s ab und ziehe durch dessen Endpunkt die zu l, l' successiven Krümmungslinien der zwei letzten Flächen; man kennt dann beiden l und l' entlang die Abstände $s = \frac{w}{R}$ der genannten successiven Krümmungslinien, wobei der Wert von $\frac{1}{R} = W$ in A beliebig angenommen und so die unendlich kleine Konstante w bestimmt werden kann. Da somit die Funktion W längs zweien sich kreuzenden Krümmungslinien der ersten Fläche bekannt ist, so ist sie auch nach dem, was wir vorhin gesehen haben, auf der ganzen ersten Fläche bekannt. Man kennt daher auch die unmittelbar auf diese folgende Fläche der ersten Schar. Für das Gelingen der Fortsetzung dieser Konstruktion braucht bloss noch nachgewiesen zu werden, dass die Bedingungen (28) durch die zweite und dritte der ursprünglichen Flächen schon erfüllt ist.

Führt man statt des dortigen R'' das unendlich kleine normale Element $s = \frac{\omega}{R}$ ein, so werden jene Bedingungen:

$$D\lambda = -\alpha\, d \log s - \alpha' d' \log s, \text{ etc.; also } -d \log s = \alpha\, D\lambda + \beta\, D\mu + \gamma\, D\nu,$$

oder

$$d \log s = \lambda\, D\alpha + \mu\, D\beta + \nu\, D\gamma. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28 \text{ bis})$$

Es handelt sich also darum, die Variation des unendlich kleinen Abstandes zweier successiver Krümmungslinien l, l_1 einer Fläche auszudrücken, welche längs l stattfindet. Dieser Abstand, als Element der kreuzenden Krümmungslinie l' sei σ', das Element von l hingegen sei σ. Vom Durchschnittspunkt A der Linien l, l' aus schneide man auf diesen die unendlich kleinen Stücke $\sigma = AB$, $\sigma' = AA_1$ ab; die durch A_1 und B gehenden Krümmungslinien l_1 und m' bilden dann mit l, l' das Viereck ABB_1A_1, und es ist $BB_1 - AA_1 = AB \,.\, d\sigma' = \sigma\, d\sigma'$. Von der Variation der Richtung von BB_1 im Vergleich mit AA_1 darf man absehen, weil sie wegen der orthogonalen Stellung dieser

Viereckseiten zu der Basis AB in der Länge dieser Linienelemente nur eine Variation zweiter Ordnung hervorbringt; deshalb darf man in obiger Differenz das Element BB_1 durch seine Projektion auf AA_1 oder auf die Richtung $(\alpha', \beta', \gamma')$ ersetzen. Man kann also auch die Differenzen der Projektionen von BB_1 und AA_1 auf die Axen der x, y, z, oder die ihnen resp. gleichen Differenzen der Projektionen von A_1B_1 und AB mit α', β', γ' multiplizieren und addieren; die Summe wird $\sigma d \sigma'$ sein. Da man aber nach der vorigen Bemerkung von der Richtungsveränderung von BB_1 absehen darf, so braucht man bei A_1B_1 nur die Richtungsveränderung (weil bewirkt durch eine Längenvariation von BB_1) zu berücksichtigen und kann hingegen die Längenvariation (weil sie keine solche für BB_1 bedingt) vernachlässigen. Die Variationen der Richtungskosinus von AB sind $\sigma' d'\alpha$, $\sigma' d'\beta$, $\sigma' d'\gamma$; als Länge kann man diejenige von AB oder σ behalten. Demnach dürfen statt der Differenzen der Projektionen von A_1B_1 und AB auf die Koordinatenaxen die Grössen $\sigma\sigma' d'\alpha$, $\sigma\sigma' d'\beta$, $\sigma\sigma' d'\gamma$ gesetzt werden. Multipliziert man nun mit α', β', γ', addiert und lässt den Faktor σ weg, so erhält man

$$d\sigma' = \sigma' (\alpha' d'\alpha + \beta' d'\beta + \gamma' d'\gamma).$$

Vertauscht man hier $\alpha', \beta', \gamma', \sigma', d'$ mit λ, μ, ν, s, D, so erhält man gerade die zu beweisende Gleichung (28 bis).

Da die partielle Differentialgleichung (26) in Beziehung auf die Funktion f von der dritten Ordnung ist, so muss ihre vollständige Lösung drei arbiträre Funktionen enthalten. Diese Forderung ist durch die vorige graphische Konstruktion insofern erfüllt, als die drei ursprünglichen Flächen mit Ausnahme der Bedingung, sich in Krümmungslinien und orthogonal zu schneiden, ganz willkührlich sind.

§ 45. *Anwendung der konfokalen Kontinua auf die Bestimmung des Masses der durch ein Kontinuum zweiten Grades (mit lauter reellen Axen) begrenzten Totalität und des begrenzenden Kontinuums selbst. Relationen zwischen vollständigen Abelschen Integralen.*

Wir wollen das Element der n-fachen Totalität mittelst der Variationen der Axenquadrate eines Systems konfokaler Kontinua zu bestimmen suchen. Es seien $A, B, C, \ldots J$ die n Axenquadrate irgend eines Kontinuums des Systems, und wenn n Kontinua die Lösung $(x, y, \ldots)$ gemein haben, so mögen die Axenquadrate eines jeden mit demselben untern Zeiger versehen werden, sodass die Zeiger $1, 2, \ldots n$ der Reihe nach allen durchgehenden Kontinuen entsprechen. Ist jetzt ds_1 das lineare Element, welches der Variation dA_1 entspricht, während $A_2, A_3, \ldots A_n$ sich nicht ändern, sind

ferner $\alpha_1 = \frac{p_1 x}{A_1}$, $\beta_1 = \frac{p_1 y}{B_1}, \cdots$ die Richtungskosinus der Normale des Kontinuums A_1, so hat man $d x = \alpha_1 d s_1$, $d y = \beta_1 d s_1, \ldots$, und durch Differentiation der Gleichung

$$\frac{x^2}{A_1} + \frac{y^2}{B_1} + \cdots = 1$$

ergiebt sich

$$2\left(\frac{x \alpha_1}{A_1} + \frac{y \beta_1}{B_1} + \cdots\right) d s_1 - \left(\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{B_1^2} + \cdots\right) d A_1 = 0,$$

woraus

$$d s_1 = \frac{d A_1}{2 p_1}$$

folgt, wobei man sich an den Ausdruck

$$p_1^2 = \frac{A_1 B_1 C_1 \ldots J_1}{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3) \ldots (A_1 - A_n)}$$

zu erinnern hat. Bedeutet nun $d V$ das Element der Totalität, so kann man dieses als orthogonales Parallelschem auffassen, dessen Seiten $d s_1, d s_2 \ldots d s_n$ sind. Es ist also

$$d V = \frac{1}{2^n} \frac{d A_1 \, d A_2 \ldots d A_n}{p_1 p_2 \ldots p_n}.$$

Die Integration dieser Formel kann auf unter sich unabhängige Quadraturen zurückgeführt werden, da die Variabeln $A_1, A_2, \ldots A_n$ sich trennen lassen. Wir müssen aber vorher einige Abkürzungen einführen.

Wenn $A > B > C > \cdots > H > J$ angenommen wird, so sei auch $A_1 > A_2 > \cdots > A_n$. Dann ist $J_1 > 0$, $H_2 > 0 > J_2$, $G_3 > 0 > H_3$, u. s. f. Die Quadratwurzeln $R_1 = \sqrt{A_1 B_1 C_1 \ldots J_1}$, $R_2 = \sqrt{- A_2 B_2 \ldots J_2}, \ldots$, $R_i = \sqrt{(-1)^{i-1} A_i B_i \ldots J_i}, \ldots$, $R_n = \sqrt{(-1)^{n-1} A_n B_n \ldots J_n}$ sind also alle reell, und wir wollen sie überdies noch als positiv annehmen; jede derselben enthält nur eine Variable. Wenn wir ferner die alternierende Funktion

$$\begin{aligned}
(A_1 - A_2)\ (A_1 - A_3)\ (A_1 - A_4) \ldots & (A_1 - A_{n-1})\ (A_1 - A_n) \\
\times\ (A_2 - A_3)\ (A_2 - A_4) \ldots & (A_2 - A_{n-1})\ (A_2 - A_n) \\
\times\ (A_3 - A_4) \ldots & (A_3 - A_{n-1})\ (A_3 - A_n) \\
\times\ \text{etc.} & \\
\times & (A_{n-2} - A_{n-1})\ (A_{n-2} - A_n) \\
& \times\ (A_{n-1} - A_n)
\end{aligned}$$

mit Ω bezeichnen, so ist

$$\Omega = \Sigma \pm A_1^{\varepsilon_1} A_2^{\varepsilon_2} \ldots A_n^{\varepsilon_n},$$

wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ irgend eine Permutation der Exponenten $n-1$, $n-2$, $n-3, \ldots 2, 1, 0$ sein, und das obere oder untere Vorzeichen des Produkts gelten soll, je nachdem die Permutation eine positive oder negative ist. (Der Beweis steht in Jacobis Abhandlung De functionibus alternantibus im Crelleschen Journal.) Wird Ω durch

$$(A_1 - A_i)(A_2 - A_i)\ldots(A_{i-1} - A_i)(A_i - A_{i+1})\ldots(A_i - A_n)$$

dividiert, so soll Φ_i der Quotient sein; man kann also auch sagen, $(-1)^{i-1}\Phi_i$ sei das Aggregat aller in der Entwicklung von Ω vorkommenden und durch A_i^{n-1} teilbaren Glieder, wenn sie von diesem Faktor befreit sind. Es ist klar, dass Φ_i wiederum eine alternierende Funktion ist. Es versteht sich übrigens, dass die Ausdrücke für Ω und Φ_i sich nicht ändern, wenn auch sämtliche Axenquadrate A um eine und dieselbe Konstante vermindert werden. Wir erhalten nun zunächst

$$dV = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Omega \frac{dA_1}{R_1}\frac{dA_2}{R_2}\cdots\frac{dA_n}{R_n},$$

also für das Mass einer von n Paaren zu derselben Gattung gehörender konfokaler Kontinua begrenzten Totalität den Ausdruck

$$V = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Sigma \pm \int \frac{A_1^{\varepsilon_1} dA_1}{R_1} \cdot \int \frac{A_2^{\varepsilon_2} dA_2}{R_2} \cdots \int \frac{A_n^{\varepsilon_n} dA_n}{R_n}.$$

Wird das erste Integral zwischen den Grenzen $J_1 = 0$ und $J_1 = J$, das zweite zwischen $H_2 = 0$ und $J_2 = 0$, etc., das letzte zwischen $A_n = 0$ und $B_n = 0$ genommen, so erhält man das Mass V der von einem Kontinuum (A) erster Gattung begrenzten Totalität, dividiert durch 2^n. Das ganze Mass ist aber offenbar R mal so gross als dasjenige einer Polysphäre vom Radius 1; folglich ist in diesem speziellen Fall

$$V = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} R$$

der finite Wert eines Aggregats von Produkten von je n Abelschen Integralen, welche immer alle bis auf eines vollständig sind. Man kann aber überhaupt die Zahl der Faktoren solcher Produkte um 1 vermindern, wie wir jetzt zeigen wollen.

Da $\sum_{i=1}^{i=n} A_i^m (-1)^{i-1} \Phi_i = 0$ oder $= \Omega$ ist, je nachdem $0 < m < n-1$ oder $m = n-1$ ist, so ist überhaupt

$$\sum_{i=1}^{n} f(A_i)\cdot(-1)^{i-1}\Phi_i = \Omega,$$

wenn f eine ganze Funktion $(n-1)$-ten Grades bezeichnet, wo 1 der Koeffizient der höchsten Potenz ist. Nun ist

$$R_i \frac{\partial R_i}{\partial A_i} = \frac{1}{2}(-1)^{i-1}\left\{B_i C_i \ldots J_i + A_i C_i \ldots J_i + \cdots + A_i B_i C_i \ldots H_i\right\}$$

eine ganze Funktion $(n-1)$-ten Grades von A_i, worin die höchste Potenz den Koeffizienten $(-1)^{i-1}\frac{n}{2}$ hat; folglich ist

$$\Sigma R_i \frac{\partial R_i}{\partial A_i} \Phi_i = \frac{n}{2}\Omega.$$

Man erhält demnach

$$dV = \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}}\left\{dR_1 . \Phi_1 \frac{dA_2}{R_2}\frac{dA_3}{R_3}\cdots\frac{dA_n}{R_n} + dR_2 . \Phi_2 \frac{dA_1}{R_1}\frac{dA_3}{R_3}\cdots\frac{dA_n}{R_n} + \cdots + dR_n . \Phi_n \frac{dA_1}{R_1}\frac{dA_2}{R_2}\cdots\frac{dA_{n-1}}{R_{n-1}}\right\},$$

wo z. B. $\frac{\partial R_1}{\partial A_1} dA_1$ durch dR_1 ersetzt ward, weil R_1 nur die Variable A_1 und Φ_1 diese nicht enthält. Integriert man, so ist

$$V = \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}}\left\{(R_1)\int^{n-1} \Phi_1 \frac{dA_2}{R_2}\frac{dA_3}{R_3}\cdots\frac{dA_n}{R_n} + \text{etc.}\right\},$$

wo die Klammern, in die man z. B. R_1 gesetzt hat, bedeuten, dass diese Funktion zwischen den auf A_1 bezüglichen Integrationsgrenzen zu nehmen sei. Da Φ_i eine alternierende Funktion ist, so zerfällt das $(n-1)$-fache Integral in ein Aggregat von Produkten von je $n-1$ Abelschen Integralen.

Nimmt man die auf $A_2, A_3, \ldots A_n$ bezüglichen Integrationsgrenzen und die untere für A_1 so weit, als es die Bedingung der Realität der Funktionen $R_1, R_2, \ldots R_n$ nur erlaubt, so wird

$$(R_2) = (R_3) = \cdots = (R_n) = 0, \quad (R_1) = R;$$

und man erhält

$$\int^{n-1} \Phi_1 \frac{dA_2}{R_2}\frac{dA_3}{R_3}\cdots\frac{dA_n}{R_n} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

eine Relation zwischen $(n-1)^2$ vollständigen Abelschen Integralen, deren jedes in der Formel $\int (A-k)^m \frac{dA}{R}$, $[m = 0, 1, 2, \ldots n-2]$ enthalten ist.

Indem wir uns das Kontinuum erster Gattung als fest denken, lassen wir in den Zeichen seiner Axenquadrate den Zeiger 1 weg und setzen uns vor, das Mass S eines

von $n-1$ Paaren konfokaler Kontinua begrenzten Stücks des Kontinuums A erster Gattung zu bestimmen. Man hat

$$dS = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{dA_2}{p_2}\frac{dA_3}{p_3}\cdots\frac{dA_n}{p_n} = \Phi\sqrt{(A-A_2)(A-A_3)\ldots(A-A_n)}\,\frac{dA_2}{R_2}\frac{dA_3}{R_3}\cdots\frac{dA_n}{R_n}. \quad (2)$$

Setzt man $A_2 - k = K_2$, $A_3 - k = K_3, \ldots$, wo k eine beliebige Konstante bedeutet, so ist

$$\Phi = (K_2-K_3)(K_2-K_4)\ldots(K_2-K_n)\times(K_3-K_4)\ldots(K_4-K_n)\times\cdots\times(K_{n-1}-K_n)$$

$$= \begin{vmatrix} K_2^{n-2} & K_3^{n-2} & K_4^{n-2} & \ldots & K_n^{n-2} \\ K_2^{n-3} & K_3^{n-3} & K_4^{n-3} & \ldots & K_n^{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_2^2 & K_3^2 & K_4^2 & \ldots & K_n^2 \\ K_2 & K_3 & K_4 & \ldots & K_n \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = \Sigma \pm K_2^{\varepsilon_2} K_3^{\varepsilon_3} \ldots K_n^{\varepsilon_n},$$

wo $(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n)$ eine Permutation der Exponenten $n-2$, $n-1, \ldots 2, 1, 0$ bezeichnet. Man hat also

$$S = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Sigma \pm \int \frac{K_2^{\varepsilon_2}\sqrt{A-A_2}}{R_2}\,dA_2 \times \int \frac{K_3^{\varepsilon_3}\sqrt{A-A_3}}{R_3}\,dA_3 \times \cdots \times \int \frac{K_n^{\varepsilon_n}\sqrt{A-A_n}}{R_n}\,dA_n,$$

ein Aggregat von Produkten von je $n-1$ Abelschen Integralen. Nimmt man jedes Integral vollständig und multipliziert die rechte Seite mit 2^n, so erhält man das Mass des ganzen Kontinuums (A).

Setzt man $n = 3$, $\frac{B-C}{A-C} = k^2$, $\frac{A-B}{A-C} = k'^2$, so dass $k^2 + k'^2 = 1$, ferner

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}, \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx,$$

so verwandelt sich die Gleichung (1) in

$$F(k)\,E(k') + E(k)\,F(k') - F(k)\,F(k') = \frac{\pi}{2},$$

die bekannte von Legendre gefundene Relation zwischen vollständigen elliptischen Integralen der ersten und zweiten Art mit komplementären Moduln. Die Gleichung (2) giebt für $n = 3$ die Oberfläche des Ellipsoids.

Was in diesem und dem folgenden Paragraphen vorkommt, ist eine Ausführung von sehr interessanten Andeutungen, welche Jacobi in jener Abhandlung (Crelle's Journal B. XIX) gegeben hat, wo er zuerst die Gleichung und Rektifikation der geodätischen Linie auf dem Ellipsoid durch einfache Integrale darstellte. Ich habe diese Gegenstände hier aufgenommen, weil sie in einer Theorie der vielfachen Kontinuität nicht fehlen dürfen.

§ 46. *Bestimmung des kürzesten Weges sowohl in der Totalität als auch auf einem quadratischen Kontinuum oder dem Durchschnitte mehrerer konfokaler Kontinua.*

Wenn die Werte $x, y, \ldots$ einer Lösung als Funktionen der ersten Axenquadrate $A_1, A_2, \ldots A_n$ der n durchgehenden konfokalen Kontinuen gedacht werden, so sind

$$\frac{dA_1}{2p_1}, \frac{dA_2}{2p_2}, \ldots, \frac{dA_n}{2p_n}$$

die Projektionen des Wegelements $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + \cdots}$ auf die Normalen der konfokalen Kontinuen. Da diese ein System von orthogonalen Richtungen bilden, so ist

$$ds^2 = \left(\frac{dA_1}{2p_1}\right)^2 + \left(\frac{dA_2}{2p_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{dA_n}{2p_n}\right)^2;$$

oder auch, wenn $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ die Kosinus der Winkel bedeuten, welche das Wegelement ds mit den Normalen bildet,

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots \lambda_n^2 = 1, \quad ds = \lambda_1 \frac{dA_1}{2p_1} + \lambda_2 \frac{dA_2}{2p^2} + \cdots + \lambda_n \frac{dA_n}{2p_n}.$$

Wenn aber $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ überhaupt Grössen bezeichnen, welche der Bedingung $\Sigma\lambda^2 = 1$ genügen, so ist

$$ds^2 = \left(\Sigma\lambda \frac{dA}{2p}\right)^2 + \Sigma\lambda_1^2\lambda_2^2\left(\frac{dA_1}{\lambda_1 . 2p_1} - \frac{dA_2}{\lambda_2 . 2p_2}\right)^2. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Gelingt es nun für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ solche Funktionen der Variabeln $A_1, A_2, \ldots A_n$ anzugeben, dass $\frac{\lambda_1}{p_1}$ nur A_1, $\frac{\lambda^2}{p_2}$ nur A_2, u. s. f. enthält, und setzt man dann

$$S = \int \frac{\lambda_1 dA_1}{2p_1} + \int \frac{\lambda_2 dA_2}{2p_2} + \cdots + \int \frac{\lambda_n dA_n}{2p_n}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

so hängt, da hier die Variabeln getrennt sind, der Wert von S nur von beiden Grenzlösungen ab, aber nicht von dem Wege, der sie verbindet. Es wird daher vermöge (1) im allgemeinen für irgend einen aus reellen Elementen zusammengesetzten Weg immer sein $\int ds > S$, und nur dann $\int ds = S$, wenn

$$\frac{dA_1}{2p_1} : \frac{dA_2}{2p_2} : \cdots : \frac{dA_n}{2p_n} = \lambda_1 : \lambda_2 : \cdots : \lambda_n \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

ist. Also ist dann der Weg, der diese Proportionen zu seinen Differentialgleichungen hat, der **kürzeste** zwischen den zwei gegebenen Grenzlösungen.

Der kürzeste Weg muss ein **Strahl** sein. Ein solcher wird von $n-1$ konfokalen Kontinuen des gegebenen Systems berührt; ihre ersten Axenquadrate seien $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \ldots \mathfrak{A}_n$. Dann gelten, wie wir bereits aus § 41, V, Gl. (6) wissen, $n-1$ Gleichungen von der Form

$$\frac{\lambda_1^2}{A_1 - \mathfrak{A}} + \frac{\lambda_2^2}{A_2 - \mathfrak{A}} + \cdots + \frac{\lambda_n^2}{A_n - \mathfrak{A}} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

wo zu $\mathfrak{A}$ nach und nach die Zeiger $2, 3, \ldots n$ zu setzen sind. Die Realität des Strahls erfordert übrigens

$$A_1 > \mathfrak{A}_2 > A_2 > \mathfrak{A}_3 > \cdots > A_{n-1} > \mathfrak{A}_n > A_n.$$

Vermöge der Proportionen (3) sind die Gleichungen (4) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung, hervorgegangen aus einmaliger Integration der $n-1$ Gleichungen zweiter Ordnung, welche die gewöhnliche Variationsrechnung liefert, aufzufassen; und da sie $n-1$ arbiträre Konstanten enthalten, so ist diese Integration die allgemeine.

Um nun untersuchen zu können, ob wirklich $\frac{\lambda_1}{p_1}, \frac{\lambda_2}{p_2}, \cdots$ Funktionen von je einer Variabeln sind, müssen wir zuerst $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ in Funktion der konfokalen Variabeln angeben. Wenn wir das System aller n Gleichungen, durch welche die Grössen λ bestimmt sind, so schreiben

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda_1^2}{1+\omega A_1} + \frac{\lambda_2^2}{1+\omega A_2} + \cdots + \frac{\lambda_n^2}{1+\omega A_n} &= 1, \\ \frac{\lambda_1^2}{\omega(A_1 - \mathfrak{A})} + \frac{\lambda_2^2}{\omega(A_2 - \mathfrak{A})} + \cdots + \frac{\lambda_n^2}{\omega(A_n - \mathfrak{A})} &= 1, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

wo zu $\mathfrak{A}$ die Zeiger $2, 3, \ldots n$ hingehören, und ω einen verschwindenden Faktor bedeutet, so können wir auf das System (5) die aus § 41, II bekannten Relationen zwischen orthogonalen und konfokalen Variabeln anwenden, und bekommen:

$$\lambda_i^2 = \frac{(1+\omega A_i)(A_i - \mathfrak{A}_2)(A_i - \mathfrak{A}_3)\ldots(A_i - \mathfrak{A}_n)}{(A_i - A_1)(A_i - A_2)\ldots(A_i - A_{i-1})(A_i - A_{i+1})\ldots(A_i - A_n)}, \quad [i = 1, 2, \ldots n]$$

wo noch $\omega = 0$ zu setzen ist. Da der Ausdruck für p_i^2 denselben Nenner und $A_i B_i C_i \dots J_i$ zum Zähler hat, so sieht man sogleich, dass der Ausdruck für $\frac{\lambda_i}{p_i}$ nur die Variable A_i enthält. Wenn wir fortan der Kürze wegen $q_i = \frac{p_i}{\lambda_i}$ setzen, so ist

$$q_i^2 = \frac{A_i B_i C_i \dots J_i}{(A_i - \mathfrak{A}_2)(A_i - \mathfrak{A}_3) \dots (A_i - \mathfrak{A}_n)}.$$

(Da unter den Faktoren des Zählers die $i-1$ letzten, und unter denen des Nenners die $i-1$ ersten negativ sind, so ist q_i^2 positiv.) Die Form dieses Ausdrucks giebt q_i als Abstand des Centrums vom linearen Tangentialkontinuum des quadratischen Kontinuums (A_i), welches durch seinen (imaginären oder reellen) Durchschnitt mit den $n-1$ festen konfokalen Kontinuen $(\mathfrak{A})$ gelegt ist, zu erkennen. Da nicht einmal alle Kontinuen $(\mathfrak{A})$ zu $n-1$ verschiedenen Gattungen zu gehören brauchen, so kann sehr wohl das einfache Kontinuum, in dem sie sich schneiden, imaginär sein; und wenn auch alle $(\mathfrak{A})$ $n-1$ verschiedene Gattungen repräsentieren, so muss erst noch das variable Kontinuum (A_i) der letzten noch übrigen Gattung (es kann nur $i = 1$ oder $i = n$ sein) angehören, wenn das Perpendikel q_i einer reellen Lösung entsprechen soll. In diesem einzigen Falle stellt das Integral $\int \frac{d A_i}{2 q_i}$ die Länge eines reell begrenzten Stücks der den $n-1$ festen Kontinuen $(\mathfrak{A})$ gemeinsamen Krümmungslinie dar. Nichtsdestoweniger hat das Integral $\int \frac{dA}{2q}$ in allen Fällen, die hier in Betracht kommen werden, einen reellen Wert und kann analytisch immerhin als zwischen zweien Kontinuen (A) derselben Gattung befindliches Stück der reellen oder imaginären Krümmungslinie $(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \dots \mathfrak{A}_n)$ gefasst werden. Wenn uns erlaubt wird, von zweien Wegen, welche durch dasselbe Paar konfokaler Kontinuen gleicher Gattung begrenzt werden, den einen Projektion des andern zu nennen, und wenn alle auf die einzelnen Variabeln $A_1, A_2, \dots A_n$ bezüglichen Paare von Integrationsgrenzen von den zwei Grenzlösungen des Weges $\int ds$ hergenommen sind, so ist der kürzeste Weg

$$S = \int \frac{dA_1}{2q_1} + \int \frac{dA_2}{2q_2} + \dots + \int \frac{dA_n}{2q_n} \quad \dots\dots\dots \quad (6)$$

gleich der Summe seiner Projektionen auf die feste Krümmungslinie $(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \dots \mathfrak{A}_n)$, welche von allen n durch die Grenzlösungen gelegten Paaren konfokaler Kontinuen je einer und derselben Gattung gebildet werden.

Da $p = q\lambda$, so geben die Proportionen (3) für den kürzesten Weg die Bedingungen $\frac{dA}{2q} = \lambda^2 ds$, wo A, q, λ mit den untern Zeigern $1, 2, \dots n$ zu versehen sind. Die Gleichungen (4) werden demnach

$$\frac{\left(\frac{dA_1}{2q_1}\right)}{A_1 - \mathfrak{A}} + \frac{\left(\frac{dA_2}{2q_2}\right)}{A_2 - \mathfrak{A}} + \dots + \frac{\left(\frac{dA_n}{2q_n}\right)}{A_n - \mathfrak{A}} = 0, \quad \dots\dots\dots \quad (7)$$

wo $\mathfrak{A}$ nach und nach mit den untern Zeigern 2, 3, ... n zu versehen ist. In diesen $n-1$ Differentialgleichungen erster Ordnung sind die Variabeln getrennt; sie können also mittelst blosser Quadraturen integriert werden. Dadurch werden $n-1$ Integrationskonstanten hereingebracht, sodass nunmehr die $n-1$ finiten Gleichungen des kürzesten Wegs $2(n-1)$ verfügbare Konstanten enthalten, was gerade nötig ist und hinreicht, um die zwei Gruppen von je $n-1$ Bedingungen, damit der Weg durch die zwei gegebenen Grenzlösungen gehe, zu befriedigen.

Wird der Anfangswert einer Variabeln z. B. A_1 beliebig gesetzt, so ist dadurch der Weg noch nicht im geringsten näher bestimmt; denn dieser Weg muss im Verlaufe jedes Weges, dessen $\mathfrak{A}_2$ kleiner ist, zweimal vorkommen. Wenn daher die Anfangswerte der n Variabeln $A_1, A_2, \ldots A_n$ so angenommen werden, wie es die gegebene Anfangslösung verlangt, so zählt dieses nur für $n-1$ Bestimmungsstücke des Wegs. Wenn nun alle Integrale mit diesen Anfangswerten beginnen, so sind durch die $n-1$ Wegesgleichungen

$$\int \frac{1}{A_1-\mathfrak{A}}\frac{dA_1}{2q_1} + \int \frac{1}{A_2-\mathfrak{A}}\frac{dA_2}{2q_2} + \cdots + \int \frac{1}{A_n-\mathfrak{A}}\frac{dA_n}{2q_n} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

fortan immer $n-1$ der Variabeln $A_1, A_2, \ldots A_n$ in Funktion einer einzigen unter ihnen und der $n-1$ Konstanten $\mathfrak{A}$ gegeben, und diese letzten sind durch die Bedingung, dass der Weg durch die Endlösung gehen soll, gerade bestimmt.

Es ist noch zu bemerken, dass wegen $\frac{dA}{2q} = \lambda^2 ds$ für ein positives Wegelement immer auch seine Projektion $\frac{dA}{2q}$ positiv zu nehmen ist. Das Vorzeichen der Quadratwurzel q muss also immer mit dem des Differentials dA übereinstimmen. Wenn also ein q durch Null oder Unendlich hindurchgeht und infolgedessen einen Zwischenwechsel erfährt, so muss auch das entsprechende dA diesen Zwischenwechsel mitmachen. Hiermit ist nun auch der Verlauf der einzelnen Integrale in (8) hinreichend bestimmt; beim Fortschreiten des Weges nämlich ist im Ausdruck ihrer Elemente immer $\frac{dA}{2q}$ positiv zu nehmen. Ein Durchgang des Faktors von dA durch Unendlich stört die endliche Beschaffenheit des Integrales nicht. Denn entweder rührt derselbe her vom Durchgang einer der Grössen $A, B, \ldots J$ durch Null; geht z. B. J durch Null, so sind ausser $\frac{dA}{2\sqrt{J}} = d\,.\,\sqrt{J}$ alle übrigen Faktoren oder Divisoren endlich, und die Form $d\,.\,\sqrt{J}$ zeigt einen mit Zeichenwechsel des Inkrements, endlicher Faktor $\times \sqrt{J}$, begleiteten ununterbrochenen Fortgang (z. B. Wachstum, wenn $A-\mathfrak{A}$ positiv ist) des Integrales an. Oder jener Durchgang rührt vom Verschwinden des rationalen Nenners $A-\mathfrak{A}$ her; dann findet sich aber auch $\sqrt{A-\mathfrak{A}}$ im Nenner von q, und da alles übrige endlich bleibt, hat man nur $\frac{dA}{2\sqrt{A-\mathfrak{A}}} = d\sqrt{A-\mathfrak{A}}$ zu beachten, was ebenso wie vorhin einen ununterbrochenen Fortgang des Integrals anzeigt. Im letzten Falle ward vor dem betrachteten

Durchgang $A > \mathfrak{A}$ vorausgesetzt, und es ist aus dem Gesagten klar, dass auch nach dem Durchgang wieder $A > \mathfrak{A}$ sein wird. Ganz ähnlich verhält sich die Sache, wenn anfangs $A < \mathfrak{A}$ ist; man hat nur $d\sqrt{\mathfrak{A} - A}$ zu beachten. Aus diesen Bemerkungen folgt, 1. dass jede Variable A die ihr, sei es durch ihre Gattung selbst oder durch Konstanten $\mathfrak{A}$ derselben Gattung, gesetzten Grenzen niemals überschreitet, sondern zwischen denselben oscilliert, 2. dass bei keinem der in den Gleichungen (8) vorkommenden Integrale je ein Uebergang vom Wachstum zur Abnahme oder umgekehrt eintritt, sondern jedes fortwährend wächst oder abnimmt, je nachdem die entsprechende Differenz $A - \mathfrak{A}$ von Anfang an positiv oder negativ war.

Da man $n - 1$ algebraische Gleichungen zwischen den Variabeln $A_1, A_2, \ldots A_n$ angeben kann, welche denselben Weg darstellen, wie die aus transcendenten Funktionen zusammengesetzten Gleichungen (8), so sind jene mit diesen äquivalent. Werden die Abelschen Integrale, welche im System (8) vorkommen, wie Argumente, und die ursprünglichen Variabeln $A_1, A_2, \ldots A_n$ als Funktionen derselben aufgefasst, so kennen wir also $n - 1$ algebraische Relationen zwischen diesen Funktionen. Die Gleichung (6) endlich lehrt uns die Summe von n andern Abelschen Integralen, welche mit den vorigen in engem Zusammenhang stehen, in algebraischer Form kennen. Für $n = 2$ enthält die alsdann einzige Gleichung (8) das Additionstheorem für elliptische Integrale der ersten Art, die Gleichung (6) für solche der zweiten Art.

Wenn einige der konfokalen Kontinuen ($\mathfrak{A}$) verschwindende Axenquadrate haben, so sind sie als lineare durch die $n - 1$ übrigen Axen der Lage nach bestimmte Kontinua aufzufassen, begränzt von einem in denselben befindlichen $(n - 2)$-fachen quadratischen Kontinuum ($(n - 2)$-faches Fokalkontinuum), dem die übrigen Axenquadrate auch dem Werte nach zukommen. Der Strahl oder kürzeste Weg muss alsdann das $(n-2)$-fache Fokalkontinuum in einer Lösung treffen. Der Ausdruck für q vereinfacht sich desto mehr, je mehr Kontinua $\mathfrak{A}$ diese Eigenschaft haben. Ist z. B.

$$J_2 = 0,\ \mathfrak{H}_3 = 0,\ B_4 = 0, \ldots, E_{n-1} = 0,\ B_n = 0,$$

so wird $q = \sqrt{A}$, die den Kontinuen ($\mathfrak{A}$) gemeinschaftliche Krümmungslinie ist die Axe der x, und die Gleichungen (6) und (8) erhalten die Formen:

$$S = \int d\sqrt{A_1} + \int d\sqrt{A_2} + \cdots + \int d\sqrt{A_n}\,,$$

$$\int \frac{d\sqrt{A_1}}{B_1} + \int \frac{d\sqrt{A_2}}{B_2} + \cdots + \int \frac{d\sqrt{A_n}}{B_n} = 0,$$

$$\int \frac{d\sqrt{A_1}}{C_1} + \int \frac{d\sqrt{A_2}}{C_2} + \cdots + \int \frac{d\sqrt{A_n}}{C_n} = 0.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int \frac{d\sqrt{A_1}}{J_1} + \int \frac{d\sqrt{A_2}}{J_2} + \cdots + \int \frac{d\sqrt{A_n}}{J_n} = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt uns die Länge eines Stücks des Strahls gleich der Summe seiner reellen Projektionen auf die Axe der x, welche von je einem Paare durch die Enden jenes Stückes gelegten konfokalen Kontinuen derselben Gattung abgeschnitten werden; es ist aber wohl zu merken, dass die Elemente dieser Projektionen immer mit dem Elemente des Strahles selbst zugleich positiv zu nehmen sind, wenn sie auch auf der Axe der x bald in dieser, bald in jener Richtung auf einander folgen. Die $n-1$ folgenden Gleichungen haben Integrale, wie

$$\frac{\sqrt{A_1}-\sqrt{A-B}}{\sqrt{A_1}+\sqrt{A-B}}\cdot\frac{\sqrt{A_2}-\sqrt{A-B}}{\sqrt{A_2}+\sqrt{A-B}}\cdot\ldots\cdot\frac{\sqrt{A_n}-\sqrt{A-B}}{\sqrt{A_n}+\sqrt{A-B}}=\text{const.},$$

u. s. f., wenn man B durch $C, D, \ldots J$ ersetzt. Dies ist übrigens der einzige Fall, wo alle jene sogenannten Projektionen auch der Lage nach reell sind.

Indem wir wieder zum allgemeinen Fall zurückkehren, bemerken wir, dass die Gleichungen (8) unter die Form

$$\frac{\partial S}{\partial \mathfrak{A}_2}=0,\ \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{A}_3}=0,\ldots,\ \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{A}_n}=0$$

zu bringen sind. Daraus ergiebt sich folgende Vorschrift für die Bestimmung des kürzesten Weges zwischen zweien gegebenen Endlösungen. Man lege durch diese die n Paare konfokaler Kontinuen der gleichen Gattung, nehme die Summe der Projektionen, welche jedes Paar auf einer und derselben Krümmungslinie des Systems abschneidet, wiederhole das Verfahren so lange in Beziehung auf successive Krümmungslinien, bis man endlich eine gefunden hat, in deren nächster Umgebung die Variation jener Summe sogenannter Projektionen verschwindet. Die Summe selbst ist dann die Länge des kürzesten Weges, und jedes zum Strahl verlängerte Element wird die $n-1$ festen Kontinuen des Systems, die in jener Krümmungslinie sich schneiden, berühren, wodurch die Richtung jedes Elements, also auch der Verlauf des ganzen Weges hinreichend bestimmt sind. — Es versteht sich freilich von selbst, dass diese Elemente sich alle zu einem einzigen Strahle zusammensetzen; aber um der Uebereinstimmung mit dem Folgenden willen haben wir dem Satze diese Fassung gegeben.

Wir können das Gesagte durch eine einzige identische Formel für das Wegelement ds ausdrücken.

Wenn in den Gleichungen (5) die Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ gewöhnlichen Variabeln $x, y, \ldots$ entsprechen, so mögen $m, \mu_2\omega, \mu_3\omega, \ldots \mu_n\omega$ den sonst mit $p_1, p_2, \ldots p_n$ bezeichneten Perpendikeln entsprechen. Es ist dann

$$\frac{1}{\mu^2}=\frac{\lambda_1^2}{(A_1-\mathfrak{A})^2}+\frac{\lambda_2^2}{(A_2-\mathfrak{A})^2}+\ldots+\frac{\lambda_n^2}{(A_n-\mathfrak{A})^2},$$

wo $\mathfrak{A}$, μ immer mit demselben Zeiger zu versehen sind;

$$m^2 = \frac{(1+\omega A_1)(1+\omega A_2)\dots(1+\omega A_n)}{(1+\omega\mathfrak{A}_2)(1+\omega\mathfrak{A}_3)\dots(1+\omega\mathfrak{A}_n)} = 1 + \omega(\Sigma A - \Sigma\mathfrak{A}) + \text{etc.}$$

Die Gleichung

$$\frac{m^2}{1+\omega A_1} + \frac{(\mu_2\,\omega)^2}{\omega(A_1-\mathfrak{A}_2)} + \frac{(\mu_3\,\omega)^2}{\omega(A_1-\mathfrak{A}_3)} + \dots + \frac{(\mu_n\,\omega)^2}{\omega(A_1-\mathfrak{A}_n)} = 1$$

verwandelt sich dadurch in

$$\Sigma A - \Sigma\mathfrak{A} - A_1 + \frac{\mu_2^2}{A_1-\mathfrak{A}_2} + \frac{\mu_3^2}{A_1-\mathfrak{A}_3} + \dots + \frac{\mu_n^2}{A_1-\mathfrak{A}_n} = 0,$$

u. s. f., indem für A_1 nach und nach $A_2, A_3, \dots A_n$ gesetzt wird. Zieht man die zweite der n so erhaltenen Gleichungen von der ersten ab und dividiert durch $A_2 - A_1$, so folgt

$$\Sigma\frac{\mu\,\mu}{(A_1-\mathfrak{A})(A_2-\mathfrak{A})} = -1, \text{ etc.}$$

Vertauscht man hier A_2 mit A_3 und zieht beide Gleichungen von einander ab, so folgt leicht

$$\Sigma\frac{\mu\,\mu}{(A_1-\mathfrak{A})(A_2-\mathfrak{A})(A_3-\mathfrak{A})} = 0, \text{ etc.} \quad \dots\dots\dots \quad (9)$$

Es ist ferner

$$\frac{m^2}{(1+\omega A_1)^2} + \Sigma\frac{(\mu\,\omega)^2}{[\omega(A_1-\mathfrak{A})]^2} = \frac{1}{\lambda_1^2},$$

oder, wenn $\omega = 0$ gesetzt wird,

$$1 + \Sigma\frac{\mu\,\mu}{(A_1-\mathfrak{A})^2} = \frac{1}{\lambda_1^2}, \text{ etc.}$$

und, wenn man $1 + \Sigma\frac{\mu\,\mu}{(A_1-\mathfrak{A})(A_2-\mathfrak{A})} = 0$ subtrahiert,

$$-(A_1-A_2)\,\Sigma\frac{\mu\,\mu}{(A_1-\mathfrak{A})^2(A_2-\mathfrak{A})} = \frac{1}{\lambda_1^2}, \text{ etc.} \quad \dots\dots\dots \quad (10)$$

Diese Vorbereitungen sollen uns zur Verwandlung der identischen Formel (1) dienen. Setzen wir $p = q\,\lambda$, so wird das dortige

$$\frac{d\,A_1}{\lambda_1 . 2p_1} - \frac{d\,A_2}{\lambda_2 . 2p_2} = \frac{1}{\lambda_1\lambda_1}\frac{d\,A_1}{2\,q_1} - \frac{1}{\lambda_2\lambda_2}\frac{d\,A_2}{2\,q_2}$$

$$= (A_1-A_2)\left\{\frac{d\,A_1}{2\,q_1}\,\Sigma\frac{\mu\,\mu}{(A_1-\mathfrak{A})^2(A_2-\mathfrak{A})} + \frac{d\,A_2}{2\,q_2}\,\Sigma\frac{\mu\,\mu}{(A_1-\mathfrak{A})(A_2-\mathfrak{A})^2}\right\}$$

vermöge der Gleichungen (10), und wenn man die Gleichungen (9) hinzunimmt:

$$= -(A_1 - A_2)\,\Sigma\,\frac{\mu\,\mu}{(A_1-\mathfrak{A})(A_2-\mathfrak{A})}\left\{\frac{1}{A_1-\mathfrak{A}}\,\frac{dA_1}{2\,q_1}+\frac{1}{A_2-\mathfrak{A}}\,\frac{dA_2}{2\,q_2}+\cdots+\frac{1}{A_n-\mathfrak{A}}\,\frac{dA_n}{2\,q_n}\right\}.$$

Wird nun

$$d\,S = \frac{d\,A_1}{2\,q_1}+\frac{d\,A_2}{2\,q_2}+\cdots+\frac{d\,A_n}{2\,q_n}$$

gesetzt, so ist der eingeklammerte Ausdruck $= -2\,d\,\frac{\partial S}{\partial \mathfrak{A}}$; also

$$\frac{d\,A_1}{\lambda_1 . 2\,p_1}-\frac{d\,A_2}{\lambda_2 . 2\,p_2} = 2\,(A_1 - A_2)\,\Sigma\,\frac{\mu\,\mu}{(A_1-\mathfrak{A})(A_2-\mathfrak{A})}\,d\,\frac{\partial S}{\partial \mathfrak{A}},$$

und zuletzt

$$d\,s = \sqrt{d\,S^2 + 4\,\Sigma\left\{\lambda_1\,\lambda_2\,(A_1 - A_2)\,\Sigma\,\frac{\mu\,\mu}{(A_1-\mathfrak{A})(A_2-\mathfrak{A})}\,d\,\frac{\partial S}{\partial \mathfrak{A}}\right\}^2} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Bis jetzt haben wir den kürzesten Weg in der Totalität betrachtet, von dem wir zum voraus wussten, dass er ein Strahl ist. Die letzte identische Formel (11) kann nun aber auch unmittelbar zur Bestimmung des kürzesten Weges auf einem quadratischen Kontinuum oder auf dem Durchschnitt mehrerer konfokaler Kontinuen benutzt werden. — Wenn z. B. der kürzeste Weg auf dem Durchschnitte der α konfokalen Kontinuen $A_1, A_2, \ldots A_\alpha$ verlangt wird, so sind ihre Axenquadrate konstant; es wird daher

$$d\,S = \frac{d\,A_{\alpha+1}}{2\,q_{\alpha+1}}+\frac{d\,A_{\alpha+2}}{2\,q_{\alpha+2}}+\cdots+\frac{d\,A_n}{2\,q_n},$$

wo in den Ausdrücken für q die frühern Axenquadrate $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \ldots \mathfrak{A}_{\alpha+1}$ nunmehr durch die ebenfalls konstanten $A_1, A_2, \ldots A_\alpha$ ersetzt sind. Die Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\alpha$ verschwinden, und für die übrigen ist

$$\lambda_{\alpha+1}^2 + \lambda_{\alpha+2}^2 + \cdots + \lambda_n^2 = 1,$$

$$\frac{\lambda_{\alpha+1}^2}{A_{\alpha+1}-\mathfrak{A}_i}+\frac{\lambda_{\alpha+2}^2}{A_{\alpha+2}-\mathfrak{A}_i}+\cdots+\frac{\lambda_n^2}{A_n-\mathfrak{A}_i} = 0;\ [i = \alpha+2,\ \alpha+3, \ldots n]$$

$$\frac{1}{\mu\,\mu} = \left(\frac{\lambda_{\alpha+1}}{A_{\alpha+1}-\mathfrak{A}}\right)^2+\left(\frac{\lambda_{\alpha+2}}{A_{\alpha+2}-\mathfrak{A}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\lambda_n}{A_n-\mathfrak{A}}\right)^2.$$

Nach dieser Verminderung der Gliederzahl fährt die identische Formel (11) zu bestehen fort, und es ist klar, dass auf dem gegebenen $(n-\alpha)$-fachen Kontinuum zwischen irgend zweien gegebenen Grenzlösungen immer S von ihrem Verbindungswege unabhängig ist,

und daher im allgemeinen $\int ds > S$ sein wird. Nun reichen aber die $n - \alpha - 1$ Bedingungen $\frac{\partial S}{\partial \mathfrak{A}} = 0$ gerade hin, um die $n - \alpha - 1$ arbiträren Konstanten $\mathfrak{A}$ zu bestimmen, und dann zeigt wiederum die Formel (11), dass, wenn der Verbindungsweg durch die $n - \alpha - 1$ Differentialgleichungen $d\frac{\partial S}{\partial \mathfrak{A}} = 0$ bestimmt wird, $\int ds = S$ wird. Der so bestimmte Verbindungsweg ist also unter allen der kürzeste.

Wir wollen noch einen ganz speziellen Fall erwähnen, wo elliptische Integrale hinreichen, um einen kürzesten Weg auf dem allgemeinen quadratischen Kontinuum in der n-fachen Totalität darzustellen. Es sei $\alpha = 1$, (A_1) das feste Kontinuum, $\mathfrak{H}_3 = 0$, $\mathfrak{G}_4 = 0, \ldots, \mathfrak{C}_{n-1} = 0$, $\mathfrak{B}_n = 0$. Sind v, w die letzten Variabeln, so ist die den Kontinuen $A_1, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4, \ldots \mathfrak{A}_n$ gemeinsame Krümmungslinie durch die Gleichungen

$$y = 0,\ z = 0, \ldots,\ v = 0,\ \frac{x^2}{A_1} + \frac{w^2}{J_1} = 1$$

bestimmt, also eine Ellipse. Diese wird von allen Kontinuen, welche nicht zur ersten Gattung gehören, geschnitten. Alle $n - 1$ Projektionen eines Stückes des kürzesten Weges sind also Bogen der genannten Ellipse und reell vorhanden; es ist $q^2 = AJ : (A - A_1)$,

$$S = \int \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_2 - A_1}{A_2 J_2}}\, dA_2 + \int \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_3 - A_1}{A_3 J_3}}\, dA_3 + \cdots + \int \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_n - A_1}{A_n J_n}}\, dA_n,$$

und die $n - 2$ Wegesgleichungen sind

$$\int \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_2 - A_1}{A_2 J_2}}\, \frac{dA_2}{B_2} + \int \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_3 - A_1}{A_3 J_3}}\, \frac{dA_3}{B_3} + \cdots + \int \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_n - A_1}{A_n J_n}}\, \frac{dA_n}{B_n} = 0,$$

etc.

$$\int \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_2 - A_1}{A_2 J_2}}\, \frac{dA_2}{H_2} + \int \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_3 - A_1}{A_3 J_3}}\, \frac{dA_3}{H_3} + \cdots + \int \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_n - A_1}{A_n J_n}}\, \frac{dA_n}{H_n} = 0.$$

Die Formel (11), aus der wir bei der allgemeinen Aufgabe die Minimumsbedingungen, in Form von Differentialgleichungen erster Ordnung mit getrennten Variabeln, unmittelbar ablesen konnten, ersparte uns den für solche Zwecke gewöhnlichen Gebrauch der Variationsrechnung, welche zunächst auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung führt, deren erste Integration schon sehr schwierig erscheint. Wir wollen nun zeigen, wie auch diese ziemlich leicht ausgeführt werden kann.

Sind $A_1, A_2, \ldots A_\alpha$ die ersten Axenquadrate der festen konfokalen Kontinuen, auf deren Durchschnitt ein kürzester Weg angegeben werden soll, so giebt die Variationsrechnung folgende Bedingungen zweiter Ordnung:

$$\left.\begin{aligned} d\,\frac{dx}{ds} &= \left(\frac{h_1}{A_1} + \frac{h_2}{A_2} + \cdots + \frac{h_\alpha}{A_\alpha}\right) x\,d\,s, \\ d\,\frac{dy}{ds} &= \left(\frac{h_1}{B_1} + \frac{h_2}{B_2} + \cdots + \frac{h_\alpha}{B_\alpha}\right) y\,d\,s, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

etc.,

wo $h_1, h_2, \ldots h_\alpha$ zu eliminierende Konstanten bedeuten. Da eine der Gleichungen (12) eine vollständige Folge der übrigen ist, so ist nach geschehener Elimination die Zahl der wesentlichen Gleichungen $n - \alpha - 1$. Die erste Integration wird also nur dann vollständig sein, wenn sie eben so viele arbiträre Konstanten einführt.

Es seien nun $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots \mathfrak{J}$ die konstanten Axenquadrate irgend eines mit den gegebenen konfokalen Kontinuums; man multipliziere die Gleichungen (12) erstens mit $\frac{x}{\mathfrak{A}}, \frac{y}{\mathfrak{B}}, \ldots$, zweitens mit $\frac{dx}{\mathfrak{A}ds}, \frac{dy}{\mathfrak{B}ds}, \ldots$, und addiere; man erhält so die zwei Gleichungen

$$\Sigma\,\frac{x}{\mathfrak{A}}\,d\,\frac{dx}{ds} = \left(\Sigma\,\frac{x^2}{\mathfrak{A}} - 1\right)\left(\frac{h_1}{A_1 - \mathfrak{A}} + \frac{h_2}{A_2 - \mathfrak{A}} + \cdots + \frac{h_\alpha}{A_\alpha - \mathfrak{A}}\right) d\,s,$$

$$\Sigma\,\frac{dx}{\mathfrak{A}ds}\,d\,\frac{dx}{ds} = \Sigma\,\frac{x\,dx}{\mathfrak{A}ds} \times \left(\frac{h_1}{A_1 - \mathfrak{A}} + \frac{h_2}{A_2 - \mathfrak{A}} + \cdots + \frac{h_\alpha}{A_\alpha - \mathfrak{A}}\right) d\,s,$$

und hieraus durch Elimination des die Faktoren h enthaltenden Aggregats und nach gehöriger Reduktion:

$$d\,U = d\left\{\left(\Sigma\,\frac{x\,dx}{\mathfrak{A}ds}\right)^2 - \left(\Sigma\,\frac{x^2}{\mathfrak{A}} - 1\right)\Sigma\,\frac{dx^2}{\mathfrak{A}ds^2}\right\} = 0. \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Wir haben also ein erstes Integral $U =$ const. gefunden. Es muss aber auffallen, dass für die Darstellung eines und desselben Weges alle beliebigen Werte der Konstanten $\mathfrak{A}$ gebraucht werden können. Man kann nichts anderes daraus schliessen, als dass die Integralgleichung in Beziehung auf $\mathfrak{A}$ identisch sein müsse, sobald $x, y, \ldots$ in Funktion einer einzigen Variabeln, wie es der gesuchte Weg verlangt, ausgedrückt sind. Betrachtet man nun die Grössen $x, y, \ldots, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \ldots$, welche irgend einem Wegeselement entsprechen, als gegeben, so findet man U, mit Weglassung der sich aufhebenden Glieder, als ein Aggregat von Brüchen, deren Nenner teils einfach $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$, teils Produkte, wie $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, sind, während in den Zählern $\mathfrak{A}$ gar nicht vorkommt; setzt man $\mathfrak{A}$ unendlich gross, in welchem Falle die Verhältnisse $\mathfrak{A} : \mathfrak{B} : \mathfrak{C} : \ldots$ unendlich wenig von der Einheit abweichen, so reduziert sich U auf $\frac{1}{\mathfrak{A}}$. Daher ist $U = \varphi(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C} \ldots \mathfrak{J}$, wo φ eine ganze Funktion $(n-1)$-ten Grades bezeichnet, deren höchstes Glied den Koeffizienten 1 hat. Setzt man $\mathfrak{A} = A_1, A_2, \ldots A_\alpha$, so wird $\Sigma\,\frac{x^2}{\mathfrak{A}} - 1 = 0$, $\Sigma\,\frac{x\,dx}{\mathfrak{A}ds} = 0$, also $U = 0$. Wir kennen also schon α Wurzeln der Gleichung $\varphi(\mathfrak{A}) = 0$, die $n - 1 - \alpha$ übrigen

seien $\mathfrak{A}_{\alpha+2}, \mathfrak{A}_{\alpha+3}, \ldots \mathfrak{A}_n$. Demnach haben wir endlich das Integral der Gleichung (13) in seiner wahren Form, nämlich:

$$\left(\Sigma \frac{x\,dx}{\mathfrak{A}\,ds}\right)^2 - \left(\Sigma \frac{x^2}{\mathfrak{A}} - 1\right) \Sigma \frac{dx^2}{\mathfrak{A}\,ds^2}$$
$$= \frac{(\mathfrak{A}-A_1)(\mathfrak{A}-A_2)\ldots(\mathfrak{A}-A_\alpha)(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_{\alpha+2})(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_{\alpha+3})\ldots(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_n)}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots\mathfrak{H}\mathfrak{I}} \quad . \; . \; . \quad (14)$$

Da diese Integralgleichung wegen ihrer identischen Beschaffenheit in Beziehung auf die Unbestimmte $\mathfrak{A}$ ein ganzes System von Gleichungen in sich schliesst und die geforderte Zahl $n - \alpha - 1$ arbiträrer Konstanten $\mathfrak{A}_{\alpha+2}, \mathfrak{A}_{\alpha+3}, \ldots \mathfrak{A}_n$ enthält, so ist diese erste Integration des Systems (12) vollständig.

Um das Zusammenfallen der Gleichungen (4) und (14) nachzuweisen, bezeichnen wir die Kosinus der Winkel, welche das Wegelement ds mit den Normalen der $n - \alpha$ Variabeln konfokalen Kontinuen bildet, mit

$$\lambda_{\alpha+1}, \; \lambda_{\alpha+2}, \ldots \lambda_n; \text{ dann ist } dA_i = 2\,\lambda_i p_i\,ds, \; [i = \alpha+1, \; \alpha+2, \ldots n],$$

und wenn das Summenzeichen S sich nur auf diese letzten Zeiger erstreckt,

$$\frac{dx}{ds} = x \,.\, S\,\frac{\lambda p}{A}, \; \frac{dy}{ds} = y \,.\, S\,\frac{\lambda p}{B}, \text{ etc.,}$$
$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = x^2 .\, S\,\frac{\lambda^2 p^2}{A^2} + 2\,x^2 .\, S\,\frac{\lambda\,\lambda' p\,p'}{A\,A'}, \text{ etc.,}$$
$$\Sigma\,\frac{dx^2}{\mathfrak{A}\,ds^2} = S\,\lambda^2 p^2 \left(\Sigma\,\frac{x^2}{\mathfrak{A}\,A^2}\right) + 2\,S\,\lambda\,\lambda' p\,p' \left(\Sigma\,\frac{x^2}{\mathfrak{A}\,A\,A'}\right);$$

aber

$$\Sigma\,\frac{x^2}{\mathfrak{A}\,A^2} = \frac{1}{(A-\mathfrak{A})^2}\left(\Sigma\,\frac{x^2}{\mathfrak{A}} - \Sigma\,\frac{x^2}{A}\right) - \frac{1}{A-\mathfrak{A}}\,\Sigma\,\frac{x^2}{A^2}$$
$$= \frac{1}{(A-\mathfrak{A})^2}\left(\Sigma\,\frac{x^2}{\mathfrak{A}} - 1\right) - \frac{1}{p^2(A-\mathfrak{A})},$$
$$\Sigma\,\frac{x^2}{\mathfrak{A}\,A\,A'} = \frac{1}{(A-\mathfrak{A})(A'-\mathfrak{A})}\left(\Sigma\,\frac{x^2}{\mathfrak{A}} - 1\right);$$

daher

$$\Sigma\,\frac{dx^2}{\mathfrak{A}\,ds^2} = \left(\Sigma\,\frac{x^2}{\mathfrak{A}} - 1\right)\left(S\,\frac{\lambda p}{A-\mathfrak{A}}\right)^2 - S\,\frac{\lambda^2}{A-\mathfrak{A}}.$$

Wenn man ferner die identische Gleichung

$$\Sigma\,\frac{x^2}{\mathfrak{A}} - 1 = -\,\frac{(\mathfrak{A}-A_1)(\mathfrak{A}-A_2)\ldots(\mathfrak{A}-A_n)}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots\mathfrak{H}\mathfrak{I}}$$

logarithmisch differentiiert, so erhält man

$$\Sigma \frac{x\, d\, x}{\mathfrak{A}\, d\, s} = \left(\Sigma\, \frac{x^2}{\mathfrak{A}} - 1 \right) \cdot S \frac{\lambda p}{A - \mathfrak{A}}.$$

Mittelst dieser Formeln verwandelt sich endlich die Gleichung (14) in

$$S \frac{\lambda^2}{\mathfrak{A} - A} = \frac{(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_{\alpha+2})(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_{\alpha+3}) \dots (\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_n)}{(\mathfrak{A} - A_{\alpha+1})(\mathfrak{A} - A_{\alpha+2}) \dots (\mathfrak{A} - A_n)},$$

woraus

$$\frac{\lambda_{\alpha+1}^2}{A_{\alpha+1} - \mathfrak{A}_i} + \frac{\lambda_{\alpha+2}^2}{A_{\alpha+2} - \mathfrak{A}_i} + \dots + \frac{\lambda_n^2}{A_n - \mathfrak{A}_i} = 0, \; [i = \alpha + 2,\ \alpha + 3, \dots n]$$

als System der $n - \alpha - 1$ Differentialgleichungen erster Ordnung des kürzesten Weges folgt, welches mit (4) zusammenfällt, indem man $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_\alpha = 0$ setzt, wie es die Konstanz der Axenquadrate $A_1, A_2, \dots A_\alpha$ erfordert.

Es ist bekannt, mit welchem Erfolg in der Statik die Begriffe des Differentialparameters und des Potentials von Gauss, Lamé, Liouville und andern eingeführt und angewandt worden sind. Die meisten hier einschlagenden Sätze sind aber durchaus nicht auf den Raum beschränkt, sondern gelten für jede beliebige Totalität. Dieses nachzuweisen, ist der Zweck der folgenden Paragraphen. Wenn darin auch das meiste dem Leser bloss als generalisierende Nachahmung der genialen Arbeiten der erwähnten Analysten erscheinen muss, so wird er doch am Ende dieses Abschnitts eine sehr allgemeine Form der Entwicklung arbiträrer Funktionen von beliebig vielen Variabeln in Reihen von periodischer Natur finden, die vielleicht einiges Interesse darbietet; überdies glaubte ich, Dinge, die mit der Theorie der vielfachen Kontinuität in so engem Zusammenhang stehen, hier nicht übergehen zu sollen.

§ 47. *Ueber die Verwandlung des Differentialparameters mittelst orthogonaler Funktionen.*

Werden auf die n unabhängigen Variabeln $x, y, \dots$ einer Funktion V die linearen und orthogonalen Transformationen

$$x = \alpha\, t + \alpha' t' + \alpha'' t'' + \cdots, \quad y = \beta\, t + \beta' t' + \beta'' t'' + \cdots, \text{ etc.}$$

angewandt, so ist

$$\frac{\partial}{\partial x} = \alpha \frac{\partial}{\partial t} + \alpha' \frac{\partial}{\partial t'} + \alpha'' \frac{\partial}{\partial t''} + \cdots, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \beta \frac{\partial}{\partial t} + \beta' \frac{\partial}{\partial t'} + \cdots, \text{ etc.,}$$

woraus sogleich erhellt, dass dasselbe Rechnungsverfahren, welches

$$x^2 + y^2 + \cdots = t^2 + t'^2 + t''^2 + \cdots$$

giebt, auch zu

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \cdots = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial t'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial t''^2} + \cdots$$

führen wird. Die Operation $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \cdots$ ändert also ihre symbolische Form nicht, wenn die Variabeln orthogonal transformiert werden. D. h., wenn $x, y, \ldots$ als orthogonale Variabeln betrachtet werden, so ist jene Operation zweiter Ordnung von der Wahl des orthogonalen Systems unabhängig. Das Resultat derselben möge der **Differentialparameter** der gegebenen Funktion V heissen.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, wenn n Funktionen $f, f', f'', \ldots$ der n Variabeln $x, y, \ldots$ den $\frac{1}{2} n (n-1)$ Orthogonalitätsbedingungen von der Form

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f'}{\partial y} + \cdots = 0$$

genügen, den Differentialparameter

$$W = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \cdots$$

gemäss der Forderung, dass $f, f', f'', \ldots$ als unabhängige Variabeln erscheinen sollen, umzugestalten.

Zu diesem Zwecke denken wir uns das n-fache Integral $S = \int^n W dx\, dy \ldots$ durch ein beliebiges einfach geschlossenes Kontinuum begränzt. Die Richtungskosinus einer Normale dieses Kontinuums seien $\lambda, \mu, \nu, \ldots$; und wenn die Werte der Variabeln einer Lösung desselben zukommen, so sei $\lambda \frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y} + \cdots = D$. Jenes Integral S nun zerfällt in n Teile, wie $\int^n \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx\, dy\, dz \ldots$ Bei diesem z. B. kann die auf x bezügliche Integration ausgeführt werden; sie giebt $\int^{n-1} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) dy\, dz \ldots$, wo die Klammer anzeigt, dass man vom Endwerte von $\frac{\partial V}{\partial x}$ den Anfangswert zu subtrahieren hat. Bezeichnet nun $d\omega$ ein Element des Grenzkontinuums, und wird überall die Richtung der Normale im gleichen Sinne verstanden, nämlich nach aussen, so ist beim Endwert $dy\, dz \ldots = \lambda\, d\omega$, beim Anfangswert hingegen $-\lambda\, d\omega$ (wo λ, $d\omega$ andere Werte haben

mögen als beim Endwert); die Subtraktion wird also durch dieses letzte Minuszeichen wieder aufgehoben, so dass man hat

$$\int^{n-1} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) d\,y\,d\,z \ldots = \int \lambda \frac{\partial V}{\partial x}\, d\omega,$$

wo das letzte Integral sich ohne Unterbrechung über alle Elemente des Grenzkontinuums erstreckt. Da Aehnliches für die übrigen Teile des Integrals S gilt, so folgt

$$S = \int D V \,.\, d\omega.$$

Die Operation D ist von der Wahl des orthogonalen Axensystems unabhängig. Man kann daher an der Stelle eines jeden Elements $d\omega$ auch die Normalen der durchgehenden Kontinuen des orthogonalen Systems $(f, f', f'', \ldots)$ als Axen gebrauchen. In Beziehung auf diese seien $\Theta, \Theta', \Theta'', \ldots$ die Richtungskosinus der Normale des Elements $d\omega$, so ist, wenn, wie früher,

$$R^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \cdots, \text{ etc.}$$

gesetzt wird,

$$\lambda = \Theta \cdot R \frac{\partial x}{\partial f} + \Theta' \,.\, R' \frac{\partial x}{\partial f'} + \cdots, \text{ etc.};$$

also

$$D = \Theta\, R \frac{\partial}{\partial f} + \Theta' R' \frac{\partial}{\partial f'} + \cdots$$

Da die Form des Elements $d\omega$ frei steht, so kann man seine Projektion auf das lineare Tangentialkontinuum $f =$ const. als orthogonales Paralleloschem auffassen, dessen Seiten $\frac{\partial f'}{R'}, \frac{\partial f''}{R''}, \ldots$ sind und daher $\Theta\, d\omega = \frac{df' df'' df''' \ldots}{R' R'' R''' \ldots}$ setzen. Dadurch wird

$$\int \Theta\, R \frac{\partial V}{\partial f}\, d\omega = \int^{n-1} \left(\frac{R}{R' R'' R''' \ldots} \cdot \frac{\partial V}{\partial f}\right) df'\, df''\, df''' \ldots$$

Dem Durchschnitt der Kontinuen $f', f'', \ldots$ entlang zieht sich ein Element der zugleich mit S begrenzten Totalität $\int^n dx\,dy\,dz \ldots$, welches nur e i n e endliche Ausdehnung hat und an welchem Anfang und Ende zu unterscheiden ist, gerade wie bei der Anwendung der ursprünglichen Variabeln $x, y, \ldots$ Es ist also auch

$$\int \Theta\, R \frac{\partial V}{\partial f}\, d\omega = \int^{n} \frac{\partial \left(\frac{R}{R' R'' R''' \ldots} \frac{\partial V}{\partial f}\right)}{\partial f}\, df\, df'\, df''\, df''' \ldots;$$

also, wenn man wieder alle Teile zusammenfasst:

$$S = \int^{n} \left\{ \frac{\partial \cdot \frac{R}{R' R'' R''' \ldots} \frac{\partial V}{\partial f}}{\partial f} + \frac{\partial \cdot \frac{R'}{R R'' R''' \ldots} \frac{\partial V}{\partial f'}}{\partial f'} + \frac{\partial \cdot \frac{R''}{R R' R''' \ldots} \frac{\partial V}{\partial f''}}{\partial f''} + \cdots \right\} df\, df'\, df'' \ldots$$

Da aber das Element der Totalität als Paralleloschem aufgefasst werden kann, dessen Seiten $\frac{df}{R}, \frac{df'}{R'}, \frac{df''}{R''}, \ldots$ sind, so ist

$$S = \int^{n} W\, dx\, dy\, dz \ldots = \int^{n} \frac{W}{R R' R'' R''' \ldots} df\, df'\, df''\, df''' \ldots$$

Die begrenzte Totalität, über welche sich das Integral S erstreckt, kann so klein angenommen werden, als man nur will; folglich muss der Differentialparameter

$$W = R R' R'' \ldots \left\{ \frac{\partial}{\partial f} \left(\frac{R}{R' R'' R''' \ldots} \frac{\partial V}{\partial f} \right) + \frac{\partial}{\partial f'} \left(\frac{R'}{R R'' R''' \ldots} \frac{\partial V}{\partial f'} \right) + \frac{\partial}{\partial f''} \left(\frac{R''}{R R' R''' \ldots} \frac{\partial V}{\partial f''} \right) + \cdots \right\}$$

sein.

Wir wollen noch im Besondern diese Formel auf konfokale und auf polysphärische Koordinaten anwenden.

Werden die Bezeichnungen von § 45 gebraucht, so sind bei Einführung konfokaler Variabeln $f, f', f'', \ldots, R, R', R'', \ldots$ durch $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n, 2p_1, 2p_2, \ldots 2p_n$ zu ersetzen; und man hat

$$\begin{aligned} W &= 4 p_1 p_2 \ldots p_n \left\{ \frac{\partial}{\partial A_1} \left(\frac{p_1^2}{p_1 p_2 \ldots p_n} \frac{\partial V}{\partial A_1} \right) + \cdots + \frac{\partial}{\partial A_n} \left(\frac{p_n^2}{p_1 p_2 \ldots p_n} \frac{\partial V}{\partial A_n} \right) \right\} \\ &= 4 \frac{R_1 R_2 \ldots R_n}{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial A_1} \left(\frac{\Phi_1 R_1}{R_2 R_3 \ldots R_n} \frac{\partial V}{\partial A_1} \right) + \cdots + \frac{\partial}{\partial A_n} \left(\frac{\Phi_n R_n}{R_1 R_2 \ldots R_{n-1}} \frac{\partial V}{\partial A_n} \right) \right\} \\ &= \frac{4}{\Omega} \left\{ \Phi_1 R_1 \frac{\partial \cdot R_1 \frac{\partial V}{\partial A_1}}{\partial A_1} + \Phi_2 R_2 \frac{\partial \cdot R_2 \frac{\partial V}{\partial A_2}}{\partial A_2} + \cdots + \Phi_n R_n \frac{\partial \cdot R_n \frac{\partial V}{\partial A_n}}{\partial A_n} \right\}, \end{aligned}$$

weil z. B. $\Phi_1, R_2, R_3, \ldots R_n$ die Variable A_1 nicht enthalten.

Wenn die polysphärischen Transformationen

$$x_1 = r \cos \varphi_1, \quad x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \quad x_3 = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3, \ldots .$$
$$\ldots, x_{n-1} = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \ldots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}, \quad x_n = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \ldots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1}$$

sind, so muss man $f, f', f'', \ldots; \frac{1}{R}, \frac{1}{R'}, \frac{1}{R''}, \ldots$ durch $r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}$; $1, r, r \sin \varphi_1$, $r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2, \ldots\ldots\ldots, r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \ldots \sin \varphi_{n-2}$ ersetzen und erhält:

$$W = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{d \cdot r^{n-1} \frac{\partial V}{\partial r}}{\partial r} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2 \ldots \sin^2 \varphi_{i-1} \sin^{n-i-1} \varphi_i} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \left(\sin^{n-i-1} \varphi_i \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} \right).$$

Eine spezielle Folgerung aus dieser Formel hat für das folgende Bedeutung; wenn nämlich $V = \frac{1}{r^{n-2}}$ ist, so wird $W = 0$.

§ 48. *Ueber das Potential.*

Wenn k eine gegebene Funktion der n Variabeln $x, y, \ldots$ bezeichnet, welche ausserhalb eines begrenzten Teiles der Totalität verschwindet, und ferner $r = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + \ldots}$ der Abstand der zwei Lösungen $(a, b, c, \ldots)$ und $(x, y, \ldots)$ ist, so ist

$$V = \int^{n} \frac{k}{r^{n-2}} \, dx \, dy \, dz \ldots,$$

als Funktion der Variabeln $a, b, c, \ldots$ betrachtet, das Potential der Masse $\int^n k \, dx \, dy \, dz \ldots$ für die Lösung $(a, b, \ldots)$, und die gegebene Funktion k ist die jeder Lösung $(x, y, \ldots)$ zukommende Dichtigkeit. Ist k innerhalb der Begrenzung konstant, so heisse die Masse homogen.

Bestimmung des Potentials einer homogenen Polysphäre.

Wir setzen uns vor, den Wert des Integrals

$$S_m = \int_0^{\pi} \frac{\sin^m \varphi \, d\varphi}{(a^2 - 2a\cos\varphi + 1)^{\frac{m}{2}}}$$

zu ermitteln, wenn m eine ganze positive Zahl ist. Ist erstens $a > 1$, so setze man $\sin\psi = a \sin(\psi - \varphi)$, so wächst ψ gleichzeitig mit φ von 0 bis π, und man hat

$$d\varphi = \left(1 - \frac{\cos\psi}{\sqrt{a^2 - \sin^2\psi}}\right) d\psi, \qquad \frac{\sin\varphi}{\sqrt{a^2 - 2a\cos\varphi + 1}} = \frac{\sin\psi}{a}.$$

Demnach ist

$$S_m = \frac{1}{a^m} \int_0^{\pi} \left(\sin^m\psi - \frac{\sin^m\psi\cos\psi}{\sqrt{a^2 - \sin^2\psi}}\right) d\psi,$$

und wenn man die Elemente vereinigt, welche supplementären Werten von ψ entsprechen,

$$S_m = \frac{1}{a^m} \int_0^{\pi} \sin^m\psi \, d\psi = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right) \cdot a^m}.$$

Ist zweitens $a < 1$, so ist

$$S_m = \frac{1}{a^m} \int_0^\pi \frac{\sin^m \varphi \, d\varphi}{\left(\left(\frac{1}{a}\right)^2 - \frac{2}{a}\cos\varphi + 1\right)^{\frac{m}{2}}};$$

also

$$S_m = \int_0^\pi \sin^m \psi \, d\psi.$$

Nach dieser Vorbereitung gehen wir an die Bestimmung des Potentials $V = \int \frac{d\omega}{r^{n-2}}$ eines totalen polysphärischen Kontinuums vom Radius 1, wenn das Massenelement mit dem Element $d\omega$ des Kontinuums identisch und a der Abstand der Lösung, für welche das Potential gesucht wird, vom Zentrum der Polysphäre ist. Bedeutet φ den Winkel, welchen der nach $d\omega$ gehende Radius mit dem genannten Abstand a, den wir als erste Axe der polysphärischen Variabeln ansehen wollen, bildet, so ist $r = \sqrt{a^2 - 2a\cos\varphi + 1}$. Das Element $d\omega$ kann als Parelleloschem von $n - 1$ orthogonalen Seiten, welche den Variationen der polysphärischen Variabeln entsprechen, aufgefasst werden; seine erste Seite ist $d\varphi$, und das Produkt der übrigen mit $\sin^{n-2}\varphi$ proportional; wenn man $d\omega = \sin^{n-2}\varphi \, d\varphi \cdot d\omega'$ setzt, so ist das äquatoriale Element $d\omega'$ von φ unabhängig. Die Masse ist

$$\Omega = \int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi \, d\varphi \cdot \int^{n-2} d\omega' = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Das Potential ist also nach dem Vorigen

$$V = \frac{1}{a^{n-2}} \int_0^\pi \sin^{n-2}\psi \, d\psi \cdot \int d\omega' = \frac{\Omega}{a^{n-2}} \text{ oder } = \Omega,$$

je nachdem $a > 1$ oder $a < 1$ ist; d. h.

Das Potential eines homogenen polysphärischen Kontinuums ist für eine äussere Lösung (oder auch für eine auf dem Kontinuum selbst befindliche) gerade so, wie wenn die Masse im Zentrum vereinigt wäre; für eine innere Lösung dagegen gleich, wie auf dem Kontinuum selbst, also inwendig konstant.

Das Potential einer homogenen Polysphäre von der Dichtigkeit 1 und dem Radius r ist für eine äussere Lösung, welche um a vom Zentrum absteht,

$$V = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \frac{r^n}{a^{n-2}},$$

für eine innere Lösung dagegen

$$V = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(r^2 - \frac{n-2}{n} a^2\right).$$

Da die Funktion V nur die Variable a enthält, so ist der Differentialparameter

$$W = \frac{1}{a^{n-1}} \cdot \frac{\partial \cdot a^{n-1} \frac{\partial V}{\partial a}}{\partial a}$$

und verschwindet für eine äussere Lösung; für eine innere dagegen ist

$$W = -4 \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)}.$$

Differentialparameter des Potentials. Wir betrachten wieder eine beliebig verteilte endliche Masse und bezeichnen mit r den Abstand der variabeln Lösung, auf welche sich das Potential als Funktion bezieht, von irgend einem Element dm der gegebenen Masse; das Potential dieses Elements ist $\frac{dm}{r^{n-2}}$; da nun für ein endliches r die unendlich kleinen Dimensionen von dm nicht in Betracht kommen, so enthält dieser Ausdruck nur die Variable r, und sein Differentialparameter ist daher

$$dm \cdot \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial \cdot \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial r} \right) = 0.$$

Nun ist das Potential V der totalen Masse gleich der Summe der Potentiale ihrer Elemente; also auch der Differentialparameter W von V gleich der Summe der Differentialparameter der Potentiale aller einzelnen Elemente. Daher muss W für jede ausserhalb der Masse befindliche Lösung verschwinden.

Um nun auch für eine der Masse angehörende Lösung den Wert von W zu finden, beschreiben wir um dieselbe eine Polysphäre von unendlich kleinem Radius, so dass mit Vernachlässigung von Grössen erster Ordnung die Dichtigkeit k innerhalb dieser Polysphäre als konstant angenommen werden darf. Dann teilen wir W in einen dieser Polysphäre und einen der ganzen übrigen Masse entsprechenden Teil. Jener ist nach dem Obigen $-4\, k\, \pi^{\frac{n}{2}} : \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)$, dieser ist Null. Also ist überhaupt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \cdots = -4 \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)} k.$$

D. h. Der Differentialparameter des Potentials einer gegebenen Masse für irgend eine Lösung ist $-(n-2)$ mal das Produkt des totalen Masses des polysphärischen Kontinuums vom Radius 1 und der für die Lösung stattfindenden Dichtigkeit.

§ 49. *Bestimmung des Potentials der von einem quadratischen Kontinuum erster Gattung umschlossenen homogenen Totalität.*

Es sei $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots = 1$ die Gleichung des Grenzkontinuums, $(a, b, \ldots)$ die Lösung, für welche das Potential V gesucht werden soll, $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + \cdots$,

$$V = \int^{(n)} \frac{dx\, dy\, dz \ldots}{r^{n-2}}, \quad \left[\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots < 1\right],$$

$$dV = X\, da + Y\, db + Z\, dc + \cdots;$$

dann ist

$$X = (n-2) \int^{(n)} \frac{dx\, dy\, dz \ldots}{r^n}(x-a) = -\int^{(n)} \frac{\partial \cdot \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x} dx\, dy\, dz \cdots = -\int^{(n-1)} \left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) dy\, dz \ldots,$$

wo die Klammer den Unterschied zwischen dem End- und Anfangswert anzeigt. Es seien nun $A', B', \ldots$ die Axenquadrate des durch die Lösung $(a, b, \ldots)$ gehenden konfokalen Kontinuums erster Gattung, also $\frac{a^2}{A'} + \frac{b^2}{B'} + \cdots = 1$, ferner $x = \sqrt{A} \cdot x'$, $y = \sqrt{B} \cdot y', \ldots$; $a = \sqrt{A'} \cdot a'$, $b = \sqrt{B'} \cdot b', \ldots$; dann wird

$$X = -\sqrt{BC \ldots} \int^{(n-1)} \left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) dy'\, dz' \ldots,$$

wo das Integral sich über das ganze durch die Gleichung $x'^2 + y'^2 + \cdots = 1$ bestimmte polysphärische Kontinuum erstreckt. Wird das Element dieses Kontinuums mit $d\sigma$ bezeichnet, so kann $dy'\, dz' \ldots$ durch $x'\, d\sigma$ ersetzt werden, und man hat

$$X = -\sqrt{BC \ldots} \int \frac{x'\, d\sigma}{r^{n-2}}.$$

Wenn wir nun den Wert von r näher betrachten, so ergiebt sich eine merkwürdige Transformation des vorliegenden Integrals. Es ist nämlich

$$r^2 = A x'^2 + B y'^2 + \cdots - 2(\sqrt{AA'} \cdot a' x' + \sqrt{BB'} \cdot b' y' + \cdots) + A' a'^2 + B' b'^2 + \cdots.$$

Da aber in der ganzen Ausdehnung des letzten Integrals $x'^2 + y'^2 + \cdots = 1 = a'^2 + b'^2 + \cdots$, und überdies $A - A' = B - B' = \cdots$ ist, so hat man auch

$$(A - A')\, x'^2 + (B - B')\, y'^2 + \cdots = (A - A')\, a'^2 + (B - B')\, b'^2 + \cdots,$$

oder

$$A x'^2 + B y'^2 + \cdots + A' a'^2 + B' b'^2 + \cdots = A' x'^2 + B' y'^2 + \cdots + A a'^2 + B b'^2 + \cdots;$$

folglich auch

$$r^2 = A' x'^2 + B' y'^2 + \cdots - 2 (\sqrt{AA'} \cdot a' x' + \sqrt{BB'} \cdot b' y' + \cdots) + A a'^2 + B b'^2 + \cdots;$$

d. h. wenn die polysphärischen Variabeln sich gleich bleiben, so darf man beide konfokale Kontinua mit einander vertauschen, ohne dass der Wert von r sich ändert. Es sei nun

$$X_1 = \sqrt{B' C' \ldots} \int \frac{x'\, d\sigma}{r^{n-2}},$$

also $X : X_1 = \sqrt{BC\ldots} : \sqrt{B' C' \ldots}$; und ferner sei $a_1 = \sqrt{A} \cdot a'$, $b_1 = \sqrt{B} \cdot b', \ldots$, $d V_1 = X_1\, da_1 + Y_1\, db_1 + Z_1\, dc_1 + \cdots$; dann ist V_1 das Potential der vom zweiten konfokalen Kontinuum (A') umschlossenen Totalität für eine auf dem ersten Kontinuum (A) befindliche Lösung ($a_1, b_1, \ldots$). Dadurch sind die zwei Fälle, wo die Lösung, für welche das Potential gesucht wird, innerhalb, und wo sie ausserhalb des quadratischen Grenzkontinuums liegt, in gegenseitige Beziehung gebracht.

Wir behandeln nun zuerst den Fall, wo die Lösung innerhalb liegt, indem wir von der Formel

$$X = (n-2) \int^{n} \frac{(x-a)\, dx\, dy \ldots}{r^n}$$

ausgehen und polysphärische Variabeln einführen, welche die Lösung $(a, b, \ldots)$ zum Zentrum haben. Es sei $x = a + r\lambda$, $y = b + r\mu, \ldots$, also $\lambda^2 + \mu^2 + \cdots = 1$; und das Element des polysphärischen Kontinuums vom Radius sei $d\sigma$; dann wird das Element der Totalität $r^{n-1}\, dr\, d\sigma$, und wir haben demnach $X = (n-2) \int\int \lambda\, dr\, d\sigma = (n-2) \int \lambda\, r\, d\sigma$, wo r stets positiv zu nehmen, und das Integral über das ganze polysphärische Kontinuum auszudehnen ist. Da die Werte von r im letzten Integral sich auf das Grenzkontinuum $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots = 1$ beziehen, so hat man $v r^2 + 2 u r = h$, wenn

$$v = \frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \cdots, \qquad u = \frac{\lambda a}{A} + \frac{\mu b}{B} + \cdots, \qquad h = 1 - \left(\frac{a^2}{A} + \frac{b^2}{B} + \cdots\right)$$

gesetzt wird; nach der Voraussetzung ist h positiv, und es folgt

$$r = \frac{-u + \sqrt{u^2 + hv}}{v},$$

wo die Wurzelgrösse als positiv gelten soll. Vergleicht man nun zwei Elemente des Integrals X, für welche die polysphärischen Variabeln $\lambda, \mu, \ldots$ sämtlich gleich und entgegengesetzt sind, so sind die entsprechenden Werte von $-\lambda u : v$ einander gleich, hingegen die Werte von $\lambda \sqrt{u^2 + hv} : v$ gleich und entgegengesetzt. Dadurch ist die Wurzelgrösse beseitigt. Vergleicht man jetzt auch zwei Elemente, für welche $u, v, \ldots$ gleich, aber λ gleich und entgegengesetzt ist, so ersieht man leicht, dass das Integral sich auf

$$X = -(n-2)\frac{a}{A}\int \frac{\lambda^2\, d\sigma}{\frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \cdots}$$

reduziert. Der Wert von X ändert sich also nicht, wenn man auch alle linearen Dimensionen der Masse proportional verändert, wofern dann nur die Lösung $(a, b, \ldots)$ immer noch innerhalb bleibt.

Um nun für diesen Fall einer innern Lösung auch den Wert des Potentials V zu bestimmen, wollen wir denselben zuerst für das Zentrum suchen. Es ist für dieses

$$r^2\left(\frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \cdots\right) = 1, \qquad V = \int\!\!\int r\, dr\, d\sigma = \frac{1}{2}\int r^2\, d\sigma,$$

also

$$V = \frac{1}{2}\int \frac{d\sigma}{\frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \cdots}.$$

Diese Formel giebt uns die Konstante, wenn wir die Gleichung $dV = X\,da + Y\,db + \cdots$ integrieren. Wir bekommen für irgend eine innere Lösung

$$V = \frac{1}{2}\int \frac{d\sigma}{\frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \cdots} - \frac{n-2}{2}\int \frac{\frac{a^2\lambda^2}{A} + \frac{b^2\mu^2}{B} + \cdots}{\frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \cdots}\, d\sigma. \quad . \quad . \quad (1)$$

Es wird sich in der Folge zeigen, dass diese $(n-1)$-fachen Integrale sich in einfache verwandeln lassen.

Wir wenden uns nun zur Behandlung des schwierigern Falls einer äussern Lösung. Aus dem früher Gesagten folgt leicht

$$\frac{1}{n-2} X = -\frac{\sqrt{ABC\ldots J}}{\sqrt{A'B'C'\ldots J'}} \frac{a}{A'} \int \frac{\lambda^2 \, d\sigma}{\frac{\lambda^2}{A'} + \frac{\mu^2}{B'} + \frac{\nu^2}{C'} + \cdots}.$$

Wenn wir aber die Gleichung $dV = X\,da + Y\,db + \cdots$ integrieren wollen, so dürfen wir nicht vergessen, dass vermöge der Bedingung $\frac{a^2}{A'} + \frac{b^2}{B'} + \frac{c^2}{C'} + \cdots = 1$ nunmehr A' eine Funktion von $a, b, c, \ldots$ ist. Wären $A', B', \ldots$ konstant, so bekäme man bei der Integration die Funktion

$$U = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{AB\ldots J}}{\sqrt{A'B'\ldots J'}} \int \frac{\frac{a^2\lambda^2}{A'} + \frac{b^2\mu^2}{B'} + \cdots}{\frac{\lambda^2}{A'} + \frac{\mu^2}{B'} + \cdots} \, d\sigma.$$

Durch vollständige Differentiation ergiebt sich aber

$$dU = \frac{dV}{n-2} + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{AB\ldots J}}{\sqrt{A'B'\ldots J'}} \, dA' \cdot \Sigma \frac{1}{A'} \cdot \int \frac{\Sigma \frac{a^2\lambda^2}{A'}}{\Sigma \frac{\lambda^2}{A'}} \, d\sigma$$

$$+ \frac{dA'}{2} \cdot \frac{\sqrt{AB\ldots J}}{\sqrt{A'B'\ldots J'}} \int \frac{\Sigma \frac{a^2\lambda^2}{A'^2}}{\Sigma \frac{\lambda^2}{A'}} \, d\sigma - \frac{dA'}{2} \cdot \frac{\sqrt{AB\ldots J}}{\sqrt{A'B'\ldots J'}} \int \frac{\Sigma \frac{\lambda^2}{A'^2} \cdot \Sigma \frac{a^2\lambda^2}{A'}}{\left(\Sigma \frac{\lambda^2}{A'}\right)^2} \, d\sigma.$$

Wir müssen suchen, für das letzte Integral, wo das Quadrat von $\Sigma \frac{\lambda^2}{A'}$ im Nenner steht, wegzuschaffen. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \left(\frac{\lambda \, \Sigma \frac{a^2\lambda^2}{A'}}{\Sigma \frac{\lambda^2}{A'}} \right) = \frac{\Sigma \frac{a^2\lambda^2}{A'}}{\Sigma \frac{\lambda^2}{A'}} + 2 \frac{\frac{a^2\lambda^2}{A'}}{\Sigma \frac{\lambda^2}{A'}} - 2 \frac{\frac{\lambda^2}{A'} \, \Sigma \frac{a^2\lambda^2}{A'}}{\left(\Sigma \frac{\lambda^2}{A'}\right)^2};$$

$$\Sigma \int \frac{\partial}{\partial\lambda} \left(\frac{\frac{\lambda}{A'} \, \Sigma \frac{a^2\lambda^2}{A'}}{\Sigma \frac{\lambda^2}{A'}} \right) d\sigma = \Sigma \frac{1}{A'} \cdot \int \frac{\Sigma \frac{a^2\lambda^2}{A'}}{\Sigma \frac{\lambda^2}{A'}} \, d\sigma + 2 \int \frac{\Sigma \frac{a^2\lambda^2}{A'^2}}{\Sigma \frac{\lambda^2}{A'}} \, d\sigma - 2 \int \frac{\Sigma \frac{\lambda^2}{A'^2} \cdot \Sigma \frac{a^2\lambda^2}{A'}}{\left(\Sigma \frac{\lambda^2}{A'}\right)^2} \, d\sigma. \quad (2)$$

Auf der linken Seite ist der Faktor von $d\sigma$ in Beziehung auf $\lambda, \mu, \ldots$ homogen und vom nullten Grade. Wenn man also mit $\int_0^1 n r^{n-1} \, dr = 1$ multipliziert und dann das Element $r^{n-1} \, dr \, d\sigma$ der Totalität durch $dx \, dy \ldots$ ersetzt, so kann man auch im Faktor desselben $\lambda, \mu, \ldots$ durch $x, y, \ldots$ ersetzen. Man erhält

$$n\int^{n}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{x}{A'}\sum\frac{a^2x^2}{A'}}{\sum\frac{x^2}{A'}}\right)\cdot dx\,dy\,dz\cdots = n\int^{n-1}\left(\frac{\frac{x}{A'}\sum\frac{a^2x^2}{A'}}{\sum\frac{x^2}{A'}}\right)dy\,dz\cdots = n\int\frac{\frac{\lambda}{A'}\sum\frac{a^2\lambda^2}{A'}}{\sum\frac{\lambda^2}{A'}}\cdot\lambda\,d\sigma.$$
$$(x^2+y^2+\cdots<1)\qquad\qquad(x^2+y^2+\cdots=1)$$

Also ist jene Summe auf der linken Seite

$$= n\int\Sigma\frac{a^2\lambda^2}{A'}\,d\sigma = n\left(\frac{a^2}{A'}\int\lambda^2\,d\sigma+\frac{b^2}{B'}\int\mu^2\,d\sigma+\cdots\right),$$

oder, da offenbar $\int\lambda^2\,d\sigma=\int\mu^2\,d\sigma=$ etc. $=\frac{1}{n}\int(\lambda^2+\mu^2+\cdots)\,d\sigma=\frac{1}{n}\int d\sigma$ ist, auch

$$=\left(\frac{a^2}{A'}+\frac{b^2}{B'}+\cdots\right)\int d\sigma=\int d\sigma=2\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Durch diese Vorbereitung in den Stand gesetzt, jenes Integral, wo im Nenner das Quadrat einer Summe steht, zu entfernen, bekommen wir

$$dU=\frac{dV}{n-2}+\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{ABC\ldots J}}{\sqrt{A'B'C'\ldots J'}}\,dA',$$

und hieraus endlich

$$V=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}\sqrt{ABC\ldots J}\int_{A'}^{\infty}\frac{dA'}{\sqrt{A'B'\ldots J'}}-\frac{n-2}{2}\,\frac{\sqrt{ABC\ldots J}}{\sqrt{A'B'C'\ldots J'}}\int\frac{\Sigma\frac{a^2\lambda^2}{A'}}{\Sigma\frac{\lambda^2}{A'}}\,d\sigma,\qquad(3)$$

wo die Integrationskonstante so bestimmt ward, dass V für eine unendlich weit entfernte Lösung $(a, b\ldots)$ verschwindet.

Liegt die Lösung $(a, b\ldots)$ auf dem Grenzkontinuum (A), so muss dieser Ausdruck mit dem früher für eine innere Lösung gefundenen übereinstimmen. Man hat also

$$\int\frac{d\sigma}{\frac{\lambda^2}{A}+\frac{\mu^2}{B}+\cdots}=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}\sqrt{ABC\ldots J}\int_{A}^{\infty}\frac{dA'}{\sqrt{A'B'C'\ldots J'}},$$

wodurch ein $(n-1)$-faches Integral in ein einfaches Abelsches Integral verwandelt ist. Hiedurch zu der Vermutung geführt, dass auch das andere $(n-1)$-fache Integral, welches in (1) und (3) vorkommt, in ein einfaches sich verwandeln lasse, untersuchen

wir in dieser Absicht die oben gefundene Redüktionsgleichung (2), welche, indem wir die Accente weglassen, $a, b, \ldots$ als unabhängig annehmen und abkürzend $v = \Sigma \frac{\lambda^2}{A}$, $w = \Sigma \frac{a^2 \lambda^2}{A}$, $R = \sqrt{ABC \ldots J}$ setzen, folgende Form erhält:

$$\frac{1}{2} \Sigma \frac{a^2}{A} \cdot \int d\sigma = \frac{\partial \log R}{\partial A} \int \frac{w}{v} d\sigma - \int \frac{1}{v} \frac{\partial w}{\partial A} d\sigma - \int w \frac{\partial \frac{1}{v}}{\partial A} d\sigma$$

$$= - R \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{1}{R} \int \frac{w}{v} d\sigma \right),$$

wo die Differentialkoeffizienten im Sinne von $dA = dB = dC = \cdots = dJ$ zu verstehen sind. Integriert man so, dass beide Seiten der Gleichung für ein unendlich grosses A übereinstimmen, so wird

$$\frac{1}{R} \int \frac{w}{v} d\sigma = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_A^{\infty} \Sigma \frac{a^2}{A} \cdot \frac{dA}{R}.$$

Beide Fälle, einer innern und einer äussern Lösung in einem Ausdruck vereinigend, können wir nun das Endergebnis dieses §, wie folgt, aussprechen:

Ist $r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + \cdots$, und das n-fache Integral $V = \int r^{-(n-2)} dx\, dy\, dz \ldots$ durch $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots < 1$ begrenzt, wofür alle $A, B, C, \ldots$ positiv sein müssen, so ist

$$V = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)} \sqrt{ABC \ldots} \int^{\infty} \frac{1 - \frac{a^2}{A + u} - \frac{b^2}{B + u} - \frac{c^2}{C + u} - \cdots}{\sqrt{(A + u)(B + u)(C + u) \ldots}} du, \quad . \quad . \quad (4)$$

wo als untere Grenze des Integrals $u = 0$ zu nehmen ist, wenn dadurch der Zähler des unter dem Integrationszeichen befindlichen Bruchs nicht negativ gemacht wird, sonst aber der positive Wert von u, für welchen dieser Zähler verschwindet.

Die folgende allgemeine Betrachtung wird uns einen noch kürzern Weg kennen lehren, auf dem man zu diesem Satze gelangen kann, welcher für $n = 3$ den, wenn ich nicht irre, zuerst von Ivory gefundenen Ausdruck für die Attraktion eines homogenen Ellipsoids in sich schliesst.

§ 50. *Ueber eine Verteilung von Masse auf einem quadratischen Kontinuum erster Gattung, welche zugleich mit ihrem Potential bekannt ist.*

Gelten die Bezeichnungen des § 45 und setzt man abkürzend

$$d\varphi_1 = \frac{dA_1}{2R_1},\quad d\varphi_2 = \frac{dA_2}{2R_2}, \ldots,\quad d\varphi_n = \frac{dA_n}{2R_n},$$

so kennen wir aus § 47 folgenden Ausdruck des Differentialparameters mittelst konfokaler Variabeln:

$$\text{Diffpar. } V = \frac{1}{\Omega}\left(\Phi_1 \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1^2} + \Phi_2 \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_2^2} + \cdots + \Phi_n \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_n^2}\right).$$

Wäre nun $(-1)^{i-1}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i^2}$ für $i = 1, 2, 3, \ldots n$ immer einer und derselben ganzen Funktion $(n-2)$-ten oder niedrigeren Grades der einzigen Variabeln A_i proportional, so müsste nach einer in § 45 gemachten Bemerkung Diffpar. V verschwinden. Es sei M_i eine solche ganze Funktion von A_i, und man soll bewirken, dass

$$(-1)^{i-1}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i^2} = M_i V$$

wird. Dieses wird erreicht, wenn man

$$V = P_1 P_2 P_3 \ldots P_n, \qquad (-1)^{i-1}\frac{\partial^2 P_i}{\partial \varphi_i^2} = M_i P_i$$

setzt, wo für $i = 1, 2, \ldots n$ immer P_i eine und dieselbe Funktion von A_i bedeutet. Ist diese Funktion P algebraisch und nicht gebrochen, d. h. wird sie für keinen endlichen Wert von A unendlich gross, so vermehrt die Operation $\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ ihren Grad um $n-2$; also muss die Funktion M vom $(n-2)$-ten Grade sein. Da die Differentiation nach φ Wurzelgrössen hineinbringt, so sehen wir uns bewogen, von vornherein die Funktion P als Produkt einiger Axen $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}, \ldots$ mit einer ganzen Funktion des Axenquadrates A vorauszusetzen; das Produkt jener Axen sei $\sqrt{K}$, diese Funktion $f(A)$, also $P = \sqrt{K}\,.\,f(A)$. Ferner sei $R^2 = ABC \ldots = KL$, und η, θ seien die Grade von K und f in Beziehung auf A (was wir unter der Voraussetzung $dA = dB = \cdots$ als einzige Variable ansehen). Werden nun die nach A abgeleiteten Funktionen durch Accente bezeichnet, so verwandelt sich die Bedingung $\frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} = MP$ in

$$4\,KLf'' + 2\,(3\,K'L + KL')\,f' + (2\,K''L + K'L')\,f = Mf. \quad . \quad . \quad (1)$$

Da es auf einen konstanten Faktor in f nicht ankommt, so wollen wir 1 als Koeffizient von A^θ annehmen. Dann wird der Koeffizient der höchsten Potenz A^{n-2} in der Entwicklung von M gleich

$$
\begin{aligned}
& 4\,\theta\,(\theta-1)+2\,(3\,\eta+n-\eta)\,\theta+2\,\eta\,(\eta-1)+\eta\,(n-\eta) \\
& =4\,\theta^2+2\,(2\,\eta+n-2)\,\theta+\eta\,(n+\eta-2) \\
& =(2\,\theta+\eta)\,(2\,\theta+\eta+n-2).
\end{aligned}
$$

Ist m der Grad von P in Beziehung auf die Axe $\sqrt{A}$, so ist $m=2\,\theta+\eta$, und $m\,(m+n-2)$ der Koeffizient von A^{n-2} in der Entwicklung von M. Es bleiben in den ganzen Funktionen f und M noch $n-2+\theta$ Koeffizienten zu bestimmen übrig. Die Gleichung (1), die wir identisch zu machen haben, ist aber vom $(n-2+\theta)$-ten Grade, und da wir die höchsten Potenzen schon berücksichtigt haben, so bleiben noch $n-2+\theta$ Bedingungen übrig, welche wenigstens ihrer Zahl nach gerade hinreichen, das Verlangte zu leisten. Die nähere Erörterung dieser Aufgabe werden wir erst später in § 52 vornehmen.

Es ist klar, dass die algebraische Funktion P nicht das allgemeine Integral der Gleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}=M V$ ist, weil nur der arbiträre Faktor, den sie haben kann, als Integrationskonstante zählt. Es sei Q ein von P wesentlich verschiedenes Integral derselben Gleichung, so folgt, wenn man aus den Gleichungen

$$
\frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2}=M P, \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2}=M Q
$$

das Polynom M eliminiert,

$$
P\,\frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2}-Q\,\frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2}=0,
$$

und durch Integration dieser Gleichung

$$
P\,\frac{\partial Q}{\partial \varphi}-Q\,\frac{\partial P}{\partial \varphi}=-1, \qquad \qquad (2)
$$

wo wir -1 für die arbiträre Konstante gesetzt haben, da irgend eine andere Konstante nur der Multiplikation von Q mit einem konstanten Faktor entspricht. Da wir beabsichtigen, Q für ein unendlich wachsendes A verschwinden zu lassen, so setzen wir

$$
Q=P\int_A^\infty \frac{\partial \varphi}{P^2}, \qquad \qquad (3)
$$

als Integral der Gleichung (2). Für ein unendlich grosses A verschwindet der Einfluss der Unterschiede zwischen den Axenquadraten $A, B, C, \ldots$, und wenn man $\sqrt{A} = a$ setzt und 1 als Koeffizient der höchsten Potenz in P annimmt, so wird

$$Q = \frac{1}{n+2m-2} \cdot \frac{1}{a^{n+m-2}}$$

und verschwindet daher für ein unendlich wachsendes a, sobald $n > 2$ ist, was wir fortan voraussetzen wollen.

Es ist jetzt leicht, das allgemeine Integral der vorliegenden Differentialgleichung zweiter Ordnung anzugeben; es ist $\alpha P + \beta Q$, wo α, β die arbiträren Integrationskonstanten bedeuten.

Da nur die erste Gattung quadratischer Kontinuen ein unendliches Wachstum der Axenquadrate verträgt, so können wir Q nur auf solche Kontinua beziehen und daher nur den Zeiger 1 bei dieser Funktion anbringen.

Aus dem gleichen Grunde, warum Diffpar. $(P_1 P_2 \ldots P_n) = 0$ war, ist nun auch Diffpar. $(Q_1 P_2 P_3 \ldots P_n) = 0$, wofern nur die Funktion P für keinen zwischen A_1 und $+\infty$ liegenden Wert von A verschwindet. Man kann nun immer das Axenquadrat A eines Kontinuums $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots = 1$ erster Gattung gross genug annehmen, dass die Funktion P weder für diesen, noch für irgend einen grössern Wert von A verschwindet. Dann ist klar, dass nicht nur, wie sich von selbst versteht, das Produkt $\Pi = P_1 P_2 \ldots P_n$ für keine innerhalb des gegebenen quadratischen Kontinuums liegende, sondern auch das Produkt $\Pi' = Q_1 P_2 P_3 \ldots P_n$ für keine äussere Lösung unendlich gross wird.

Wir wollen nun die zwei Integrale

$$\mathfrak{P} = \int^{n} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial y} + \cdots \right) dx\, dy\, dz \ldots, \left[\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots < 1 \right]$$

$$\mathfrak{Q} = \int^{n} \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi'}{\partial y} \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial y} + \cdots \right) dx\, dy\, dz \ldots, \left[\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots > 1 \right]$$

näher betrachten. Ersetzt man für ein sehr grosses A das Element $dx\, dy\, dz \ldots$ der Totalität durch $r^{n-1}\, dr\, d\sigma$, wo wir auch r uns als sehr gross denken, so sind die Differentialkoeffizienten von $\frac{1}{r^{n-2}}$ von keiner niedrigern Ordnung des Unendlichkleinen als $\frac{1}{r^{n-1}}$, und da Q, wie wir oben gesehen haben, von der Ordnung $\frac{1}{r^{n+m-2}}$ ist, so sind auch Π' und dessen Differentialkoeffizienten wenigstens von keiner niedrigern Ordnung; daher ist endlich $\mathfrak{Q}$ wenigstens von keiner niedrigern Ordnung als $\int^{\infty} \frac{dr}{r^{n+m-2}}$, also für ein

unendlich wachsendes r von einer verschwindenden Ordnung, sobald $n+m>3$ ist. Für $m=0$ ist $P=1$, und (für ein sehr grosses A) nahezu $Q=\frac{1}{n-2}\,\frac{1}{r^{n-2}}=\Pi'$, $\mathfrak{Q}=\frac{1}{r^{n-2}}\int d\sigma$. Also hat überhaupt für $n>2$ das Integral $\mathfrak{Q}$ einen endlichen Wert, wenn nur A gross genug ist, dass P_1 für $A_1 \overline{\overline{>}} A$ nicht verschwinden kann; hiebei ist freilich der Einfluss, den das Hineinfallen der Gegend, wo $r=0$ ist, in die Totalität des Integrals auf dessen Wert haben kann, nicht berücksichtigt. Umschreibt man mit dem unendlich kleinen Radius ϱ um das Zentrum $(a, b, \ldots)$ eine Polysphäre, so kann man innerhalb derselben Π, Π', $\frac{\partial \Pi}{\partial x}$, etc. als konstant ansehen. Dann ist z. B.

$$\int^{n} \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x}\, dx\, dy\, dz \ldots [x^2+y^2+\cdots<\varrho^2] = \int^{n-1}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) dy\, dz \cdots = 0,$$

weil $\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)=\frac{1}{\varrho^{n-2}}-\frac{1}{\varrho^{n-2}}=0$ ist, oder auch, wenn man will, weil das vorliegende Integral $=\varrho\int\lambda\, d\sigma=0$ ist. Wenn wir also auch die um die Lösung $(a, b, \ldots)$ mit dem unendlich kleinen Radius ϱ beschriebenen Polysphäre, mag sie in die Totalität des Integrals $\mathfrak{P}$ oder die des $\mathfrak{Q}$ hineinfallen, davon ausschliessen, so wird dadurch der Wert des betreffenden Integrals nicht geändert. Wir können nun diese Integrale auf zwei Arten verwandeln.

1. Es ist

$$\int \frac{\partial \Pi}{\partial x}\,\frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x}\, dx = \left(\frac{1}{r^{n-2}}\,\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) - \int \frac{1}{r^{n-2}}\,\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}\, dx,$$

wo die Klammern den Unterschied zwischen dem End- und Anfangswert anzeigen. Da nun das $(n-1)$-fache Element $dy\, dz \ldots$ durch $\lambda\, d\omega$ ersetzt werden kann, wenn es einer Stelle des gegebenen quadratischen Kontinuums (A) entspricht, wo $d\omega$ das Element dieses Grenzkontinuums, und $\lambda, \mu, \ldots$ die Richtungskosinus der entsprechenden Normale bezeichnen, so ist, wenn abkürzend $D=\lambda\frac{\partial}{\partial x}+\mu\frac{\partial}{\partial y}+\cdots$ gesetzt, und die Gleichungen: Diffpar. $\Pi=0$, Diffpar. $\Pi'=0$, berücksichtigt werden,

$$\mathfrak{P}=\int \frac{D\Pi}{r^{n-2}}\, d\omega, \qquad \mathfrak{Q}=-\int \frac{D\Pi'}{r^{n-2}}\, d\omega.$$

Im letzten Ausdruck ist das auf die unendlich weit entfernte Grenze bezügliche mit positivem Vorzeichen zu versehende Integral von derselben Gestalt weggelassen worden. Dann für $m>0$ ist $D\Pi'$ wenigstens von derselben Ordnung mit Π' oder Q, also von der Ordnung $\frac{1}{r^{n+m-3}}$, und da $d\omega=r^{n-1}\, d\sigma$ gesetzt werden kann, so ist das

fragliche Integral wenigstens von der Ordnung $\frac{1}{r^{n+m-3}}$ und verschwindet, wenn $n \gtreqless 3$ ist. Für $m = 0$ ist Π' von der Ordnung $\frac{1}{r^{n-2}}$, daher $D\Pi'$ von der Ordnung $\frac{1}{r^{n-1}}$, also das fragliche Integral von der Ordnung $\frac{1}{r^{n-2}}$ und verschwindet mithin ebenfalls für $n \gtreqless 3$.

Die Operation D bezeichnet die Variation einer Funktion längs der Normale des Elements $d\omega$, dividiert durch das betreffende Element der Normale. Sie ist daher gleich $2p\frac{\partial}{\partial A}$, wo p den Abstand des Zentrums vom linearen Tangentialkontinuum in $d\omega$ bezeichnet, und von den Axenquadraten $A_2, A_3, \ldots A_n$ der übrigen konfokalen Kontinuen unabhängig; also $D\Pi = (DP) \,.\, P_2 P_3 \ldots P_n$ und $D\Pi' = (DQ) \,.\, P_2 P_3 \ldots P_n$. Ferner ist $p = R : \sqrt{(A - A_2)(A - A_3) \ldots (A - A_n)}$; folglich, wenn wir abkürzend $q = \sqrt{(A - A_2)(A - A_3) \ldots (A - A_n)}$ setzen, $D = \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \varphi}$. Da nun in den vorliegenden Integralen A als konstant gilt, so haben wir

$$\mathfrak{P} = \frac{\partial P}{\partial \varphi} \int \frac{P_2 P_3 \ldots P_n}{q r^{n-2}} d\omega, \qquad \mathfrak{Q} = -\frac{\partial Q}{\partial \varphi} \int \frac{P_2 P_3 \ldots P_n}{q r^{n-2}} d\omega,$$

und vermöge der Gleichung (2)

$$P\mathfrak{Q} + Q\mathfrak{P} = \int \frac{P_2 P_3 \ldots P_n}{q r^n} d\omega. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Man kann $d\omega$ durch $\frac{dy\, dz \ldots}{\lambda} = \frac{A}{px} dy\, dz \cdots = \frac{Aq}{Rx} dy\, dz \ldots$ ersetzen. Verwandelt man durch $x = \sqrt{A} \,.\, x'$, $y = \sqrt{B} \,.\, y'$, etc. das quadratische Kontinuum in ein polysphärisches vom Radius 1, dessen Element wir gewöhnlich mit $d\sigma$ bezeichnen, so wird $dy'\, dz' \cdots = x' d\sigma$, und $\frac{d\omega}{q} = d\sigma$.

2. Die andere Verwandlung ist

$$\int \frac{\partial \Pi}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x} dx = \left(\Pi \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x}\right) - \int \Pi \frac{\partial^2 \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x^2} dx.$$

Bevor wir nun diese Gleichung mit $dy\, dz \ldots$ multiplizieren und in Beziehung auf $x, y, z, \ldots$ summieren, wollen wir die Folgen der Ausschliessung der Polysphäre ϱ um $(a, b, \ldots)$ beurteilen. Im letzten Gliede rechts ist immer $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \cdots\right)\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) = 0$, so lange r nicht verschwindet. Wenn also die Polysphäre ϱ ausgeschlossen wird, so ist auf der rechten Seite in der Summe das zweite Glied wegzulassen. Hinsichtlich des ersten Gliedes rechts kann die durch Wegnahme der Polysphäre ϱ entstandene Lücke durch

$$\Pi \int D \frac{1}{r^{n-2}} \cdot \varrho^{n-1}\, d\sigma = \Pi \int \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{1}{\varrho^{n-2}}\right) \cdot \varrho^{n-1}\, d\sigma = -(n-2)\, \Pi \int d\sigma = -\frac{4\pi^{\frac{n}{2}}\, \Pi}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}$$

ausgedrückt werden, wenn für Π der der Lösung $(a, b, \ldots)$ entsprechende Wert gesetzt wird. Steht Π' an der Stelle von Π, so ist das der unendlich weit entfernten Grenze entsprechende Integral von der Ordnung $\int \Pi'\, d\sigma$, verschwindet also. Durch das Gesagte wird die Richtigkeit der folgenden Gleichungen hinreichend begründet sein.

Wenn $\frac{a^2}{A} + \frac{b^2}{B} + \cdots < 1$ ist, so ist

$$\mathfrak{P} = P \int \frac{P_2 P_3 \ldots P_n}{q} \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial \varphi}\, d\omega + \frac{4\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} [P_1 P_2 \ldots P_n],$$

$$\mathfrak{Q} = -Q \int \frac{P_2 P_3 \ldots P_n}{q} \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial \varphi}\, d\omega:$$

wenn dagegen $\frac{a^2}{A} + \frac{b^2}{B} + \cdots > 1$ ist, so ist

$$\mathfrak{P} = P \int \frac{P_2 P_3 \ldots P_n}{q} \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial \varphi}\, d\omega,$$

$$\mathfrak{Q} = -Q \int \frac{P_2 P_3 \ldots P_n}{q} \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial \varphi}\, d\omega + \frac{4\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} [Q_1 P_2 P_3 \ldots P_n],$$

wo die in Klammern geschlossenen Produkte sich auf die Lösung $(a, b, \ldots)$ beziehen. Diese Gleichungen geben im ersten Falle

$$P\mathfrak{Q} + Q\mathfrak{P} = \frac{4\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} Q [P_1 P_2 P_3 \ldots P_n],$$

im zweiten

$$= \frac{4\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} P [Q_1 P_2 P_3 \ldots P_n].$$

Hält man damit die Formel (4) zusammen, so findet man

$$\int \frac{P_2 P_3 \ldots P_n}{r^{n-2}} \frac{d\omega}{q} = \frac{4\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} Q\,[P_1 P_2 P_3 \ldots P_n] \text{ oder } \frac{4\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} P\,[Q_1 P_2 P_3 \ldots P_n], \quad (5)$$

je nachdem die Lösung $(a, b, \ldots)$ innerhalb oder ausserhalb des quadratischen Kontinuums (A) liegt. Beide Formeln fallen zusammen, indem $P_1 = P$, $Q_1 = Q$ wird, wenn die Lösung dem Kontinuum selbst angehört.

Die linke Seite dieser Formel (5) stellt das Potential einer auf dem Kontinuum (A) verteilten Masse dar, wenn überall die Dichtigkeit $k = P_2 P_3 \ldots P_n : q$ ist.

Sind P, P' zwei sich nicht nur durch einen konstanten Faktor unterscheidende Funktionen, welche die im Eingang dieses § erwähnten Bedingungen erfüllen, und wendet man das soeben gebrauchte Verfahren auf das Integral

$$\int^n \left(\frac{\partial \,.\, P_1 P_2 \ldots P_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial \,.\, P'_1 P'_2 \ldots P'_n}{\partial x} + \text{etc.}\right) dx\, dy\, dz \ldots \quad \left[\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots < 1\right]$$

an, so findet man

$$\left(P \frac{\partial P'}{\partial \varphi} - P' \frac{\partial P}{\partial \varphi}\right) \int P_2 P_3 \ldots P_n \,.\, P'_2 P'_3 \ldots P'_n \frac{d\omega}{q} = 0.$$

Der vorgesetzte Faktor kann nicht verschwinden, wenn nicht $P' : P$ konstant ist; daher muss

$$\int P_2 P_3 \ldots P_n \,.\, P'_2 P'_3 \ldots P'_n \frac{d\omega}{q} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

sein. — Da auch $P' = 1$ zu dieser Klasse der Funktionen gehört, so ist für eine Funktion P, deren Grad die Null übersteigt,

$$\int P_2 P_3 \ldots P_n \frac{d\omega}{q} = 0 \quad . \; . \; . \quad (7), \qquad \text{dagegen} \int \frac{d\omega}{q} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Hätte eine Funktion P imaginäre Koeffizienten, so gäbe es auch eine Funktion P' mit den konjugierten Koeffizienten; und wenn $P_2 P_3 \ldots P_n = u + v\sqrt{-1}$ gesetzt würde, wo u, v reell sein sollen, so wäre $P'_2 P'_3 \ldots P'_n = u - v\sqrt{-1}$, und man hätte $\int \frac{u^2 + v^2}{q} d\omega = 0$. Diess ist nicht möglich, weil q immer positiv ist. Die Funktionen P sind also alle reell.

Die obigen Ausdrücke für das Potential eines quadratischen Kontinuums (A) sind unter der Voraussetzung bewiesen worden, dass P_1 für $A_1 \gtreqless A$ nicht verschwinde. Könnte

P_1 für ein kleineres A_1, das immer noch einem Kontinuum erster Gattung angehörte, verschwinden, so denke man sich das quadratische Kontinuum, welches dieses zunächst umschliesst; für dieses müsste dann Q einen sehr grossen Wert haben; eine innere Lösung $(a, b, \ldots)$ wird immer anzugeben sein, für welche keine der Funktionen P_1, P_2, $\ldots P_n$ einen sehr kleinen Wert annimmt, so dass das Produkt $Q P_1 P_2 \ldots P_n$ immer noch sehr gross wird; dann haben wir aber für das Potential einen sehr grossen Wert, was nicht sein kann, da die Dichtigkeit auf dem ganzen quadratischen Kontinuum nirgends sehr gross werden kann. Wir schliessen hieraus, dass die Funktion P_1 nie verschwindet, dass also Q_1 nie unendlich gross wird. Die Formeln (5) sind daher allgemein gültig.

§ 51. *Anwendung des Vorigen auf die Bestimmung des Potentials der von einem quadratischen Kontinuum erster Gattung umschlossenen homogenen Totalität.*

Die Funktion P vom niedrigsten Grade ist $P = 1$; für diese geben die Gleichungen (5) und (3) des vorigen §:

$$\int \frac{1}{r^{n-2}} \frac{d\omega}{q} = \frac{4\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} \int^{\infty} \frac{dA_1}{2R_1},$$

wo rechts als untere Grenze des Integrals $A_1 = A$ oder der der Lösung $(a, b, \ldots)$ entsprechende Wert von A_1 zu nehmen ist, je nachdem diese Lösung innerhalb oder ausserhalb des quadratischen Kontinuums (A) liegt.

Bedeutet h eine unendlich kleine Zahl, und werden alle linearen Dimensionen des gegebenen quadratischen Kontinuums (A) im Verhältnisse $1 + h$ vergrössert, so dass ein mit jenem konzentrisches und ähnlich liegendes Kontinuum entsteht, so ist ph die Dicke der zwischen beiden Kontinuen enthaltenen Schicht, und wenn man diese sich homogen und von der Dichtigkeit 1 denkt, $h \cdot p\, d\omega = hR \cdot \frac{d\omega}{q}$ das Massenelement. Das Potential dieser Schicht ist also

$$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} Rh \cdot \int^{\infty} \frac{dA_1}{R_1}$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} h\sqrt{ABC\ldots J} \cdot \int^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(A+u)(B+u)\ldots(J+u)}},$$

wo das Integral entweder bei dem positiven Werte von u, welcher der Gleichung $\frac{a^2}{A+u} + \frac{b^2}{B+u} + \cdots = 1$ genügt, oder, wenn es keinen solchen giebt, bei $u = 0$ anfängt.

Verkleinern wir die linearen Dimensionen des gegebenen quadratischen Kontinuums in den Verhältnissen θ und $\theta + d\theta$ und suchen das Potential dV der zwischen den entsprechenden Kontinuen enthaltenen Schicht, so ist $h = \frac{d\theta}{\theta}$, die Axenquadrate $A, B, \ldots$ und die Variable u sind durch $\theta^2 A$, $\theta^2 B, \ldots$, $\theta^2 u$ zu ersetzen, und wir bekommen

$$dV = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}\, \theta\, d\theta \,.\, \sqrt{ABC\ldots J} \int_h^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(A+u)(B+u)\ldots(J+u)}},$$

wo als untere Integrationsgrenze entweder der positive Wert h von u, für welchen $\frac{a^2}{A+u} + \frac{b^2}{B+u} + \cdots = \theta^2$ ist, oder, wenn kein solcher existiert, $u = 0$ zu nehmen ist. Ist $\theta = 0$, so muss h positiv unendlich gross sein. Wie θ wächst, wird h immer kleiner; endlich erreicht θ einen Wert ε, für den h Null wird. In diesem Intervall ist das Integral $\int_h^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(A+u)(B+u)\ldots}} = \Theta$ eine Funktion von θ; ihr Wert für $\theta = \varepsilon$ oder $h = 0$ sei E. So wie aber θ über ε hinaus wächst, muss man dem Integral den konstanten Wert E geben. Es ist aber

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \theta} = \frac{\partial \Theta}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial \theta} = - \frac{\frac{\partial h}{\partial \theta}}{\sqrt{(A+h)(B+h)\ldots}};$$

daher

$$\int_{\theta=0}^{\theta<\varepsilon} \theta\, \Theta\, d\theta = \frac{1}{2}\theta^2 \Theta + \frac{1}{2}\int_{\theta'=0}^{\theta'=\theta} \frac{\theta'^2 \frac{\partial h'}{\partial \theta'}\, d\theta'}{\sqrt{(A+h')(B+h')\ldots}} = \frac{1}{2}\theta^2\Theta - \frac{1}{2}\int_{h'=h}^{h'=\infty} \frac{\theta'^2\, dh'}{\sqrt{(A+h')(B+h')\ldots}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{u=h}^{u=\infty} \frac{\theta^2 - \frac{a^2}{A+u} - \frac{b^2}{B+u} - \cdots}{\sqrt{(A+u)(B+u)\ldots}}\, du.$$

Ist die obere Integrationsgrenze ein Wert von θ, welcher ε übertrifft, so hat man

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\varepsilon} \Theta\, \theta\, d\theta + \int_{\theta=\varepsilon} E\, \theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{u=0}^{u=\infty} \frac{\varepsilon^2 - \Sigma \frac{a^2}{A+u}}{\sqrt{\Pi(A+u)}}\, du + \frac{\theta^2-\varepsilon^2}{2}\int_{u=0}^{u=\infty} \frac{du}{\sqrt{\Pi(A+u)}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{u=0}^{u=\infty} \frac{\theta^2 - \Sigma\frac{a^2}{A+u}}{\sqrt{\Pi(A+u)}}\, du.$$

Erstreckt sich die Integration von $\theta = 0$ bis $\theta = 1$, so hat man endlich

$$V = \int^n \frac{dx\, dy \ldots dw}{\left[(x-a)^2 + (y-b)^2 + \cdots + (w-i)^2\right]^{\frac{n}{2}-1}} \quad \left[\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots + \frac{\omega^2}{J} < 1\right]$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} \sqrt{ABC \ldots J} \int^{\infty} \frac{1 - \left(\frac{a^2}{A+u} + \frac{b^2}{B+u} + \cdots + \frac{i^2}{J+u}\right)}{\sqrt{(A+u)(B+u) \ldots (J+u)}}\, du,$$

wo als untere Integrationsgrenze der Wert von u, für welchen der Zähler des Bruchs verschwindet, wenn jener positiv ist, sonst aber der Nullwert zu nehmen ist. — Dieses Resultat stimmt mit § 49 (4) überein.

§ 52. *Ueber die algebraischen Lösungen der Gleichung* $\frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} = MP$.

Es scheint etwas schwer, mit Sicherheit die Zahl der verschiedenen Formen der ganzen Funktion f anzugeben, welche der identischen Gleichung (1) in § 50 genügt, wenn ihr Grad θ und die η Axenquadrate, aus denen das Produkt K besteht, gegeben sind. Da die Koeffizienten der höchsten Potenzen in f und M bekannt sind, so gehen, wie wir schon gesehen haben, aus (1) nur $\theta + n - 2$ algebraische Gleichungen zweiten Grades zwischen den an Zahl gleichkommenden übrigen Koeffizienten hervor. Das System derselben hat also höchstens $2^{\theta+n-2}$ Lösungen. Da aber die Gleichungen eine sehr spezielle Beschaffenheit haben, so kann man wohl vermuten, dass diese Zahl zu hoch sei, und braucht nur für die ersten ganzen Werte von θ, η die Rechnung auszuführen, um diese Vermutung bestätigt zu finden.

Um dem wahren Sachverhalt näher auf die Spur zu kommen, wollen wir die unbekannte Funktion M dadurch eliminieren, dass wir für die Variable nach und nach alle ihre Werte substituieren, durch welche $f = 0$ wird und deren Zahl offenbar θ ist. Sie treten als die Unbekannten des Systems an die Stelle der an Zahl gleichen unbekannten Koeffizienten der Funktion f; und da die Zahl der Gleichungen, die wir so erhalten, ebenfalls θ ist, so reichen sie zur Bestimmung der Funktion f gerade hin, und dann ergiebt sich die andere unbekannte Funktion M aus der ursprünglichen Gleichung (1) von selbst.

Es sei also $dA = dB = dC = \cdots = du$, $f(u) = (u-\alpha)(u-\beta) \ldots (u-\zeta)$, $R^2 = KL = H(u)$, $3K'L + KL' = 4J(u)$, wo H, J resp. als Zeichen von ganzen Funktionen n-ten und $(n-1)$-ten Grades gelten mögen. Dann ist

$$H\alpha \,.\, f''\alpha + 2J\alpha \,.\, f'\alpha = 0, \text{ etc. } (\theta \text{ Gleichungen}). \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Diese Gleichungen sind in Beziehung auf die Unbekannten $\alpha, \beta, \dots \zeta$ vom Grade $\theta + n - 2$. Wenn wir aber von der ersten Gleichung des Systems nach und nach alle übrigen subtrahieren, so können wir resp. mit $\alpha - \beta$, $\alpha - \gamma, \dots, \alpha - \zeta$ dividieren, wodurch der Grad um eine Einheit hinuntergeht; subtrahieren wir dann wieder von der ersten dieser Gleichungen nach und nach alle übrigen, so können wir mit $\beta - \gamma$, $\beta - \delta, \dots$ dividieren, u. s. f.; und zuletzt haben wir eine Reihe von θ Gleichungen, deren Grade resp. $\theta + n - 2$, $\theta + n - 3, \dots n, n - 1$ sind. Die Endgleichung für eine einzige Unbekannte ist also höchstens vom Grade $(\theta + n - 2)(\theta + n - 3) \dots n(n-1)$. Da aber hiebei alle durch Permutation einer und derselben Gruppe von Werten der Unbekannten $\alpha, \beta, \gamma \dots$ entstandenen Lösungen des Systems als unter sich verschiedene aufgezählt sind, obgleich sie nur eine und dieselbe Funktion f liefern, so reduziert sich die Zahl der Funktionen f, welche dem Systeme (1) genügen, auf höchstens $\binom{n + \theta - 2}{\theta}$. Dass dieses wirklich die wahre Zahl sei, geht zwar aus dieser Betrachtung nicht mit Sicherheit hervor; aber die für bestimmte Werte von η und θ angestellten Versuche bringen es zur höchsten Wahrscheinlichkeit.

Um die Form der Gleichungen, welche das soeben beschriebene Verfahren liefert, zu erkennen, setzen wir zuerst $f u = (u - \alpha) \varphi u$. Dadurch verwandelt sich die erste Gleichung des Systems (9) in

$$H\alpha \, . \, \varphi'\alpha + J\alpha \, . \, \varphi\alpha = 0.$$

Da $\frac{\varphi'\alpha}{\varphi\alpha} = \frac{1}{\alpha - \beta} + \frac{1}{\alpha - \gamma} + \dots + \frac{1}{\alpha - \zeta}$ und $\varphi\beta = 0$, $\varphi\gamma = 0$, etc. ist, so kann diese erste Gleichung (9) auch so geschrieben werden:

$$\Sigma \frac{H\alpha \, . \, \varphi'\alpha - H\beta \, . \, \varphi\beta}{\alpha - \beta} + \Sigma J\alpha \, . \, \varphi\alpha = 0,$$

wo die letzte Summe sich auf alle θ unbekannten Wurzeln der Gleichung $f = 0$ und die erste auf deren Kombinationen zu zweien erstreckt. Ist nun

$$f u = u^\theta + k_1 u^{\theta - 1} + k_2 u^{\theta - 2} + \dots + k_{\theta - 1} u + k_\theta,$$

so ist

$$\varphi u = u^{\theta - 1} + \left. \begin{array}{l} \alpha \\ + k_1 \end{array} \right| u^{\theta - 2} + \left. \begin{array}{l} \alpha^2 \\ + k_1 \alpha \\ + k_2 \end{array} \right| u^{\theta - 3} + \dots + \begin{array}{l} \alpha^{\theta - 1} \\ + k_1 \alpha^{\theta - 2} \\ + k_2 \alpha^{\theta - 3} \\ \dots\dots \\ + k_{\theta - 1} \end{array};$$

daher wird, wenn man abkürzend

$$S_i = \Sigma' \frac{\alpha^i \Pi \alpha - \beta^i \Pi \beta}{\alpha - \beta} + \Sigma \alpha^i J \alpha$$

setzt, die erste Gleichung (9)

$$S_{\theta-1} + (\alpha + k_1) S_{\theta-2} + (\alpha^2 + k_1 \alpha + k_2) S_{\theta-3} + \cdots + (\alpha^{\theta-1} + k_1 \alpha^{\theta-2} + \cdots + k_{\theta-1}) S_0 = 0,$$

und die übrigen Gleichungen des Systems (9) entstehen aus dieser, indem man nach und nach α durch $\beta, \gamma, \ldots \zeta$ ersetzt. Das System (9) ist also zu einem Systeme von θ linearen Gleichungen in Beziehung auf die $\theta - 1$ unbekannten Verhältnisse der Grössen S geworden. Wenn also diese Grössen nicht verschwinden, so muss die Determinante ihrer Koeffizienten es thun. Diese reduziert sich aber auf die Determinante $\Sigma \pm \alpha^{\theta-1} \beta^{\theta-2} \gamma^{\theta-3} \ldots \varepsilon^1 \zeta^0 = \Pi(\alpha - \beta)$. Man hat also nur die Wahl, entweder alle Grössen S als verschwindend, oder in der Gleichung $f = 0$ gleiche Wurzeln anzunehmen. Das letztere als etwas Spezielles setzen wir einstweilen bei Seite und entscheiden uns für das Erstere, dem allgemeinen Fall Entsprechende. Wir haben dann die θ Gleichungen $S_0, S_1, S_2, \ldots S_{\theta-1} = 0$; und wenn diese Statt haben, so ist auch das System (9) erfüllt. Man bemerke, dass diese Gleichungen, deren Grade resp. $n - 1, n, n + 1, \ldots, n + \theta - 2$ sind, in Beziehung alle Wurzeln $\alpha, \beta, \ldots \zeta$ symmetrisch sind und daher rational und ganz mittelst der Koeffizienten $k_1, k_2, \ldots k_\theta$ ausgedrückt werden können.

Das Produkt K kann auf $\binom{n}{\eta}$ verschiedene Arten aus den Axenquadraten $A, B, \ldots$ zusammengesetzt werden. Wenn also wiederum der Grad der ganzen und rationalen Funktion PP in Beziehung auf A mit $m = 2\theta + \eta$ bezeichnet wird, so ist

$$\Sigma \binom{n + \theta - 2}{\theta} \binom{n}{m - 2\theta} = \Sigma (-1)^\theta \binom{-n + 1}{\theta} \binom{n}{m - 2\theta}$$

die Zahl der einem gegebenen Grade entsprechenden Funktionen P. Sie ist also der Koeffizient von x^m in der Entwicklung von $(1 - x^2)^{-n+1} (1 + x)^n$ nach steigenden Potenzen von x. Dieser Ausdruck reduziert sich auf $(1 + x)(1 - x)^{-n+1}$. Die fragliche Zahl ist also gleich

$$\binom{-n + 1}{m} (-1)^m + \binom{-n + 1}{m - 1} (-1)^{m-1} = \binom{m + n - 2}{n - 2} + \binom{m + n - 3}{n - 2}.$$

§ 53. *Darstellung gewisser arbiträrer Funktionen von $n - 1$ unabhängigen Variabeln.*

Es sei φ eine beliebige Funktion, deren Werte für alle auf dem quadratischen Kontinuum $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots = 1$ befindlichen Lösungen bekannt sind, also, wenn man will,

eine bekannte Funktion der $n-1$ konfokalen Variabeln $A_2, A_3, \ldots A_n$. Man bestimme nach dem im vorigen § beschriebenen Verfahren nach und nach für $m = 0, 1, 2, 3 \ldots$ alle algebraischen Funktionen P, welche der Gleichung $\frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} = MP$ genügen. Denkt man sich φ von der Form $\Sigma\, k\, P_2\, P_3 \ldots P_n$, wo k einen konstanten Koeffizienten bezeichnet, und die Summe sich über alle Formen der Funktion P erstreckt, wobei wir ferner annehmen, dass für $m = 0, 1, 2, \ldots.$ die Koeffizienten k eine abnehmende Reihe bilden, welche schneller fällt als eine geometrische: so kann man jeden Koeffizienten k durch ein über das ganze quadratische Kontinuum (A) sich erstreckendes Integral ausdrücken. Vermöge der Gleichung (6) in § 50 ist nämlich

$$\int \varphi \cdot P_2\, P_3 \ldots P_n \frac{d\omega}{q} = k \int (P_2\, P_3 \ldots P_n)^2 \frac{d\omega}{q} \cdot$$

Da das Integral rechts lauter positive Elemente enthält, in denjenigen links hingegen das Vorzeichen von $P_2\, P_3 \ldots P_n$ desto häufiger wechseln wird, je höher der Grad m von P in Beziehung auf $\sqrt{A}$ ist, so wird im allgemeinen höchst wahrscheinlich der häufigste Fall der sein, dass das Integral links ungefähr nach geometrischer Progression immer kleiner wird, je höher m steigt. Ist k_0 das konstante Glied der angenommenen Entwicklung von φ, so hat man

$$\int \varphi \frac{d\omega}{q} = k_0 \int \frac{d\omega}{q} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot k_0 .$$

Ich halte es für sehr wahrscheinlich, dass jede Funktion, deren Werte überall auf dem quadratischen Kontinuum (A) nach Belieben gegeben sind, unter die Form $\Sigma\, k\, P_2\, P_3 \ldots P_n$ gebracht werden kann; allein die Schwierigkeit des Beweises erscheint mir fast unübersteiglich.

§ 54. *Reduktion einiger vielfachen Integrale auf einfache.*

Bei der Bestimmung des Potentials der von einem quadratischen Kontinuum umschlossenen homogenen Totalität in § 49 kam die Reduktion eines gewissen $(n-1)$-fachen Integrals auf ein einfaches vor. Hier sollen nun einige vielfache Integrale von allgemeinerer Beschaffenheit, welche jenes als speziellen Fall enthalten, reduziert werden.

I. Aus der Theorie der Eulerschen Integrale folgt

$$\int^{(n-1)} x^{\alpha-1}\, y^{\beta-1}\, z^{\gamma-1} \ldots w^{\varepsilon-1}\, dy\, dz \ldots dw = \frac{\Gamma(\alpha)\, \Gamma(\beta)\, \Gamma(\gamma) \ldots \Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\varepsilon)} \cdot$$
$$\begin{pmatrix} x > 0,\ y > 0, \ldots w > 0 \\ x + y + z + \cdots + w = 1 \end{pmatrix}$$

Um die, wenn ich nicht irre, von Catalan gegebene Formel zu beweisen, kann man mit $\int_0^\infty e^{-(x+y+\cdots+w)u}\, u^{\alpha+\beta+\cdots+\varepsilon-1}\, du = \Gamma(\alpha+\beta+\cdots+\varepsilon)$ multiplizieren, $ux, uy, \ldots uw$ in $x, y, \ldots w$ umsetzen, und endlich, da $x+y+\cdots+w=u$ sein muss, du durch dx ersetzen; das Integral zerfällt dann in ein Produkt von n einfachen Integralen.

Setzen wir in der vorliegenden Formel $x=\lambda^2$, $y=\mu^2, \ldots w=\overline{\omega}^2$, so stellt die Bedingung $\lambda^2+\mu^2+\cdots+\overline{\omega}^2=1$ ein polysphärisches Kontinuum dar; das $(n-1)$-fache Element $d\mu\, d\nu \ldots d\overline{\omega}$ ist daher eine Projektion des Elements $d\sigma$ dieses Kontinuums und hat den Wert $\lambda\, d\sigma$. Wir bekommen so:

$$\int \lambda^{2\alpha-1}\mu^{2\beta-1}\nu^{2\gamma-1}\ldots\omega^{2\varepsilon-1}\, d\sigma = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\ldots\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\alpha+\beta+\cdots+\varepsilon)}\,. \quad \ldots \quad (1)$$
$$\begin{pmatrix}\lambda>0,\ \mu>0, \ldots \overline{\omega}>0, \\ \lambda^2+\mu^2+\cdots+\overline{\omega}^2=1\end{pmatrix}$$

II. Wird der Kürze wegen $\varDelta = \frac{\lambda^2}{A}+\frac{\mu^2}{B}+\cdots+\frac{\omega^2}{J}$ gesetzt und bedeutet ψ eine beliebige Funktion von n Variabeln, so soll das Integral

$$\Psi = \int \psi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\varDelta}}, \frac{\mu}{\sqrt{\varDelta}}, \ldots \frac{\overline{\omega}}{\sqrt{\varDelta}}\right)\frac{d\sigma}{\varDelta^{\frac{n}{2}}}$$

verwandelt werden. Setzen wir für diesen Zweck $\varrho^2\varDelta=1$, so kann das Integral auch unter der Form

$$\Psi = \int\left(\int_0^\varrho \frac{1}{r^{n-1}}\,\frac{\partial\,.\,r^n\psi(r\lambda, r\mu, \ldots r\overline{\omega})}{\partial r}\, r^{n-1}\, dr\right)d\sigma$$
$$= \int^n \frac{1}{r^{n-1}}\,\frac{\partial\,.\,r^n\psi(r\lambda, r\mu, \ldots r\overline{\omega})}{\partial r}\, dx\, dy\, dz \ldots dw$$
$$\begin{pmatrix} r^2 = x^2+y^2+\cdots+w^2,\ x=r\lambda,\ \text{etc.} \\ \frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\cdots+\frac{w^2}{J}<1 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Bedeuten $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ die ersten abgeleiteten Funktionen von ψ, so ist

$$\frac{1}{r^{n-1}}\,\frac{\partial\,.\,r^n\psi}{\partial r} = n\psi + x\psi_1 + y\psi_2 + \cdots + w\psi_n,$$

und, wenn $x=x'\sqrt{A}$, $y=y'\sqrt{B}, \ldots$, $x'=r'\lambda'$, $y'=r'\mu', \ldots$ angenommen wird,

$$\frac{1}{r^{n-1}}\,\frac{\partial\,.\,r^n\psi}{\partial r} = n\psi + r'\left(\lambda'\sqrt{A}\,.\,\psi_1 + \mu'\sqrt{B}\,.\,\psi_2 + \cdots\right) = \frac{1}{r'^{n-1}}\,\frac{\partial\,.\,r'^n\psi\left(r'\lambda'\sqrt{A}, r'\mu'\sqrt{B}, \ldots\right)}{\partial r'}.$$

Man erhält also

$$\Psi = \sqrt{ABC\ldots J}\int^{r'^n}\frac{1}{r'^{n-1}}\frac{\partial\,.\,r'^n\psi(r'\lambda'\sqrt{A},\,r'\mu'\sqrt{B},\ldots)}{\partial r'}\,dx'\,dy'\ldots dw',$$
$$(r'^2 = x'^2+y'^2+\cdots+w'^2<1)$$

oder, mit Weglassung der Accente und Ersetzung von $dx\,dy\,dz\ldots dw$ durch $r^{n-1}dr\,d\sigma$,

$$\Psi = \sqrt{ABC\ldots J}\int\left(\int_0^1\frac{\partial\,.\,r^n\psi(r\lambda\sqrt{A},\ldots)}{\partial r}\,dr\right)d\sigma;$$

also endlich

$$\int\psi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\varDelta}},\frac{\mu}{\sqrt{\varDelta}},\cdots\frac{\overline{\omega}}{\sqrt{\varDelta}}\right)\frac{d\sigma}{\varDelta^{\frac{n}{2}}} = \sqrt{AB\ldots J}\int\psi\left(\lambda\sqrt{A},\,\mu\sqrt{B},\ldots\overline{\omega}\sqrt{J}\right)d\sigma, \quad . \quad (2)$$

wo $\varDelta = \frac{\lambda^2}{A}+\frac{\mu^2}{B}+\cdots+\frac{\overline{\omega}^2}{J}$, und beide Integrale sich nur über den Teil des polysphärischen Kontinuums $\lambda^2+\mu^2+\cdots+\overline{\omega}^2=1$ erstrecken, wo sämtliche Variabeln λ, $\mu,\ldots\overline{\omega}$ positiv sind.

Setzt man $\psi=1$ und lässt $\frac{1}{A},\frac{1}{B},\ldots$ in $1+\frac{u}{A},\ 1+\frac{u}{B},\ldots$ übergehen, so verwandelt sich (2) in

$$\int\frac{d\sigma}{(1+u\varDelta)^{\frac{n}{2}}} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{u}{A}\right)\left(1+\frac{u}{B}\right)\cdots\left(1+\frac{u}{J}\right)}},$$

wenn das Integral links sich über das ganze polysphärische Kontinuum erstreckt. Je nachdem man auf beiden Seiten nach den steigenden oder nach den fallenden Potenzen von u entwickelt, enthält man finite Ausdrücke für $\int\varDelta\,d\sigma$, $\int\varDelta^2\,d\sigma$, $\int\varDelta^3\,d\sigma$, etc., oder für $\int\frac{d\sigma}{\varDelta^{\frac{n}{2}}}$, $\int\frac{d\sigma}{\varDelta^{\frac{n}{2}+1}}$, $\int\frac{d\sigma}{\varDelta^{\frac{n}{2}+2}}$, etc. Den Wert für $\int\frac{d\sigma}{\varDelta^i}$, wenn i irgend eine zwischen 0 und $\frac{n}{2}$ liegende Grösse bezeichnet, werden wir bald auf ein einfaches Integral zurückführen.

III. Um das auf alle Lösungen mit positiven Werten $\lambda,\mu,\ldots$ eines polysphärischen Kontinuums vom Radius 1 sich erstreckende Integral

$$S = \int\int_0^1 f\left(\frac{1-r^2}{r^2\varDelta}\right)\psi(r\lambda,\,r\mu,\ldots r\omega)\,r^{n-3}\,dr\,\frac{d\sigma}{\varDelta}$$

zu verwandeln, setzen wir $\frac{1-r^2}{r^2\varDelta}=u$, also $r=(1+u\varDelta)^{-1/2}$ und erhalten

$$S = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int \psi \left(\frac{\lambda}{\sqrt{1 + u\Delta}}, \frac{\mu}{\sqrt{1 + u\Delta}}, \ldots \right) \frac{d\sigma}{(1 + u\Delta)^{\frac{n}{2}}} \cdot f(u)\, du.$$

Durch Anwendung der Gleichung (2) ergiebt sich hieraus

$$S = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\int \psi \left(\frac{\lambda}{\sqrt{1 + \frac{u}{A}}}, \frac{\mu}{\sqrt{1 + \frac{u}{B}}}, \ldots \right) d\sigma \right) \frac{f(u)\, du}{\sqrt{\left(1 + \frac{u}{A}\right)\left(1 + \frac{u}{B}\right) \cdots}} \quad . \; . \; . \quad (3)$$

IV. Gehen wir zu speziellen Umwendungen dieser Formel über und setzen $\psi(x, y, \ldots w) = x^{2\alpha - 1}\, y^{2\beta - 1} \ldots w^{2\varepsilon - 1}$, so bekommen wir vermöge (1) die Gleichung

$$\int \int_0^1 f\left(\frac{1 - r^2}{r^2 \Delta} \right) r^{2(\alpha + \beta \cdots + \varepsilon) - 3}\, dr \,.\, \lambda^{2\alpha - 1}\, \mu^{2\beta - 1} \ldots .\, \overline{\omega}^{2\varepsilon - 1}\, \frac{d\sigma}{\Delta}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right)^n \frac{\Gamma(\alpha)\, \Gamma(\beta) \ldots \Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\alpha + \beta + \cdots + \varepsilon)} \int_0^\infty \frac{f(u)\, du}{\left(1 + \frac{u}{A}\right)^\alpha \left(1 + \frac{u}{B}\right)^\beta \cdots \left(1 + \frac{u}{J}\right)^\varepsilon}.$$

Die Funktion $f(u)$ unterliegt hier gewissen Bedingungen; sie muss von $u = 0$ bis $u = \infty$ kontinuierlich sein, und für ein verschwindendes u muss sich $u\, f(u)$ wie eine Potenz von u mit positiven Exponenten, für ein unendlich wachsendes u dagegen muss sich $u\, f(u) : u^{\alpha + \beta + \cdots + \varepsilon}$ wie eine solche Potenz mit negativen Exponenten verhalten. Nimmt man $f(u) = u^{i - 1}$ an, so ist links das Integral

$$\int_0^1 (1 - r^2)^{i - 1}\, r^{2(\alpha + \beta + \cdots + \varepsilon) - 2i - 1}\, dr = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(i)\, \Gamma(\alpha + \beta + \cdots + \varepsilon - i)}{\Gamma(\alpha + \beta + \cdots + \varepsilon)}.$$

Man hat also endlich

$$\int \frac{\lambda^{2\alpha - 1}\, \mu^{2\beta - 1} \ldots .\, \overline{\omega}^{2\varepsilon - 1}}{\left(\frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \cdots + \frac{\overline{\omega}^2}{J} \right)^i}\, d\sigma = \left(\frac{1}{2} \right)^{n - 1} \frac{\Gamma(\alpha)\, \Gamma(\beta) \ldots .\, \Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(i)\, \Gamma(\alpha + \beta + \cdots + \varepsilon - i)} \int_0^\infty \frac{u^{i - 1}\, du}{\left(1 + \frac{u}{A}\right)^\alpha \left(1 + \frac{u}{B}\right)^\beta \cdots}. \quad (4)$$

Diese Gleichung gilt nur für positive Werte von $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ und für $0 < i < \alpha + \beta + \cdots + \varepsilon$. Für $i = 0$ tritt die Formel (1) an deren Stelle, und für $i = \alpha + \beta + \cdots + \varepsilon$ erhält man durch Anwendung der Formel (2):

$$\int \frac{\lambda^{2\alpha - 1}\, \mu^{2\beta - 1} \ldots .\, \overline{\omega}^{2\varepsilon - 1}}{\left(\frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \cdots + \frac{\overline{\omega}^2}{J} \right)^{\alpha + \beta + \cdots + \varepsilon}}\, d\sigma = \left(\frac{1}{2} \right)^{n - 1} \frac{\Gamma(\alpha)\, \Gamma(\beta) \ldots \Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\alpha + \beta + \cdots + \varepsilon)}\, A^\alpha B^\beta \ldots J^\varepsilon.$$

Setzt man in (4) $\beta = \gamma = \cdots = \varepsilon = \frac{1}{2}$, und erstens $\alpha = \frac{1}{2}$, zweitens $\alpha = \frac{3}{2}$, so erhält man die zwei Formeln

$$\int \frac{d\sigma}{\left(\frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \cdots\right)^i} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(i)\,\Gamma\left(\frac{n}{2} - i\right)} \int_0^\infty \frac{u^{i-1}\,du}{\sqrt{\left(1 + \frac{u}{A}\right)\left(1 + \frac{u}{B}\right)\cdots\left(1 + \frac{u}{J}\right)}},$$

$$\int \frac{\lambda^2\,d\sigma}{\left(\frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \cdots\right)^i} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(i)\,\Gamma\left(\frac{n}{2} - i + 1\right)} \int_0^\infty \frac{u^{i-1}\,du}{\left(1 + \frac{u}{A}\right)\sqrt{\left(1 + \frac{u}{A}\right)\left(1 + \frac{u}{B}\right)\cdots\left(1 + \frac{u}{J}\right)}},$$

wo nunmehr die Integrale links sich über das ganze polysphärische Kontinuum erstrecken. Setzt man $i = 1$, so ergeben sich die in § 49 gebrauchten Reduktionen.

Setzt man in (4) $\lambda = \frac{x}{\sqrt{A}}$, $\mu = \frac{y}{\sqrt{B}}$, $\ldots\ \overline{\omega} = \frac{w}{\sqrt{J}}$, so ist $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots + \frac{w^2}{J} = 1$, und das Integral links erstreckt sich über denjenigen Teil eines quadratischen Kontinuums, wo alle Variabeln zugleich positive Werte haben. Nach der üblichen Bezeichnung wird dann

$$\int^{n-1} \Phi \,.\, \prod_{m=2}^{m=n} \left(\frac{A_m^{\alpha-1} B_m^{\beta-1} \ldots J_m^{\varepsilon-1}}{(A - A_m)^i}\, d A_m\right)$$

$$= \frac{\Pi\,.\,(A - B)^{\alpha+\beta-1}}{(A B C \ldots J)^i}\, \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta) \ldots \Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(i)\,\Gamma(\alpha + \beta + \cdots + \varepsilon - i)} \int_0^\infty \frac{u^{i-1}\,du}{\left(1 + \frac{u}{A}\right)^\alpha \left(1 + \frac{u}{B}\right)^\beta \cdots}, \quad . \quad (6)$$

wo links unter den Axenquadraten $A_m, B_m, \ldots J_m$ die $m - 1$ letzten entgegengesetzt zu nehmen sind, damit alle positiv erscheinen, und wo $\Phi = (A_2 - A_3)(A_2 - A_4) \ldots (A_2 - A_n) \times \cdots \times (A_{n-1} - A_n)$, wo ferner rechts das Produkt $\Pi\,.\,(A - B)^{\alpha+\beta-1}$ so viele Faktoren zählt, als die Grössen $A, B, C, \ldots J$ zu zweien kombiniert werden können. Die linke Seite zerfällt in ein Aggregat von Produkten von je $n - 1$ einfachen und vollständigen Integralen.

Richtet man für $n = 3$ die Exponenten α, β, γ, i so ein, dass vollständige elliptische Integrale herauskommen, so scheint trotz aller noch möglichen Mannigfaltigkeit immer nur die bekannte Legendre'sche Relation, $F(k)\,E(k') + F(k')\,E(k) - F(k)\,F(k') = \frac{\pi}{2}$, aus (6) hervorzugehen. Setzt man z. B. $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$, $i = 1$, $\sqrt{\frac{B - C}{A - C}} = k$, $\sqrt{\frac{A - B}{A - C}} = k'$, $\frac{C}{A} = \cos^2\theta$, und bezeichnet das vollständige elliptische Integral dritter Art $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + n \sin^2 x} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}$ durch $\Pi(n, k)$, so verwandelt sich (6) zunächst in

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\,\Pi(k^2\,\mathrm{tang}^2\,\theta, k)\,F(k') - \Pi(-k'^2\sin^2\theta, k')\,F(k) = \frac{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{tang}\,\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}}\,F(k', \theta).$$

Substituiert man aber hier für die Funktion Π ihre durch elliptische Integrale der zwei ersten Arten ausgedrückten Werte, so erhält man nur:

$$F(k', \theta)\left\{F(k)\,E(k') + F(k')\,E(k) - F(k)\,F(k') - \frac{\pi}{2}\right\} = 0.$$



Inhaltsübersicht.

Erster Teil. Lehre von den linearen Kontinuen.

Zweiter Teil. Lehre von den sphärischen Kontinuen.

Seite

Dritter Teil. Verschiedene Anwendungen der Theorie der vielfachen Kontinuität, welche das Gebiet des Linearen und Sphärischen übersteigen.



Ueber den Föhn

und

Vorschlag zur Beschränkung seines Begriffs.

Von

H. Wild.

Mit 18 Tafeln.

Druck von ZÜRCHER & FURRER in Zürich.



Bei Gelegenheit eines Vortrags des Herrn Direktor R. Billwiller in der Sektion für physikalische Geographie der Versammlung der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft im August 1898 zu Bern: „Ueber ein gleichzeitiges Auftreten von Föhn zu beiden Seiten der Alpen" machte ich bei der Diskussion die Bemerkung, es dürfte in neuerer Zeit der Begriff „Föhn" zu weit gefasst und damit zu unbestimmt geworden sein. Als Föhn sollte nur eine Windströmung bezeichnet werden, welche, wie das beim typischen Föhn der Alpen der Fall sei, auf den beiden Seiten eines Gebirges vollständig verschiedenen Charakter habe, nämlich auf der Leeseite warm und trocken, auf der Luvseite kälter und feucht erscheine. Der von Herrn Billwiller besprochene Fall wäre dann nicht als Föhn zu bezeichnen, da er eine allgemeinere Erscheinung, nämlich das Herabsinken der Luft im Centrum einer Anticyclone repräsentiere. [1])

Herr Billwiller hat nun im Mai-Heft 1899 der Deutschen Zeitschrift für Meteorologie S. 204 u. folg. unter dem Titel: „Ueber verschiedene Entstehungsarten und Erscheinungsformen des Föhns" seine Ansichten des Näheren dargelegt, die einer weiteren Fassung des Begriffes Föhn das Wort reden. Da ich dadurch nur in meiner abweichenden, oben angedeuteten Ansicht bestärkt worden bin, so war ich zunächst willens, in derselben Zeitschrift auch meinen Standpunkt zu dieser Frage näher zu erörtern und zu begründen, in der Hoffnung, damit zur Beseitigung „der eingetretenen Verwässerung des Begriffes Föhn in der Meteorologie", wie Herr Professor Brückner sich ganz passend in der oberwähnten Diskussion ausdrückte [2]), beizutragen.

Als ich indessen an diese Arbeit ging, fühlte ich bald die Notwendigkeit, nochmals eine Zahl typischer Föhnfälle einer eingehenden Untersuchung zu unterwerfen und daraus ist dann allmählich die vorliegende umfangreichere und allgemeinere Arbeit über den Föhn entstanden, mit deren Publikation in den Denkschriften der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft ich zugleich eine alte Schuld abzutragen hoffe, da meine erste Untersuchung über diesen Gegenstand im Jahre 1867 damals nur kurz in ihren Resultaten publiziert wurde.

[1]) Verhandlungen der Schweiz. Naturf. Gesellschaft zu Bern, August 1898, S. 102.
[2]) l. c. S. 104.

Was wir unter dem typischen Föhn der Thäler auf der Nordseite der Alpen, speziell der schweizerischen, zu verstehen haben, ist nach den zahlreichen Untersuchungen darüber als bekannt vorauszusetzen. In einer besondern, dem Föhn gewidmeten Schrift hat Herr Gustav Berndt[1]) überdies in höchst übersichtlicher und gründlicher Weise alle darauf bezüglichen Forschungsresultate zusammengestellt, so dass ich in Betreff des nächst folgenden einfach darauf verweisen kann.

Der typische Föhn manifestiert sich darnach in der Schweiz besonders im ganzen Rheinthal mit seinen Verzweigungen bis zum Bodensee herunter, im Linth- und Sernfthal des Kantons Glarus, im Reussthal und Engelbergerthal bis gegen Luzern hin, im obern Aarethal bis nach Brienz herunter und im untern Rhonethal. Seine charakteristischen Eigenschaften sind da: Südöstliche bis südwestliche Richtung je nach dem Verlauf der Thäler, grosse Heftigkeit bis zu eigentlicher Sturmstärke, Verminderung des Luftdrucks, starke Erhöhung der Temperatur und bedeutende Abnahme der Feuchtigkeit im Thal, Aufheiterung des Himmels mit darauf folgender Bewölkung desselben. Der Föhn tritt hauptsächlich im Herbst, Winter und Frühjahr auf und ist im Sommer nicht bloss viel seltener, sondern auch schwächer. Als charakteristische Begleiterscheinungen in der Umgegend sind zu erwähnen: Auf der Südseite der Alpen bis zu ihren Kämmen und Pässen hinauf schwache Winde veränderlicher Richtung, verhältnismässig kühlere uud feuchtere Luft und im Verfolg starke Regengüsse oder Schneefälle, auf den Pässen selbst südliche starke Winde und in der Höhe südwestlicher Wolkenzug. Südwestliche Winde mit regnerischer Witterung finden wir auch durchweg im Flachland der Schweiz und im Jura; im Föhngebiet selbst pflegt nach Aufhören des Föhns dieser Witterungscharakter sich ebenfalls meistens geltend zu machen. Dem typischen Föhn geht endlich voran und begleitet ihn eine vom Ozean her in den Westen oder Nordwesten der Schweiz eindringende Cyclone resp. Zone niedrigen Luftdrucks, während zugleich über Italien und im Südosten hoher Druck stattfindet.

Das letztere Faktum führte zur Erklärung des Föhns, er bildet den südwestlichen Teil einer Cyclone über West-Europa, wobei auch aus dem Gebiet höhern Drucks über Italien und den angrenzenden Meeren die Luft über die Alpen weg nach der Zone niedrigen Drucks im Nordwesten der Schweiz strömt. Die Hemmung dieser Strömung in den untern Schichten der Atmosphäre durch die Alpen schwächt die Geschwindigkeit am Südfuss derselben, veranlasst durch das Emporsteigen der Luft an den Südabhängen starke Niederschläge und erzeugt ungewöhnlich grosse, von Süd nach Nord gerichtete

[1]) Dr. Gustav Berndt, Der Föhn. Ein Beitrag zur orographischen Meteorologie und komparativen Klimatologie. Göttingen 1896.

Druck-Gradienten über den Alpen. Die diesseits der Kämme und Pässe in die Thäler heruntersteigende stürmische, südliche Strömung repräsentiert dann den Föhn, dessen Luft durch die erfolgte Kompression beim Herabfliessen stark erwärmt wird und infolge dessen ihre relative Feuchtigkeit entsprechend bedeutend vermindert. In der Höhe, i. e. der Wolkenregion und im nordwestlichen Flachland der Schweiz entwickelt sich die cyclonale Bewegung der Luft ungehemmter, so dass da die Richtung der Luftströmung im allgemeinen eine südwestliche und von den normalen Niederschlägen begleitete ist.

Dass je nach der Entwicklung und Fortbewegung der Cyclone, ihrem Auftreten mehr im Westen als Nordwesten von der Schweiz, der Grösse und Verschiebung des Druckmaximums über Italien auch die Intensität, Dauer und Ausbreitung des Föhns in den Alpenthälern und von ihnen aus sogar in die angrenzenden ebenern Teile der Schweiz verschieden sein wird, erhellt aus dem vorigen von selbst.

Gleichwohl gibt es sowohl betreffend der typischen Eigenschaften des Föhns als besonders auch bezüglich ihrer Erklärung, wie Herr Berndt in der Einleitung zu seinem Werk (S. 13—16) sehr richtig bemerkt, noch eine Reihe dunkler und streitiger Punkte. Es schien mir daher wünschenswert, durch eine eingehendere Untersuchung zuerst wo möglich noch diese Punkte aufzuhellen und zu entscheiden, ehe ich der Veranlassung zu derselben gemäss den Unterschied des typischen Föhns von andern föhnartigen Erscheinungen, die zum Teil auf ganz andern Grundursachen beruhen, des Nähern erörtere.

Um zunächst die Häufigkeit und zeitliche Verteilung des Föhns genauer festzustellen, habe ich nach den in den Annalen der Schweizerischen meteorologischen Central-Anstalt von 1864 bis und mit 1898 enthaltenen Angaben alle Fälle von entschiedenen Föhn-Erscheinungen zusammengestellt. Für die meteorologischen Jahreszeiten und das Jahr ergaben sich hiernach die in der nachstehenden Tabelle enthaltenen Werte.

I. Zahl der typischen Föhne.

	Sommer	Herbst	Winter	Frühjahr	Jahr		Sommer	Herbst	Winter	Frühjahr	Jahr
1864	1	5	3	1	10	1874	1	2	2	0	5
1865	1	2	4	3	10	1875	0	0	1	2	3
1866	4	3	4	4	15	1876	0	1	3	1	5
1867	0	1	2	4	7	1877	0	1	1	3	5
1868	1	3	4	3	11	1878	1	4	0	3	8
1869	1	4	4	5	14	1879	2	2	3	5	12
1870	1	3	2	3	9	1880	2	3	2	1	8
1871	2	1	1	4	8	1881	3	3	4	3	13
1872	0	2	2	2	6	1882	2	4	3	6	15
1873	0	3	1	2	6	1883	2	3	2	4	11

	Sommer	Herbst	Winter	Frühjahr	Jahr
1884	0	1	3	5	9
1885	2	2	3	5	12
1886	1	3	3	8	15
1887	0	4	1	4	9
1888	0	2	3	3	8
1889	2	1	2	3	8
1890	1	2	2	3	8
1891	3	3	0	4	10
1892	1	1	2	2	6
1893	1	2	4	2	9
1894	0	2	2	4	8
1895	2	3	2	1	8
1896	1	2	2	1	6
1897	2	3	5	2	12
1898	1	4	4	6	15
35	41	86	85	112	324
also per Jahr	1,2	2,5	2,4	3,2	9,3

Hieraus folgt also, dass wir in den 35 Jahren 324 Föhnfälle oder durchschnittlich per Jahr 9,3 Föhne hatten. Die Jahressumme schwankt zwischen 3 und 15 Fällen, und wenn wir genauer zusehen, so scheint sich eine nahezu neunjährige Periode der Häufigkeit zu ergeben. Von 1864 bis 1870 hielt sich nämlich die Jahreszahl durchweg über dem Mittel von 9 Fällen, blieb darauf bis und mit 1878 stets darunter, stieg dann von 1879 bis 1887 wieder durchweg darüber, gieng von da bis 1896 neuerdings fast ausnahmslos unter den Mittelwert und steigt endlich mit Beginn einer neuen Periode von 1897 wieder zu hohen Werten an.

Was den jährlichen Gang nach Jahreszeiten in der Häufigkeit des Auftretens von Föhn betrifft, so kommen nach unserer Tabelle im Durchschnitt auf 1,2 Fälle von Föhn im Sommer, deren 3,2 im Frühling und 2,4—2,5 im Winter und Herbst. Dementsprechend sind auch die Cyclonen-Stürme im Sommer in Mittel-Europa am seltensten und schwächsten und treten in den andern Jahreszeiten viel häufiger und stärker auf.

Ich muss aber bemerken, dass die Zahlen unserer obigen Tabelle nicht auf grosse Sicherheit Anspruch machen können. Wohl habe ich bei der Zählung offenbar irrtümliche Föhnmeldungen einzelner Stationen ausgeschlossen und anderseits als Föhn auch Fälle gezählt, wo Hauptstationen zwar keinen solchen notiert hatten, alle Anzeichen eines solchen aber vollständig vorhanden waren. Immerhin kamen aber eine Reihe zweifelhafter Fälle vor, wo vielleicht ein anderer Forscher anders als ich entschieden hätte. Am angegebenen Hauptresultat bezüglich der jährlichen und säcularen Periode hätte dies indessen kaum eine Modifikation bedingt.

Eine richtige Einsicht in das Wesen des Föhns können offenbar nur genauere Untersuchungen verschiedener Föhnfälle und ihrer begleitenden Erscheinungen über einem grössern, jedenfalls mindestens die ganze Schweiz umfassenden Gebiet gewähren. Von solchen eingehenden Bearbeitungen sind mir aber nur zwei bekannt, nämlich die vielfach zitierte Schrift von L. Dufour: „Recherches sur le Fœhn du 23 septembre 1866

en Suisse“ [1]) und der Artikel des Herrn R. Billwiller: „Der Föhn vom 13. Januar 1895 am Nordfuss der Alpen und die Bildung einer Teildepression daselbst“ [2]). Während aber Herr Dufour die Barometerstände zu den aufeinanderfolgenden Terminen für die einzelnen Orte je durch Kurven veranschaulichte, hat Herr Billwiller die synoptische Darstellung durch Isobaren gewählt und damit, wie mir scheint, den einzig zum Ziele führenden Weg eingeschlagen. Ich bin denn auch bei meiner Untersuchung seinem Beispiele gefolgt und habe die synoptische Darstellung auf alle Termine und alle Elemente ausgedehnt, welche auf den meteorologischen Stationen der Schweiz gewöhnlich beobachtet werden, nämlich Druck, Temperatur und relative Feuchtigkeit der Luft, Bewölkung, Richtung und Stärke des Windes, Niederschlag [3]).

Im Ganzen habe ich so fünf entschiedene Fälle von Föhn behandelt, nämlich den Föhn vom 7.—9. März 1864, denjenigen vom 6.—9. März 1872, den vom 30. Januar bis 3. Februar 1885, den Föhn vom 18. und 19. August 1892 und endlich denjenigen vom 28. Oktober bis 1. November 1892, so dass also mit Einschluss des analog von Herrn Billwiller bearbeiteten die Resultate von 2 Frühlings-, 1 Sommer-, 1 Herbst- und 2 Winter-Föhnen vorliegen, was genügen dürfte, um allgemeinere Charakteristika des typischen Föhns abzuleiten.

Da die Annalen der Schweizerisch meteorologischen Central-Anstalt nur von einer beschränkten Zahl von Stationen (12) die Beobachtungen in extenso, d. h für alle Elemente und alle drei täglichen Termine: 7^h a., 1^h und 9^h p. veröffentlichen und von den übrigen bloss Monats- und Jahres-Résumés geben, so war ich genötigt, für die letztern Orte zu den Original-Beobachtungen zurückzugehen. Herr Direktor R. Billwiller hat mir zu dem Ende die Benutzung des wohlgeordneten Archivs der Central-Anstalt freundlichst gestattet, und er sowohl wie die Herren Dr. Maurer, Adjunkt, und J. Mettler, Assistent, haben mich dabei vielfach aufs Zuvorkommendste mit Auskünften unterstützt, wofür ich ihnen hiemit meinen besten Dank ausspreche.

Von auswärtigen Beobachtungen benutzte ich zur Orientierung über die engern Verhältnisse der Schweiz nur die Daten und synoptischen Karten des internationalen Wetter-Bulletins von Paris und von 1885 an das Wetter-Bulletin der schweizerisch meteorologischen Centralanstalt. Leider gestatteten es mir die Umstände nicht, weitere und genauere Daten für die benachbarten Länder zu sammeln und zu benutzen.

Die Barometerstände habe ich für die synoptische Darstellung nach dem Vorgang von Herrn Billwiller, sämtlich auf 500 m Meereshöhe reduziert und dies auch für die Temperaturen ausgeführt. Dabei bediente ich mich der unter meiner Redaktion 1894 von der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg als Beilage zur

[1]) Extrait du Bulletin de la Société vaudoise des sciences naturelles. Vol. IX, Nr. 58. 1868.

[2]) Meteorologische Zeitschrift vom Jahr 1895, S. 201.

[3]) Erst nachträglich habe ich bemerkt, dass ich hiemit zum Teil einen Wunsch erfüllt habe, den Herr J. M. Pernter am Schluss seiner Abhandlung: „Die allgemeine Druckverteilung und die Gradienten bei Föhn (Sitzungsber. der Wiener Akademie. Bd. CV. S. 117. 1896)“ ausgesprochen hat.

Instruktion für meteorologische Stationen herausgegebenen Tafeln zur Berechnung der meteorologischen Beobachtungen.

Obschon für bedeutendere Höhenunterschiede diese Reduktionen besonders bei den Barometerständen keine grosse Sicherheit darbieten, so habe ich dieselben doch auf alle in den Annalen komparierenden Stationen ausgedehnt, selbst wenn deren Meereshöhe weit über 1900 m betrug, wobei aber der Vereinfachung halber nur je für den mittleren Zustand während der fraglichen Föhnfälle die Reduktion berechnet und dann als Konstante an allen Tagen und Terminen angebracht wurde. Infolge dessen ist es nötig, sich über den wahrscheinlichen Sicherheitsgrad dieser Reduktionsgrössen ein Urteil verschaffen zu können. Zu dem Ende stelle ich dieselben in der nachstehenden Tabelle II für die vier letztern Föhnfälle von einer Zahl von Stationen zusammen, welche ohne wesentliche Veränderung von 1872 bis 1892 funktioniert haben.

II. Reduktionsgrössen für Barometer und Temperatur auf 500 m.

Station	Meeres-Höhe — – 500 m	Föhne vom März 1872	Jan.-Febr. 1885	August 1892	Oktober 1892	Jahres-mittel 1885	Unsicherheit der Reduktionen
	m	mm	mm	mm	mm	mm	mm
St. Bernhard	1978	154,3	158,7	147,3	156,2	155,4	± 5,7
		9,°5	7,°7	11,°9	8,°8	9,°3	± 2,°1
Bernhardin	1570	126,1	128,0	118,8	124,8	125,8	± 4,6
		7,5	6,2	9,5	7,5	7,4	± 1,6
Sils-Maria	1311	105,7	108,8	100,5	104,5	106,6	± 4,1
		6,3	5,1	7,9	6,3	6,2	± 1,4
Rigi-Kulm	1287	104,3	104,0	98,8	101,7	104,5	± 2,6
		6,2	5,0	7,7	6,2	6,0	± 1,3
Davos-Platz	1057	—	86,8	81,8	85,6	87,2	± 2,5
		—	4,2	6,4	4,8	5,0	± 1,1
Andermatt	948	77,3	78,8	74,0	77,1	78,7	± 2,4
		4,5	3,7	5,7	4,5	4,4	± 1,0
Reckingen	849	69,3	72,1	66,1	69,1	70,6	± 3,0
		4,0	3,3	5,1	4,0	4,0	± 0,9
Chaumont	628	—	52,8	49,0	50,8	52,6	± 1,9
		—	2,4	3,7	3,0	2,9	± 0,6
Engelberg	521	42,7	44,1	41,3	42,3	44,1	± 1,1
		2,6	2,0	3,1	2,6	2,4	± 0,5
Einsiedeln	410	33,9	35,2	32,9	33,8	34,9	± 1,1
		1,9	1,6	2,5	1,9	2,0	± 0,4
Affoltern	295	24,7	25,3	23,8	24,7	25,1	± 0,7
		1,4	1,2	1,8	1,4	1,4	± 0,3

Station	Meeres-Höhe — —500 m m	März 1872 mm	Föhne vom Jan.-Febr. 1885 mm	August 1892 mm	Oktober 1892 mm	Jahres-mittel 1885 mm	Unsicherheit der Reduktionen mm
Faido	259	—	22,6	20,9	22,1	22,0	± 0,8
		—	1°,0	1°,6	1°,2	1°,2	± 0°,3
Castasegna	200	17,1	17,5	16,2	17,2	17,0	± 0,6
		1,0	0,8	1,2	1,0	0,9	± 0,2
Lohn	145	12,3	12,6	11,7	12,3	12,4	± 0,4
		0,7	0,6	0,9	0,7	0,7	± 0,1
Reichenau	97	8,2	8,5	7,7	8,2	8,2	± 0,4
		0,5	0,4	0,6	0,5	0,5	± 0,1
Bern	72	6,1	6,3	5,8	6,1	6,2	± 0,2
		0,4	0,3	0,5	0,4	0,4	± 0,1
Frauenfeld	— 73	— 6,3	— 6,5	— 5,9	— 6,3	— 6,3	± 0,3
		— 0,5	— 0,3	— 0,5	— 0,4	— 0,3	± 0,1
Genf	— 95	— 8,0	— 8,3	— 7,3	— 8,1	— 8,1	± 0,5
		— 0,5	— 0,4	— 0,6	— 0,4	— 0,5	± 0,1
Basel	— 222	— 19,4	— 19,8	— 18,2	— 19,1	— 18,9	± 0,8
		— 1,0	— 0,8	— 1,3	— 1,0	— 1,0	± 0,2
Lugano	— 225	— 19,7	— 20,2	— 18,6	— 19,7	— 19,1	± 0,8
		— 1,0	— 0,9	— 1,3	— 1,0	— 1,0	± 0,2

Wie man aus der Tabelle ersieht, habe ich noch die für die Jahresmittel der Barometerstände und der Temperatur vom Jahr 1885 berechneten Reduktionen beigefügt. Die halbe Differenz der Extreme dieser Reduktionsgrössen nämlich für die Föhne im Januar-Februar 1885 und im August 1892 habe ich in der letzten Spalte der Tafel als wahrscheinliche Unsicherheiten derselben beigefügt; in Wirklichkeit werden die Fehler eher kleiner als grösser sein.

Es würden sich darnach ungefähr folgende Unsicherheiten der reduzierten Barometerstände für verschiedene Höhenstufen ergeben:

Höhe über Meer m m	Fehler der Reduktion mm
500 ± 50	± 0,2
500 ± 100	± 0,4
500 ± 175	± 0,6
500 ± 260	± 0,8
900	± 1,0
1200	± 2,0
1500	± 2,5
1900	± 4,0
2500	± 6,0

Bedenkt man, dass durchweg über 60 % der benutzten Stationen den vier ersten Höhenstufen angehören, so erscheint die Gefährdung unserer Isobaren durch obige Maximalunsicherheiten nicht sehr bedenklich.

Viel geringer ist die Unsicherheit der reduzierten Temperaturen, indem noch für Stationen bis zu 500 ± 200 m absoluter Höhe die Sicherheit derselben ± 0°,2, bei solchen um 1000 m Höhe ± 0°,5, bei Stationen um 1500 m Höhe nur ± 1°,0, bei 2000 m Höhe ± 1°,5 und endlich bei 2500 m Meereshöhe nur noch ± 2°,0 beträgt.

Es frägt sich nun, in welchem Verhältnis diese, wie wir auch weiterhin noch sehen werden, jedenfalls maximalen Unsicherheiten der bei den einzelnen Terminbeobachtungen des betreffenden Föhns anzubringenden Reduktionen auf 500 m Höhe zu den Fehlern der Beobachtungen selbst stehen. Was zunächst die Barometerstände betrifft, so sind die Ablesungen am Barometer, wie die Vergleichung des Ganges benachbarter Orte zeigt, jedenfalls durchweg mit einer Sicherheit von ± 0,2 mm gemacht worden. Wie in andern Stationsnetzen, so kommen auch hier hie und da Versehen um halbe Centimeter vor, welche aber leicht nach den Daten benachbarter Stationen zu erkennen und darnach auszumerzen sind. Nicht ganz so gut scheint es mit der Kenntnis der Korrektionen der Barometer und ihrer Meereshöhe bestellt zu sein. Zwar hat mir Herr Direktor Billwiller gütigst die auf den Inspektionsreisen vom Jahr 1865 und 1866 von Herrn Weilenmann, sowie auf seitherigen Inspektionsreisen der Beamten der Centralanstalt bestimmten Korrektionen der Barometer mitgeteilt, welche von 1865 an bereits an den, in den Annalen publizierten Beobachtungen, nicht aber an den von mir vielfach benutzten Original-Beobachtungen angebracht sind, und ebenso erhielt ich von ihm auch Aufschluss über Aenderungen der in den Annalen angegebenen Barometerhöhen durch seitherige Anschlüsse an das Nivellement der Schweiz seitens des eidgenössischen topographischen Bureaus. Indessen hat mir doch nach Anbringung aller Korrektionen der Vergleich der auf gleiches Niveau reduzierten Barometerstände benachbarter Orte, obschon wegen des geringen Höhenunterschiedes kein erheblicher Fehler von dieser Reduktion her entstehen konnte, mehrfach konstante Differenzen ergeben, welche die Beobachtungsfehler weit überschreiten und nur durch Fehler in den Höhenangaben oder Aenderungen der Barometer-Korrektionen zu erklären sind. So ergiebt sich z. B. ziemlich bestimmt, dass im März 1872 an den Barometerständen der Station Bernina noch eine Korrektion von + 5,7 mm, an denen der Station Chur eine solche von — 3,6 mm und an denen der Station Altorf eine solche von — 1,7 mm auzubringen ist. Kleinere Fehler dieser Art schienen mir auch in andern Jahren vorzukommen, und ich habe daher versucht, ihnen dadurch sicherer auf die Spur zu kommen, dass ich für 1885 und 1892 Jahresisobaren wieder nach Reduktion der Jahresmittel der Barometerstände auf das Niveau von 500 m konstruierte. Aus der erstern Karte liess sich mit Bestimmtheit erkennen, dass die Barometerstände in Sursee und Göschenen je um ungefähr 1 mm zu niedrig seien und dass das Jahresmittel für Sitten, das freilich erst nach Interpolation von drei fehlenden Monatsmitteln gewonnen wurde, ebenfalls um

mindestens 1 mm zu klein ausgefallen sei. Die synoptische Karte für 1892 ergab dagegen für keine Station ganz entschiedene Indizien fehlerhafter Barometerstände, während eine, aus gleich näher anzugebenden Gründen angefertigte Isobaren-Karte für 1875 bei der Station Sursee auch wieder um 1 mm zu niedrige, bei Aarau und Ragatz um ungefähr 2 mm zu hohe und endlich in Sitten um mehrere Millimeter zu niedrige Stände erkennen liess.

Diese Jahres-Isobarenkarten leisteten für die Beurteilung der Sicherheit der absoluten Barometerstände leider nicht so viel, als ich erwartet hatte, weil die Verteilung des Luftdrucks über die Schweiz auch im Jahresmittel keine gleichförmige ist. Er schwankt in den beiden Jahren 1885 und 1892 allerdings nur zwischen den Grenzen 717 mm und 720 mm auf unserm Gebiete, wobei die niedrigen Stände übereinstimmend auf den Westen, Nordosten und Südosten fallen, während der zentrale Teil der Schweiz und insbesondere das Hochgebirge die höhern Stände aufweist. Doch ist, wenn wir die Stationen von über 900 m Meereshöhe wegen der Unsicherheit der Reduktion auf gemeinsames Niveau ausschliessen, die Zahl der übrig bleibenden Stationen an vielen Stellen zu gering, um kleinere Fehler durch den Vergleich sicher aufzudecken. Nun sind aber die Jahre 1892 und besonders 1885 nach unserer Tabelle I solche mit vielen Föhnerscheinungen, was möglicher Weise einen komplizierten Verlauf der Jahres-Isobaren hätte begründen können. Deshalb schien es mir geboten, noch für das Jahr 1875, in welchem nach Tabelle I nur drei Föhnfälle, das Minimum derselben, sich zeigten, Jahres-Isobaren zu konstruieren. Der Luftdruck variiert da auf unserm Gebiet nur zwischen 718 mm und etwas über 720 mm, ist aber auch noch recht unregelmässig verteilt, so dass aus dem Vergleich mit den beiden obigen Karten sich nur ein relativ höherer Luftdruck über der Schweiz in Jahren mit wenig Föhnerscheinungen zu ergeben scheint. Dagegen gestatten die drei Jahres-Isobarenkarten wegen der viel geringeren Druckvariationen über unser Gebiet hin die Sicherheit der Barometer-Reduktionen für grössere Höhen besser zu beurteilen. In der nachstehenden Tabelle III habe ich zu dem Ende für 16 Kombinationen von Stationen recht verschiedener Seehöhe die übrig bleibenden Differenzen ihrer auf 500 m reduzierten Barometerstände zusammengestellt.

III. Differenzen in	**Höhe**	**in Barometerständen**		
		1875	1885	1892
	m	mm	mm	mm
Julier — Sils-Maria	427	— 0,5	—	0,2
Bernhardin — Splügen	600	— 0,2	—	— 0,7
Chaumont — Neuchâtel	640	0,6	0,3	0,1
Gäbris — Altstätten	783	—	0,1	0,3
Andermatt — Altorf	964	0,4	— 0,2	0,6
Andermatt — S. Vittore	1171	1,7	1,0	1,9
Rigi — Luzern	1336	0,2*	0,4	— 0,5

Differenzen in	Höhe	in Barometerständen		
		1875	1885	1892
	m	mm	mm	mm
Rigi — Gersau	1347	1,2	— 0,5	—
Bernhardin — Castasegna	1370	1,5	1,4	1,1
Bernhardin — Chur	1460	0,0	0,1*	0,4
St. Gotthard — Altorf	1616	1,4	0,2	—
Pilatus — Luzern	1617	—	—	0,2
Bernhardin — S. Vittore	1800	1,4	1,3	1,2
St. Gotthard — S. Vittore	1832	2,7	1,4	
Säntis — Ebnat	1850	—	0,3	0,3
St. Bernhard — Martigny	1998	— 0,7	—	1,3

Bei den mit einem Stern bezeichneten Differenzen konnte der nicht gegebene Barometerstand für die untere Station leicht nach den Isobaren interpoliert werden. Die Tabelle zeigt zunächst durchweg positive Vorzeichen für die Differenzen der Barometerstände, d. h. also die höhere Station hat je durch die Reduktion ihrer Barometerstände auf das gemeinsame Niveau von 500 m, von welchem sich die Höhen der untern Station nur in wenigen Fällen erheblich entfernen, zu hohe Werte derselben erhalten, was, da wir es hier mit sichern Jahresmitteln zu thun haben, auf eine etwas zu hohe Konstante in der benutzten barometrischen Höhenformel hinweist. Die in allen Jahren 1 Millimeter übersteigenden Fehler bei den Kombinationen: Andermatt — S. Vittore, Bernhardin — S. Vittore und Bernhardin — Castasegna sind unzweifelhaft zum grössern Teil einem wirklichen, bei der obigen Differenzenbildung nicht berücksichtigten Gradienten von ungefähr 1 mm beizumessen, um welche Grösse im zentralen Teil der Schweiz und im Hochgebirge der Luftdruck höher steht als an den südöstlichen Alpenabhängen. Darauf weisen auch die nahezu verschwindenden Barometerdifferenzen der Kombinationen: Andermatt — Altorf und Bernhardin — Chur hin. Berücksichtigen wir dies auch bei der Kombination: St. Gotthard — S. Vittore, so werden da die Barometerdifferenzen nahe gleich gross wie bei der Kombination St. Gotthard — Altorf auf der Nordseite des Gebirgs.

Während also die Jahres-Isobaren in Betreff der absoluten Barometerstände immerhin Fehler von etwa ± 0,5 mm nicht mehr sicher zu erkennen gestatten, haben sie bezüglich der Reduktionen mittlerer Barometerstände eine Genauigkeit derselben bis nahe zur gleichen Grenze wahrscheinlich gemacht.

Als Sicherheit der Ablesungen bei den Thermometern kann im allgemeinen jedenfalls ± 0°,1 angenommen werden und gewiss sind auch deren Korrektionen bis zu dieser Grenze als sicher bestimmt und angebracht zu betrachten; dagegen stellt jedenfalls die so abgelesene und korrigierte Grösse durchweg nicht die wahre Lufttemperatur am Ort der Beobachtung dar, sondern wird von ihr je nach der Exposition der Thermometer den vorliegenden Erfahrungen zufolge besonders am Mittagstermin häufig um 0°,5 bis 1°,0 abweichen. Wieder in der Hoffnung besonders ungünstige Expositionen

der Thermometer besser eruieren zu können, habe ich für dieselben drei Jahre 1875, 1885 und 1892 auch Jahresmittel-Isothermen für das Niveau von 500 m über Meer konstruiert. Auch diese verlaufen viel unregelmässiger, als ich erwartet hatte. In allen drei Jahren variiert das Jahresmittel der Temperatur über der Schweiz allerdings nur zwischen 7° und etwas über 10°; stets ist im Rhonethal und um den Genfersee das Jahresmittel höher als 9°, im südlichen Teil des Kantons Tessin und in Chiavenna höher als 10°; das obere Aarethal, das Reussthal bis nach Gersau herunter und das untere Rheinthal bis zum Bodensee weisen auch durchweg höhere Temperaturen bis zu 9° auf; die niedern Temperaturen endlich von 7 bis 8° treffen wir im nördlichen bis nordöstlichen Teil der Schweiz, im Linththal, Engelbergerthal, um den Gotthard und besonders im obern Engadin. Da also die Temperatur hiernach in hohem Grade von der örtlichen Lage abhängt, ist es schwer, bestimmter auf Einflüsse der Thermometeraufstellung zu schliessen. Ich beschränke mich daher auf folgende Bemerkungen. Die Station Aarau scheint durchweg um ungefähr 0°,5 zu niedrige Mitteltemperaturen zu zeigen und die Station Weissenstein um 1° zu hohe. Die verhältnismässig niedrigen Temperaturen von Andermatt und Bevers sind zwar auch auffallend, können aber doch auf lokalen Besonderheiten beruhen. Dass die Reduktion auf die gemeinsame Höhe von 500 m hiebei Fehler bedingt habe, ist nicht anzunehmen, da dieselbe selbst für die grössten Höhen, wie die des Säntis, keine ± 0°,2 übersteigende Abweichungen erkennen lässt. Es zeigt die letztere Thatsache auch, dass die oben aus Tabelle I gefolgerten Unsicherheiten der Temperaturreduktionen mehr bloss der realen Differenz derselben in den verschiedenen Jahreszeiten beizumessen ist.

Für die auf den Stationen beobachteten Feuchtigkeiten, von welchen uns hier besonders die relative Feuchtigkeit interessiert, sind keinerlei Reduktionen auf gleiches Niveau angebracht oder auch nur versucht worden, so dass wir es da nur mit den Beobachtungsfehlern zu thun haben. Auf den meisten Stationen, wo überhaupt die Feuchtigkeit bestimmt wurde, hat man zu dem Ende das Psychrometer angewendet. Es ist bekannt, dass dieses Instrument eine sorgfältige Behandlung erheischt, wenn es einigermassen richtige Resultate geben soll, und dass um Null Grad herum, sowie bei sehr niedrigen Temperaturen seine Angaben überhaupt unsicher sind. Das Haarhygrometer, wie es auf vielen Stationen angewandt wurde, kann in den letztern Fällen und auch sonst vorteilhaft benutzt werden, wenn dasselbe von vorne herein einer sorgfältigen Verifikation unterworfen worden ist und auch später von Zeit zu Zeit eine Prüfung auf unveränderte Erhaltung erfährt. Während aber das letztere Instrument mit der Zeit nach beiden Seiten hin fehlerhafte Angaben machen kann, d. h. infolge Austrocknung des Haares überhaupt zu grosse Trockenheit anzeigt oder dann wegen allmählicher Verlängerung desselben stets zu grosse Feuchtigkeit ergiebt, machen sich die Fehler beim Psychrometer besonders bei ungenügender Befeuchtung des mit Battist überzogenen Thermometergefässes immer nur im Sinne zu grosser Feuchtigkeitsanzeigen bemerkbar. Beispiele von Fehlerquellen dieser Art finden sich verschiedene bei den von mir be-

arbeiteten Föhnbeobachtungen. So sind z. B. im Appenzellerland und seiner Nachbarschaft die am 18. August 1892 beobachteten relativen Feuchtigkeiten in Prozenten der Sättigung:

Ort	Höhe in m	7h a.	1h p.	9h p.	Beob.-Instr.
Säntis	2500	41	39	42	Psychrometer
Gäbris	1253	4	7	10	Haarhygrometer
Schwäbrig	1152	78	69	89	"
Heiden	797	29	15	18	"
St. Gallen	703	60	52	42	Psychrometer
Altstätten	470	63	33	26	"

Während wir hier die aus den Psychrometerangaben abgeleiteten Feuchtigkeiten auf dem Säntis, in St. Gallen und in Altstätten als nahezu richtig betrachten können, haben die Beobachtungen am Haarhygrometer in Gäbris offenbar viel zu geringe Feuchtigkeiten (Sandwüstenklima!) und diejenigen im ganz nah gelegenen Schwäbrig viel zu hohe ergeben; auch die Feuchtigkeitsangaben in Heiden erscheinen auffallend klein.

Folgende Zusammenstellung der Feuchtigkeitsangaben vom gleichen Datum in:

Ort	Höhe in m	7h a.	1h p.	9h p.	Beob.-Instr.
Göschenen	1108	43	75	36	Psychrometer
Gurtnellen	742	93	90	77	"
Altorf	484	68	22	26	"

weisen unzweifelhaft darauf hin, dass in Gurtnellen wegen offenbar ungenügender Funktion des Psychrometers zu hohe Feuchtigkeiten erhalten wurden.

Vom gleichen Datum ergaben ferner die Beobachtungen in:

Ort	Höhe in m	7h a.	1h p.	9h p.	Beob.-Instr.
Davos-Platz	1557	78	24	51	Psychrometer
Arosa	1835	20	11	26	Haarhygrometer

wo in Berücksichtigung der Feuchtigkeitsangaben umliegender Orte diejenigen von Arosa nach dem Haarhygrometer zu klein erscheinen. Dafür spricht, dass beim Föhn von 1885 (30. Januar bis 3. Februar) die Psychrometerangaben in Davos-Platz und im nahe gelegenen Wiesen (1454 m) durchweg bis auf wenige Prozente übereinstimmen.

Während bei diesem Föhn Gäbris auch schon zu grosse Trockenheitsangaben macht, erscheinen dagegen die Feuchtigkeiten in Gurtnellen richtig zu sein. Zu hohe Feuchtigkeit hat zu dieser Zeit offenbar das Psychrometer der Linthkolonie wahrscheinlich wegen unrichtiger Behandlung desselben ergeben, während beim Föhn von 1872 (6.—9. März) die Feuchtigkeitsdaten dieser Station sich sehr gut an die der umliegenden Stationen anschliessen. In diesem Jahre dürfte dagegen die auf der Grimsel und in Solothurn beobachteten Feuchtigkeiten zu hoch ausgefallen sein.

Es kann an diesen Beispielen genügen, um zu zeigen, dass die Feuchtigkeitsbeobachtungen oft erhebliche Fehler aufweisen, im Grossen und Ganzen aber können wir konstatieren, dass die Mehrzahl der Stationen recht befriedigende Daten für die relative Feuchtigkeit geliefert haben.

Was die Beobachtungen über Richtung und Stärke des Windes betrifft, so leiden sie in unserm gebirgigen Lande mehr als anderwärts unter den lokalen Verhältnissen, welche häufig nur zwei Windrichtungen, thalauf- und thalabwärts, zulassen. Selbstverständlich ist auch die Schätzung der Windstärke eine sehr individuelle und wo sie nach dem einfachen, von mir seiner Zeit angegebenen Windstärkemesser geschieht, wieder eine durch seine Aufstellung lokal sehr bedingte. Glücklicherweise geben eine Zahl von Stationen auch den Wolkenzug an, so dass man daraus wenigstens auf die Windrichtung in der freien Atmosphäre schliessen kann.

Gemäss der Instruktion des Herrn Direktor Billwiller für die Beobachter der meteorologischen Stationen in der Schweiz (2. Auflage von 1893 S. 16 u. folg.) entsprechen die nach Schätzung oder nach meiner Windfahne mit Stärketafel in den Beobachtungstabellen und Annalen angegeben Stärkestufen folgenden Definitionen:

0	nahe vollkommene Windstille .	0,0—0,5	Meter	pro	Sekunde	Geschwindigkeit.
1	leichter, eben bemerkbarer Wind	0,5— 5	„	„	„	„
2	mässiger Wind	5—10	„	„	„	„
3	frischer Wind	10—15	„	„	„	„
4	starker Wind	15—20	„	„	„	„
5	stürmischer Wind	20—30	„	„	„	„
6	Orkan (bei uns selten vorkommend)	30—40	„	„	„	„

Die letztern Bezeichnungen sind erst in neuerer Zeit eingeführt worden, so dass die Zahl 4 in den frühern Beobachtungen häufig auch stürmischen Wind darstellt.

Ueber die Angaben des Bewölkungsgrades ist höchstens zu bemerken, dass sie für eine Bergspitze mit ganz freiem Horizont und für ein enges Thal, wo nur ein kleiner Teil des Himmelsgewölbes sichtbar ist, offenbar einen verschiedenen Charakter besitzen, der im gegebenen Fall Berücksichtigung erheischt.

Die Einführung der Niederschlagsmengen in die synoptische Darstellung hat bekanntlich etwas missliches. Man pflegt den Niederschlag auf den Stationen meistens nur einmal im Tag zu messen und der Bearbeiter weiss dann nicht, wie er die Menge auf die Intervalle zwischen den drei Terminen verteilen soll, auch wenn, wie es seit einiger Zeit gefordert wird, der Beobachter angiebt, ob es am Termin selbst geregnet oder geschneit hat. Leider wird das letztere noch häufig versäumt, so dass man genötigt ist, nach Gutdünken zu verfahren.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen gehe ich jetzt auf Grundlage der Beobachtungen und der darauf basierenden synoptischen Karten, drei für jeden Tag, zur Betrachtung der einzelnen Föhnfälle über. Erst nachträglich habe ich mich entschlossen,

Reproduktionen meiner synoptischen Karten für den Druck und Wind in verkleinertem Masstabe der Abhandlung beizugeben. Es sind daher die nachstehenden Schilderungen des Verlaufs der Isobaren hie und da unnütz weitläufig ausgefallen.

Föhnsturm vom 7.—9. März 1864.

Infolge eines am Morgen des 5. März an den Nordwest- und Westküsten Frankreichs bestehenden Druckminimums bei höherm Druck über Italien wehten an jenen Küsten überall südöstliche, stellenweise stürmische Winde, ferner stürmische südöstliche bis südwestliche Winde in und um die Schweiz und stürmische Ostwinde an der Mittelmeerküste Frankreichs. In einigen nördlichen Alpenthälern der Schweiz trat denn auch am Abend des 5. März bereits Föhn auf. Dieser verschwand indessen wieder bis zum Morgen des 6. März, da inzwischen infolge einer Nordwärtsbewegung des Centrums der Cyclone und einer Verstärkung derselben der Luftdruck in Spanien gestiegen und im Ligurischen Meer und in Italien gefallen war. Daher wehen südlich vom Centrum der Cyclone über England südwestliche stürmische Winde in Frankreich, Deutschland und dem ebenen Teil der Schweiz, starke westliche Winde im nördlichen Spanien und an der Südküste Frankreichs, in Nord-Italien aber südöstliche Winde, so dass es den Anschein hat als befinde sich ein zweites schwaches Druckminimum bei Genua.

Im Laufe aber des 6. März bis zum Morgen des 7. März hob sich der Druck wieder stark über Italien und im Südosten der Schweiz, während er im Westen und Nordwesten derselben durch weitere Vertiefung der Cyclone über den britischen Inseln (Minimum in Schottland mit 734 mm) noch weiter sank und somit der barometrische Gradient von ihr aus nach Nordwesten sich verstärkte, wodurch die südwestlichen Winde in Frankreich und Deutschland noch stürmischer wurden. An der Riviera und der Südküste Frankreichs haben sich die Winde wieder nach Osten gedreht, in Italien aber wehen bei sehr geringem Druck-Gradienten schwache veränderliche Winde.

Im nordwestlichen Teil der Schweiz: Jura und Flachland zwischen Jura und Alpen treffen wir um 7^h a. des 7. März entsprechende Witterungszustände wie im mittleren Frankreich und Deutschland, nämlich mässige bis frische, südwestliche bis westliche Winde, die sich besonders auf den hoch gelegenen Stationen wie Ste. Croix, Chaumont, Uetliberg, auch noch auf dem Rigi entschiedener markieren. Demgemäss ist auch die Luft da durchweg sehr feucht, 90 % und mehr von Genf bis Schaffhausen hin, im Westen der Himmel bedeckt und treffen wir Regen in Ste. Croix, Chaumont und Neuchâtel. Gegen das Hochgebirge hin und im östlichen Teil der Schweiz ist die Feuchtigkeit viel geringer, bis 60 %, um dann jenseits des Gebirges im südlichen Tessin wieder bis über 90 % anzusteigen, im ganzen östlichen Teil haben wir auch noch heitern Himmel bei im allgemeinen schwachen Winden verschiedener, resp. wechselnder und unbestimmter Richtung. Auf den Alpenpässen: St. Bernhard, Grimsel, St. Gotthard, Bernhardin haben sich aber bereits überall südliche Winde (SW bis SE) eingestellt und

in ihrem Gefolge zeigen sich in Klosters, Sargans, Chur und Auen Vorboten des Föhns in frischen Ost- bis Südostströmungen trockener gewordener Luft. Die Winde aber in der Centralschweiz: N in Beatenberg und Schwyz, NE in Zürich, Zug, Engelberg, Ost in Stanz und Bern, Nord-West in Altorf, Südost in Einsiedeln und Glarus etc. werden erst durch die besondere Luftdruck-Verteilung im Innern der Schweiz verständlich. Der Wolkenzug ist vorherrschend Süd-West.

In unserer synoptischen Karte für 7^h a. des 7. März im Niveau von 500 m über Meer verläuft zunächst eine Isobare von 710 mm am Nordwest- und Nordrand der Schweiz, welche mit der Meeresniveau-Isobare von 755 mm des Pariser-Bulletins vom gleichen Datum nahezu übereinstimmt. Die nächst höhere Isobare von 711 mm über dem Genfersee im Westen beginnend, steigt zwischen Biel und Solothurn bis zum Jura empor, folgt ihm bis zu seinem Ende im Kanton Zürich, hebt sich dann über Schaffhausen empor und sinkt durch den östlichen Thurgau etwa bis Ebnat im Toggenburg herunter, von wo sie zum Vierwaldstättersee geht, um dann südlich von ihm wieder nach Osten nördlich am Wallensee vorbei bis Klosters im Prättigau zurückzugehen. In dieser Schleife hat sich zwischen dem Vierwaldstättersee und dem südlichen Appenzell eine sekundäre Depression (vielleicht auch mehrere separate in den einzelnen Thälern) mit einer Isobare von 710 mm eingelagert. Die Isobare von 712 mm geht von der Mitte des untern Rhonethales bei Bex über die Berner-Alpen und das obere Reussthal bis zum Glarnerland hin, wo sie dann in einem Bogen zum Wallensee um ein lokales Maximum bei Glarus emporsteigt und darauf an Chur und Thusis vorbei zum obern Engadin heruntergeht. Diese Luftdruck-Verteilung ist es offenbar, welche die Windverhältnisse in der Centralschweiz bedingt.

In westöstlicher Richtung mit einer Hebung bis über den Gotthardpass hinauf verläuft die nächste Isobare von 713 mm und zwar im Westen längs des Nordabhangs des mittleren Rhonethals, im Osten das Oberengadin etwa beim Malojapass quer durchschneidend. Endlich haben wir um ein bis nahe an 715 mm heranreichendes Maximum des Drucks bei Faido eine, wie es scheint, geschlossene Isobare von 714 mm im Tessin, die vom Gotthard östlich nach Castasegna herunter geht, südlich von Lugano nach West sich herüber zieht und über den Simplon und Gliss im Rhonethal längs dem südlichen Abhang desselben wieder zum Gotthard empor steigt. Die schwachen Winde an den Stationen in diesem Gebiet stimmen ihrer Richtung nach, abgesehen von Lugano, durchweg mit diesen Druckverhältnissen überein.

Gehen wir über die Centralschweiz ungefähr von Nord nach Süd herunter, so finden wir demgemäss folgende Barometerstände im Niveau von 500 m, denen wir gleich die Temperaturen im gleichen Niveau und die relative Feuchtigkeit beifügen:

3

	7. März 7h a.				7. März 7h a.		
	mm		%		mm		%
Lohn	710,3	5,°4	87	St. Gotthard	714,2	6°,6	—
Zürich	711,3	5,6	84	Faido	714,9	4,0	77
Einsiedeln	709,8	2,8	85	Bellinzona	714,2	0,0	96
Schwyz	710,3	4,6	76	Lugano	714,7	— 0,7	100
Altorf	711,5	3,0	84	Mendrisio	713,8	1,0	96
Andermatt	712,3	8,0	—				

Also starker Druck-Gradient von Norden zum Gotthard hin und die höchsten Temperaturen am Gotthard, die niedrigsten im südlichen Tessin und da auch die grössten Feuchtigkeiten der Luft.

Besonders hohe Temperaturen zeigen auch die hohen Stationen im Jura und den Vorbergen der Alpen, welche der warmen Luftströmung in der Höhe in erster Linie ausgesetzt sind: Ste. Croix 11° gegen 3° in Morges, Chaumont 8° gegen 7° in Neuchâtel, Weissenstein 6° gegen 1° in Solothurn, Uetliberg 7° gegen 5° in Zürich, Rigi 11° gegen 0° in Stanz und Rathhausen und 2° in Zug. Ueberhaupt erhebt sich im ebenern Teil der Schweiz zwischen Jura und Alpen und im untern Teil der Alpenthäler die reduzierte Temperatur wenig über 0°, während sie auf den Höhen durchweg über 5° steht.

Von 7h a. bis um 1h p. des 7. März hat sich nach unseren Isobaren für 500 m der barometrische Gradient am Gotthard und in Graubünden wesentlich verstärkt, indem sich der Druck im Tessin bis 716 mm erhöht hat, während derselbe auf dem Gotthard nahe gleich geblieben ist (714,4 mm) und auf dessen Nordseite zu einem tiefern lokalen Minimum 708,6 mm in Einsiedeln, Schwyz und Beatenberg abfällt. An der Stelle der Isobare von 710 mm verläuft jetzt im Nordwesten eine solche von 709 mm; die nächst höhere Isobare von 710 mm hat sich aber bis gegen die Alpen hin von ihr zurückgezogen und nähert sich ihr bloss noch im Osten. In dem weiten Raum zwischen beiden ist obiges Lokalminimum eingelagert. Im Tessin und im südlichen Graubünden aber drängen sich die Isobaren erheblich mehr, indem besonders in der letztern Gegend der Druck von Chur und Thusis mit 710 mm, rasch zu 714 mm auf dem Bernhardin und weiterhin bis 716 mm in Castasegna und in Bellinzona ansteigt. Damit hängt nun die bedeutende Verstärkung südwestlicher bis südöstlicher Winde nicht bloss auf den Höhen des Gotthard und Bernhardin, sondern auch in allen Thälern Graubündens und bis nach Sargans hinunter zusammen — wo Wolkenzug notiert ist, kommt er vorwiegend von Südwest, in der östlichen Hälfte aber von Süd, so z. B. in Altorf —; frischen Südost und Süd finden wir auch bereits in Engelberg, Altorf, Beatenberg, und auf dem Rigi ist der Wind von West nach Süd übergegangen. Dagegen haben wir schwache Winde in Rathhausen von Ost, in Stanz und Einsiedeln von Nordost, in Schwyz von West, in Glarus von Nordwest, welche mehr als die Windverhältnisse am Vormittag auf die Ausbildung kleinerer Druckminima in den einzelnen Thälern statt im Allgemeinen

hinweisen. Besonders deutlich ist dies im Engelberger- und Linththal, wo die Winde oben und unten im Thal gegen dessen Mitte hin wehen. Im Flachland der Schweiz und besonders im Jura haben sich die südwestlichen bis westlichen Winde mit der Vertiefung der Cyclone durchweg verstärkt.

Die Temperaturen sind fast überall mehr, als es dem normalen täglichen Gang entsprechen würde, gestiegen, am wenigsten am Südabhang der Alpen und auf den Höhen, am meisten in den nördlichen Alpenthälern und sodann im Flachland der Schweiz. Hier treffen wir im Niveau von 500 m Temperaturen von 14 bis 17°, während sie im Tessin nur wenig über 5° betragen. So ist denn auch im Tessin die Luft sehr feucht geblieben, 80—90%, der Himmel hat sich da bis zum Gotthard und Bernhardin hinauf bedeckt, ja in Castasegna regnet es bereits. Dagegen hat auf der Nordseite der Alpen die relative Feuchtigkeit auch mehr, als es der normale tägliche Gang erheischen würde, abgenommen und in einzelnen Alpenthälern sind bereits dem Föhn entsprechende Trockenheiten eingetreten, so in Altorf 23, in Auen 27, in Marschlins 31 und in Chur 32%, obschon nur die letztere Station bereits Föhnwetter meldet.

Im Laufe des Nachmittags bis zum Abend-Termin um 9^h p. entwickelt sich der Föhn weiterhin bei durchweg heiterem Himmel im unteren Rhonethal (Bex 35% bei 14°), im Linththal (Glarus 33% bei 13°), im Reussthal (Altorf 28% bei 14°, Schwyz 39% bei 12°) und im untern Rheinthal (Marschlins 38% bei 13°, Altstätten 27% bei 14°). Auch im Appenzellerland macht sich bereits der Föhn mit frischem Südwind bei hellem Himmel durch seine hohe Temperatur und Trockenheit bemerkbar (Trogen 36% bei 13°). Die Richtung und Geschwindigkeit des Windes, wie auch der Wolkenzug, sind fast überall nahe dieselbe geblieben, nur im untern Rheinthal hat die Stärke zugenommen. Die Druckverteilung ist auch um 9^h p. ziemlich dieselbe wie um 1^h p.; es hat sich nur die Isobare von 709 mm im äussersten Westen gegen den Genfersee hin gesenkt und dagegen in der Mitte über den Nordrand der Schweiz emporgehoben.

In dem erwähnten Föhngebiet hat sich die Trockenheit nordöstlich ausgebreitet, in der übrigen Schweiz ist es mit Ausnahme des untern Rhonethals wieder feuchter geworden; auch im Tessin ist dies geschehen, so dass es ausser in Castasegna auch in Faido, Splügen und Bellinzona regnet und der Himmel bis zum Gotthard und Bernhardin hinauf ganz bedeckt ist.

Das Pariser Bulletin von 8^h a. des 8. März ergiebt gegenüber demjenigen des vorigen Tages nur geringe Aenderungen der allgemeinen Situation. Das Sturmcentrum ist in die Nähe von London heruntergerückt und dementsprechend sind auch die Isobaren für 740 mm, 745 mm, etc. nach Süden fortgeschritten, so dass die Isobare von 755 mm (gleich derjenigen von 711 mm im Niveau von 500 mm) jetzt über das Hochgebirge der Alpen hingeht. Die Isobare von 760 mm ist ihr dadurch und ausserdem durch ein Vorrücken nach Norden über dem adriatischen Meer und Italien näher gekommen, so dass jetzt über ganz Italien und an der Südküste Frankreichs kräftige Südostwinde wehen, nur in der Nähe des Südabhangs der Alpen sind die Winde schwach und unbe-

stimmt, z. B. in Turin schwacher Nordwest. In Frankreich und Deutschland dauern die stürmischen Südwest-Winde fort.

Im Anschluss hieran zeigen unsere synoptischen Karten für die Schweiz im Niveau von 500 m an unserer Nordwestgrenze um 7^h a. des 8. März eine Isobare von 707 mm, d. h. ein Fallen des Barometers in dieser Gegend um nahe 2 mm seit 9^h p. des Vortages. Die Isobare von 708 mm hat einen analogen Verlauf wie die von 711 mm um 7^h a. vom gleichen Termin des Vortages. Wie jene enthält sie in ihrer Ausbuchtung ein lokales Minimum beim Vierwaldstättersee und ausserdem ein zweites im Appenzellerland mit Drucken bis 707 mm. Um den Gotthard und Bernhardin drängen sich die Isobaren ebenfalls noch stark aneinander, obschon im Tessin der Druck um 1 mm abgenommen hat. Im untern Rhonethal nimmt der Druck von Martigny bis nach Montreux auch um 3,4 mm ab.

Diese Druckverhältnisse haben eine Fortdauer und Ausbreitung des Föhns begünstigt. Die südlichen Winde haben sich in den Alpenthälern stellenweise bis zum Sturm verstärkt, so in Engelberg, Altorf, Sargans und Platta, nahezu auch in Trogen und demgemäss ist überall die Trockenheit der Luft unter Erhöhung ihrer Temperatur seit dem Vorabend noch gesteigert worden. Es zeigen: Engelberg 26% bei 12° reduzierter Temperatur, Altorf 26% bei 14°, Glarus 31% bei 18°, Auen 31% bei 13°, Einsiedeln 35% bei 12°, Trogen 31% bei 13° und Altstätten 24% bei 15°. In Schwyz ist zwar die Temperatur auch um 0°,3 gestiegen und die Feuchtigkeit um 1% seit dem Vorabend vermindert; es weht aber da um 7^h a. noch ganz schwacher NW, der erst um 11^h a. in heftigen Föhnsturm von SE umschlägt. Die Wolken ziehen wie am Vortage von SW bis S. Auf dem Bernhardin, St. Gotthard und Rigi weht noch ein kräftiger Süd, während die Winde im Flachland der Schweiz schwach und veränderlich erscheinen, die Temperaturen überall gesunken und die Feuchtigkeiten gestiegen sind. Im Jura haben wir mässigen bis starken Südwest. Auf der Südseite der Alpen hat sich die Feuchtigkeit bis zu den Kämmen hinauf vermehrt und ausgebreitet; es regnet oder schneit dort auf allen Stationen: Mendrisio, Lugano, Bellinzona, Faido, St. Gotthard, Castasegna und Bernhardin.

Zum Vergleich mit dem Zustand am gleichen Termin des Vortages stelle ich schliesslich für dieselben Stationen wieder die Barometerstände und Temperaturen im Niveau von 500 m und die relativen Feuchtigkeiten nachstehend zusammen:

	8. März 7^h a.			Absolute Höhe
	mm		%	m
Lohn	707,4	7°,1	87	645
Zürich	708,1	9,1	69	480
Einsiedeln	706,8	12,0	35	910
Schwyz	706,9	12,2	38	547
Altorf	708,5	14,2	26	454
Andermatt	712,4	7,3	—	1448

	8. März 7h a.			Absolute Höhe
	mm		%	m
St. Gotthard	714,2	2°,6	—	2100
Faido	715,2	5,0	97	722
Bellinzona	714,2	5,6	91	229
Lugano	715,1	5,4	97	275
Mendrisio	714,5	5,9	98	355

Einsiedeln liegt sehr nahe in der Mitte zwischen Lohn und Faido und zeigt also jetzt einen um 0,6 mm niedrigern Barometerstand als Lohn, aber um 7,4 mm niedrigern als Faido, während diese Differenzen 24 Stunden früher: 0,5 und 5,1 mm im gleichen Sinn waren. Die Entwickelung des Föhns hat also die Druckdifferenz zwischen Faido und Einsiedeln um 2,3 mm gesteigert. Dass trotz der grossen Höhendifferenzen die Reduktion des Barometers auf 500 m diese Verhältnisse nicht wesentlich beeinflusst hat, zeigt die Vergleichung der reduzierten Stände in Einsiedeln und Schwyz.

Von 7h a. bis 1h p. haben sich die beiden sekundären Depressionen mit einer Isobare von 707 mm und mit Drucken im Innern bis 706,6 mm in der Centralschweiz und im Appenzellerland vereinigt. Die Isobare von 708 mm geht vom Rheinthal um jene im Bogen bis Luzern herum und steigt dann nach Schaffhausen empor, von wo sie nochmals ins Thurgau herabgeht und dann jenseits der Nord- und Westgrenze der Schweiz sehr nahe ebenso verläuft wie die Isobare von 709 mm um 9h p. des 7. März. Wie dort zeigen sodann auch wieder der Weissenstein, Chaumont und Ste. Croix im Jura relativ um ungefähr 1 mm höhere, resp. zu hohe Stände. Die weiteren Isobaren von 709 bis 714 mm haben einen entsprechenden Verlauf wie um 7h a. behalten, nur sind sie am Gotthard und im Rhonethal etwas weniger, in Graubünden aber mehr gedrängt. Im untern Rhonethal ist ein lokales Minimum zu verzeichnen.

Diesen kleinen Veränderungen der barometrischen Gradienten gemäss hat bis um 1h p. der Föhn als Süd bis Südost, besonders in den östlichen Alpenthälern sich noch verstärkt, in der Centralschweiz aber eher etwas abgenommen. Die Temperaturen und relativen Feuchtigkeiten im Föhngebiet sind jetzt:

8. März	Temp.	Feucht.	1h p.	Temp.	Feucht.
		%			%
Bex	18°	34	Auen	15°	32
Zermatt	11	44	Glarus	18	26
Engelberg	12	38	Thusis	16	41
Stanz	16	34	Chur	17	34
Rathhausen	16	41	Marschlins	17	31
Altorf	17	31	Closters	14	29
Schwyz	16	32	Sargans	17	28
Einsiedeln	14	31	Altstätten	17	28
Zug	16	49	Trogen	16	31

Das Flachland der Schweiz, wo jetzt wie im Jura frische bis kräftige westliche Winde wehen, bildet bezüglich Temperatur und Feuchtigkeit den Uebergang vom Föhngebiet zum Jura und dem nordwestlichen Teil jenseits desselben, wo verhältnismässig niedrige Temperaturen 8—9° und hohe Feuchtigkeiten bis 80 % bei bedecktem Himmel stattfinden und wo es auch bereits in Morges, Ste. Croix, Neuchâtel, Weissenstein, Porrentruy, Schaffhausen regnet. Regen bei bedecktem Himmel dauert auf der Südseite der Alpen im Tessin und in Castasegna an.

Die Isobaren von 9h p. des 8. März zeigen eine allgemeine Zunahme des Drucks in der nördlichen Schweiz an und zwar um 1 mm im Nordwesten und bis zu 4 mm im Nordosten; dagegen hat derselbe im Südwesten um 1 mm und im südlichen Tessin um 0,5 mm abgenommen. Es ist dies durch eine Aufrichtung der Isobaren von 708 und 709 mm im Westen in mehr meridionale Lage geschehen, sowie durch die Bildung einer Isobare von 710 mm im Nordosten mit eingeschlossenem Druckmaximum von 711 mm im untern Linththal. Zwischen dieser Isobare von 710 mm und einer südlichen Einbuchtung der entsprechenden, von Süd-West nach Nord-Ost von Martigny über das Hochgebirge nach dem Prättigau verlaufenden Isobare finden wir noch über der Central-Schweiz ein lokales Druckminimum von 709 mm eingelagert.

Der Druckgradient ist daher überall geringer geworden, besonders um den Gotthard, und es hat daher auch fast überall die Stärke der Winde abgenommen und ist ihre Richtung unbestimmter geworden. Auf dem Gotthard und in Altorf haben wir zwar noch mässigen Süd, und ebenso auf dem Rigi, in Zug, in Einsiedeln, in Gliss, Platta, Thusis, Chur, Marschlins, Closters, Bernhardin, Splügen südliche Winde von geringer Stärke, in Glarus aber schwachen Ost, in Auen und Engelberg West, in Schwyz NW, in Beatenberg NE, in Altstätten N u. s. w. von unbedeutender Geschwindigkeit. Dementsprechend haben die spezifischen Föhnerscheinungen überall nachgelassen oder ganz aufgehört, wie die nachstehenden Temperaturen und Feuchtigkeiten im Föhngebiet zeigen:

8. März	Temp.	Feucht. %	9h p.	Temp.	Feucht. %
Bex	9°	65	Auen	7°	86
Zermatt	7	74	Glarus	5	87
Engelberg	6	90	Thusis	12	47
Stanz	6	90	Chur	12	43
Rathhausen	6	94	Marschlins	12	41
Altorf	10	65	Closters	8	58
Schwyz	8	78	Sargans	10	—
Einsiedeln	5	95	Altstätten	8	75
Zug	7	85	Trogen	7	85

Auch sonst hat die Feuchtigkeit der Luft bei sinkender Temperatur überall zugenommen, besonders im Norden der Schweiz, wo es bei bedecktem Himmel überall regnet

Im Süden ausser dem Wallis hat sich der anhaltende Regen auch noch bis zur Grimsel hin sowie zum Bernhardin und nach Splügen ausgedehnt. Heitern Himmel finden wir nur noch im untern Rhonethal, am Genfersee, in der Centralschweiz und von da zum Appenzellerland hin.

In der Nacht vom 8. März zu 7^h a. des 9. März hat sich in der Schweiz ein förmlicher Barometersturz vollzogen, so dass sich die im Pariser Bulletin von 8^h a. des 9. März gegenüber dem vom Vortage manifestierende südliche resp. südwestliche Ausbreitung des barometrischen Minimums über England, die in Südfrankreich und in Spanien ein Fallen des Barometers um nahe 5 mm. bewirkt hat, wohl auch erst in dieser Nacht vollzogen hat. Da der Luftdruck über Italien und nach Osten hin nahe derselbe geblieben ist, so ist eine Drehung des Windes in Oberitalien nach Ost und eine Verstärkung der südlichen Winde in Südfrankreich eingetreten.

In der Schweiz geht die Isobare von 711 mm (entsprechend der von 755 mm im Meeresniveau des Pariser Bulletins) jetzt durch das westliche Tessin bis zum Gotthard hinauf und von da längs der Gebirgskante über den Bernhardin zum südwestlichen Ende des Engadins hinunter. Der Druck hat also da seit dem Vorabend um 2 mm abgenommen und dasselbe ist auch im südöstlichen Tessin und südlichen Bünden der Fall, wo noch eine Isobare von 712 mm besteht.

Im Westen der Schweiz sind an die Stelle der Isobaren von 708 und 709 mm des Vorabends jetzt solche von 704 und 705 mm getreten, so dass da ein Fallen des Barometers um volle 4 mm stattgefunden hat. Im Nordosten aber, wo an Stelle des Druckmaximums von 711 mm ein östlich verschobenes, lokales Minimum von 704 mm getreten ist, ist das Barometer gar um 7 mm gesunken, und in der Centralschweiz, wo sich das lokale Minimum des Vorabends nur verstärkt hat, hat der Druck um 5 mm abgenommen. Trotz der Verminderung des Druckes im Tessin ist also seit dem Vorabend doch der Druckgradient nach dem Norden der Schweiz hin wieder stärker geworden und haben sich demgemäss die südlichen Winde auf den Alpenpässen, dann auch in den Thälern Graubündens, Appenzells und Glarus, sowie in Einsiedeln. Engelberg und im unteren Rhonethal bedeutend verstärkt, während sie im Reussthal eigentümlicher Weise nicht zugenommen haben. Da treten denn auch keine besonders bemerkenswerten Föhnerscheinungen auf, während sie sich in den ersteren Thälern wieder stark markieren, wie nachstehende Tabelle zeigt.

9. März	Temp.	Feucht. %	7^h a.	Temp.	Feucht. %
Bex	14°	40	Auen	14°	31
Zermatt	10	47	Glarus	16	27
Engelberg	13	31	Thusis	12	49
Stanz	4	92	Chur	13	42
Rathhausen	3	98	Marschlins	13	39

9. März	Temp.	Feucht. %	7h a.	Temp.	Feucht. %
Altorf	12	48	Closters	13	30
Schwyz	12	46	Sargans	14	—
Einsiedeln	12	36	Altstätten	14	28
Zug	4	93	Trogen	13	36

Heiteren Himmel zeigt sogar im Föhngebiet nur der äusserste Nordosten (Trogen), sonst ist das Wetter überall trüb und es regnet ausser im Tessin wie am Vorabend auf der Nordseite in Aarau, Schaffhausen und Lohn. Zur Vergleichung gebe ich nachstehend wieder die auf 500 m reduzierten Barometerstände und Temperaturen und die Feuchtigkeiten der Linie von Nord nach Süd:

	9. März mm	7h a.	Feucht. %	Absol. Höhe m
Lohn	704,6	7°,2	80	645
Zürich	705,4	7,0	83	480
Einsiedeln	703,7	12,3	36	910
Schwyz	704,0	11,9	46	547
Altorf	705,2	12,4	48	454
Andermatt	709,4	6,8	—	1448
St. Gotthard	711,2	5,0	—	2100
Faido	711,3	6,2	98	722
Bellinzona	711,0	6,7	95	229
Lugano	711,9	7,7	93	275
Mendrisio	711,8	7,7	92	355

Die Druckdifferenzen von Einsiedeln zu Lohn einerseits und zu Faido anderseits betragen jetzt: 0,9 und 7,6 mm, sind also im gleichen Sinne etwas grösser als 24 Stunden früher.

Eine sehr bedeutende Veränderung in der Verteilung und der Grösse des Luftdrucks tritt nun weiterhin im Intervall von 7h a. zu 1h p. des 9. März ein, indem von Nordwesten her der Druck erhöht, im Südosten aber vermindert wird. Wir finden auf der synoptischen Karte von 1h p. eine nach Westen offene Isobare von 706 mm im nördlichen Teil der Schweiz, die sich am Westende des Kantons Zürich bis nach Zug und dann weiterhin im Linththal bis nach Glarus senkt, um von da durch St. Gallen und Thurgau bis Frauenfeld heraufzugehen und dann nach Westen umzubiegen. Parallel zum letzern Ast verläuft eine Isobare von 705 mm zwischen Schaffhausen und Lohn hindurch längs des Bodensees bis nach Rorschach, geht durch das Appenzell hinunter bis ins Vorder-Rheinthal und dann mit Einbuchtungen ins Hinter-Rheinthal bis Thusis und ins Prättigau bis Closters, endlich bei Luziensteig wahr-

scheinlich ins Vorarlberg hinüber. Ein schwaches Minimum des Druckes von gleichem Betrag ist in der Zentralschweiz. Eine weitere Isobare von 705 mm finden wir im Südwesten, wo sie mitten durchs Waadtland hindurch geht, dann am Ostend des Genfersees ins untere Rhonethal sich senkt, längs des Nordabhangs des mittlern Rhonethals bis gegen Leuck hin und von da nach Süden verläuft. Parallel zu ihr nach Süden, hin dürfte noch eine Isobare von 704 mm da zu verzeichnen sein. Im Tessin endlich haben wir eine wahrscheinlich geschlossene Isobare von 709 mm, die bis über den Gotthard hinauf und östlich über den Bernhardin bis Chiavenna sich erstreckt und im Süden durch einen Bogen Bellinzona mit bloss 708,4 mm ausschliessend, bis Lugano geht. Mendrisio zeigt bereits 708,5 mm Druck. Isobaren von 708, 707 und 706 mm trennen obiges Maximum von den Isobaren-Aesten 705 mm im Westen und Osten. Die Druckdifferenz vom Tessin gegen die Centralschweiz hin hat sich also um 3 mm verringert, während sie gegen das Bündner Land nahe gleich geblieben ist. Obschon zur Zeit auf dem Gotthard und Bernhardin noch heftiger Süd weht, zeigen sich doch nur in Altorf und Closters bei frischem Süd, in Auen bei frischem Südwest, in Sargans bei mässigem Südost noch Spuren von Föhn, während er an andern Orten des Föhngebiets bereits schwächern und andern Winden Platz gemacht hat; so weht in Schwyz und Einsiedeln mässiger Nordwest, in Engelberg und Trogen leichter West, in Glarus frischer Nordost. Die Temperatur- und Feuchtigkeitsverhältnisse im Föhngebiet sind jetzt:

9. März	Temp.	Feucht. %	1^h p.	Temp.	Feucht. %
Bex	15°,1	64	Auen	12°,2	41
Zermatt	11,3	49	Glarus	12,6	52
Engelberg	9,5	76	Thusis	10,2	75
Stanz	11,9	57	Chur	10,9	70
Rathhausen	10,8	76	Marschlins	12,5	62
Altorf	13,8	34	Closters	12,1	47
Schwyz	11,5	65	Sargans	16,6	47
Einsiedeln	8,6	87	Altstätten	14,3	48
Zug	10,4	70	Trogen	10,1	77

Vergleichen wir diese Tabelle mit derjenigen vom gleichen Beobachtungstermin am vorigen Tage, so sehen wir unmittelbar, dass die Herrschaft des Föhns durchweg aufgehört hat. Dies bekundet sich auch dadurch, dass der Himmel in der ganzen Schweiz ganz oder doch nahezu bedeckt ist und dass es fast überall regnet, ausser im Rhonethal, im untern Rheinthal und in der Centralschweiz.

Das Steigen des Barometers setzt sich auch von 1^h p. bis 9^h p. in der ganzen Schweiz fort ausser im Tessin, wo es stationär geblieben ist. Im Südwesten beträgt dasselbe nahe 3 mm, im Norden 2 mm, in der centralen Schweiz 1 mm, so dass

zwischen dem jetzt nahe gleich hohen Druck im Süden der Alpen: 709 mm und an der Nordgrenze der Schweiz: 708 mm, in der Mittelschweiz ein Depressionsgebiet von 707 mm mit eingeschlossenem lokalen Minima von 706 mm existiert, was das Fortbestehen südlicher Winde im Tessin und auf den Alpenpässen und das nunmehrige Vorherrschen nördlicher Winde in der Nordschweiz und westlicher in der Westschweiz erklärt. Dort hat sich die Temperatur erhöht, im Norden aber erniedrigt. Der Himmel ist überall, ausser im Zermatthal, bis herunter nach Gliss bedeckt und mit Ausnahme des mittleren und unteren Rhonethals, der Centralschweiz um den Vierwaldstättersee und des untern Rheinthals melden alle Stationen Regen oder Schnee. An mehreren Orten ist der eintretende Regen von Gewittern begleitet. Damit sind wir, mit Ausnahme von Zermatt, wo bei stürmischem Südwest die Feuchtigkeit noch bis 38 % gesunken ist (in der Nacht tritt auch da Schneefall ein), am Ende des Föhns angelangt, wie auch die nachfolgende Tabelle es zeigt.

	9. März	9^h p.			9. März	9^h p.	
	mm		%		mm		%
Lohn	706,5	$5^0,5$	86	St. Gotthard	709,7	$5^0,6$	—
Zürich	707,4	7,0	87	Faido	709,3	7,2	93
Einsiedeln	705,3	3,8	87	Bellinzona	707,7	11,0	68
Schwyz	705,7	7,3	80	Lugano	709,7	11,7	69
Altorf	709,4 ?	7,2	84	Mendrisio	709,5	9,3	90
Andermatt	707,7	6,7	—				

Während also die Druckdifferenz: Lohn—Einsiedeln sich zu 1,2 mm vergrössert hat, beträgt diejenige von Faido-Einsiedeln nur noch 4,4 mm und die höchsten Temperaturen finden sich jetzt bei verminderter Feuchtigkeit südlich vom Gotthard.

Das Pariser Bulletin vom 10. März 8^h a. weist denn auch seit dem Vortag auf ein Fortschreiten des Hauptminimums zur Ostsee hin, wobei der Druck über Spanien und Südfrankreich bedeutend gestiegen, über Mittelitalien aber stationär geblieben ist. Die Winde sind überall schwach geworden.

Der Föhn vom 7. bis 9. März 1864 hat also durchweg die S. 4 und 5 als typische Eigenschaften desselben charakterisierten Erscheinungen gezeigt. Besonders bemerkt zu werden verdient der hohe Druck im Tessin und das lokale Druckminimum während der ganzen Zeit in der Centralschweiz, das aber nur von Föhn begleitet war, wenn die Druckzunahme von Einsiedeln—Schwyz bis Faido—Lugano oder allgemeiner über die Alpen herüber, mindestens 6 mm betrug. Hervorzuheben sind auch die hohen Temperaturen, welche sich am Morgen des 7. März, also einige Zeit vor Eintritt des Föhns auf allen Höhenstationen manifestiert haben. Der Wind in der Höhe ist nach dem Wolkenzug im Westen vorherrschend Südwest, im Osten mehr Süd.

Föhnsturm vom 6.—9. März 1872.

Der hohe Druck — bis 770 mm im Meeresniveau —, welcher sich nach dem Pariser Bulletin um 8h a. des 4. März bei östlichen Winden über Mitteleuropa manifestiert hatte, war bis zum gleichen Termin am 5. März infolge des Herannahens eines Minimums vom Atlantischen Ocean her an den Westküsten bereits stark abgeschwächt worden — in Irland und Schottland bis 755 mm — und infolge davon hatten sich dort die Winde unter Auffrischung nach Südost und Süd gedreht. In Süddeutschland, der Schweiz, Provence und Italien und östlich davon beträgt aber der Druck immer noch 770 mm und darüber.

Das Pariser Bulletin nun von 8h a. des 6. März, mit welchem Datum unsere Untersuchung über die Witterung in der Schweiz beginnt, zeigt eine weitere Verminderung des Luftdruckes an den oceanischen Küsten von Irland bis nach Spanien herunter (750 mm) und damit auch eine solche ins Land hinein an, wobei die Isobaren fast parallel zu den Meridianen verlaufen. In ganz Frankreich und Spanien sind bereits stürmische südöstliche Winde eingetreten, während in Italien schwache Winde verschiedener Richtung wehen.

Die Isobare von 765 mm verläuft nach dem Pariser Bulletin einfach nord-südlich durch die Schweiz von Basel nach Turin herunter und würde in dem für unsere synoptischen Karten angenommenen Niveau von 500 m Seehöhe nahe der Isobare von 720 mm entsprechen. Nach unserer synoptischen Karte von 7h a. des 6. März hat aber innerhalb der Schweiz diese Isobare von 720 mm keineswegs einen so einfachen Verlauf, sondern geht von Basel über Zürich und Marschlins bis ans Ostende Graubündens und von da durchs Engadin über den Bernhardin, St. Gotthard, das obere Rhonethal, das südliche Bern und Freiburg, durch die Mitte des unteren Rhonethals bei Bex erst wieder nach Süden ins Savoyische herunter. Dieser eigentümlichen Ausbuchtung der Isobare von 720 mm folgt dann auch westlich die Isobare von 719 mm in geringer Distanz nach, um sich dann erst im Kanton Bern bis zum Bielersee hinauf von ihr zu entfernen. Eine Zunge niedrigern Drucks mit Isobare von 718 mm scheint weiterhin von Westen her bis ins Bernische Mittelland in diese Ausbuchtung hineinzuragen. Im Tessin folgen noch Isobaren von 721 und 722 mm gegen Süden hin auf diejenige von 720 mm und endlich manifestiert sich noch ein lokales Druckminimum bis 718 mm innerhalb des Gebietes höhern Drucks als 720 mm im Appenzellerland von St. Gallen bis zum Rheinthal und Bodensee hin.

Der Hauptdruckgradient ist also in der Schweiz von Südost nach Nordwest gerichtet, und es wird daher auch in der Höhe der Atmosphäre eine südliche bis südöstliche Luftströmung über der Schweiz wie in Frankreich eingetreten sein, obschon in den Niederungen derselben noch schwache Winde verschiedenster Richtung wehen. Für jene spricht der kräftige Südost auf dem Simplon und die frischen Südwinde bis Südostwinde auf dem Gotthard, Rigi und Bernhardin, der Grimsel, dem Berninapass,

sowie dem hochgelegenen Churwalden und Closters. Der kräftige Südwest in dem 1379 m hohen Platta ist jedenfalls auch nur ein durch die Thalrichtung abgelenkter Südwind und wohl ebenso auch der Südwest auf dem Grossen St. Bernhard. Demgemäss wird in Closters schon um 7^h a. Föhn gemeldet, was mit der bereits auf 39 % herabgesunkenen relativen Feuchtigkeit übereinstimmt. Auch in Platta, Auen und Chur sind die Feuchtigkeiten der Luft mit 53, 49 und 46% bereits relativ gering geworden. Ausser diesen Punkten zeigen alle übrigen Stationen, und namentlich die der Nord- und Westschweiz, hohe Feuchtigkeiten bis zu 100%. Die Temperaturen sind durchweg noch niedrig, doch auf den Höhen einige Grade über Null (auf 500 m reduziert) z. B. Rigi $+6^0$, in der Tiefe einige Grade unter Null, z. B. Sursee, Einsiedeln, Aarau etc. -3^0. Im obern Engadin haben wir im Thal sogar Temperaturen von -6 und -7^0, während der Bernina- und Julierpass 0^0 und $+2^0$ zeigen, ebenso Monte Generoso 4^0 gegen 1^0 in Lugano. Der Himmel ist überall, ausser in dem nordöstlichen Teil der Schweiz und im südlichsten Tessin, wolkenlos.

Unsere synoptische Karte von 1^h p. des 6. März zeigt im Niveau von 500 m über Meer einen analogen Verlauf der Isobaren wie um 7^h a.; es ist nur ihr Wert nördlich der Alpen durchweg um 3 mm kleiner als am Vormittag, während die Druckabnahme im Tessin bloss 1 mm betragen hat, was eine bedeutende Erhöhung des Druckgradienten vom Tessin über den Gotthard nach der Centralschweiz sowie nach Graubünden hin zur Folge hatte. Dies hat denn auch zur Entwicklung des Föhns in den meisten nördlichen Alpenthälern im Laufe des Vormittags geführt. In Closters und Thusis hat der Süd, in Churwalden der Südost bis zum Grade 3 zugenommen, in Reichenau und Marschlins weht schon mässiger Süd, in Altorf erst schwacher Süd. Auen meldet um 12 ½ Mittags den Eintritt des Föhns als Sturm, während er als solcher erst um 2½ p. in Glarus erscheint. Um 1^h p. ist in Glarus noch schwacher Nordwest notiert, und in Linthkolonie schwacher NNW bei Wolkenzug aus Süd. In Sitten bemerken wir, der Thalrichtung entsprechend, mässigen Ostwind, während in Martigny bereits frischer Südost weht, in Bex aber tritt der Föhn als Südsturm erst um 5^h p. ein. Auf dem Gäbris im Appenzell hat sich auch schon mässiger Süd eingestellt, in Trogen, Rorschach, St. Gallen aber wehen noch frische nördliche Winde, entsprechend dem lokalen Minimum daselbst. Die Temperatur- und Feuchtigkeitsverhältnisse im Föhngebiet sind zur Zeit:

6. März	Temp.	Feucht. %	1^h p.	Temp.	Feucht. %
Bex	13°,9	50	Glarus	9°,6	46
Martigny	14,1	27	Linthkolonie	9,9	40
Engelberg	9,9	44	Thusis	14,0	25
Luzern	10,1	63	Chur	14,0	25
Gersau	5,8	79	Marschlins	13,8	31

8. März	Temp.	Feucht. %	1h p.	Temp.	Feucht. %
Altorf	13°,4	32	Closters	10°,6	29
Schwyz	9,5	57	Sargans	5,0	—
Einsiedeln	9,9	56	Altstätten	2,4	99
Interlaken	10,4	55	Trogen	5,3	60
Auen	11,4	26	Gäbris	11,5	—

Der Föhn ist also im Rhonethal noch nicht über Martigny, im Reussthal nicht über Altorf, im Linththal nicht über Auen, im Rheinthal nicht über Marschlins heruntergekommen.

Am Südabhang der Alpen hat sich der Himmel bis hinauf zum Bernhardin und St. Gotthard bedeckt, auf der Nordseite, das Wallis inbegriffen, ist näher am Gebirge teilweise Bewölkung eingetreten und nur der Nordwesten, sowie Bünden um Chur herum zeigt noch heiteren Himmel.

Von 1h p. zu 9h p. des 6. März hat weiterhin überall in der Schweiz ausser im südlichsten Teil von Tessin ein Fallen des Barometers stattgefunden und zwar im Nordwesten bis zu 3 mm. Die Isobaren zeigen immer noch einen analogen Verlauf mit lokalem Druckminimum im Appenzellerland, die Druckdifferenz zwischen Nordwest und Südost beträgt aber jetzt nach ihnen 9 mm. Diesem stärkeren Gradienten entsprechend hat sich die Stärke der südlichen Winde im untern Rheinthal, Linththal, Reussthal, und untern Rhonethal, sowie im Appenzellerland erheblich vergrössert resp. der Föhn mit seinen begleitenden Erscheinungen sich verstärkt und verbreitet. Dies zeigt folgende Zusammenstellung der Temperatur- und Feuchtigkeitsverhältnisse im engern und weitern Föhngebiet:

6. März	Temp.	Feucht. %	9h p.	Temp.	Feucht. %
Bex	10°,3	33	Auen	8°,4	37
Martigny	9,6	35	Glarus	10,5	30
Engelberg	9,4	28	Linthkolonie	10,1	35
Luzern	8,5	45	Thusis	8,2	50
Gersau	9,4	38	Chur	8,6	46
Altorf	10,2	38	Marschlins	8,3	51
Schwyz	10,0	33	Sargans	10,0	—
Einsiedeln	8,5	39	Altstätten	9,3	35
Interlaken	8,0	59	Closters	6,3	50
Trogen	7,9	39	St. Gallen	8,7	35
Gäbris	5,8	—	Rorschach	8,3	43

Mit der Entwicklung des Föhns hat sich auf der Südseite der Alpen auch in gewohnter Weise die schon um 1^h p. eingetretene Bedeckung des Himmels zu Regen verdichtet. Es regnet abends in Lugano, Bellinzona, S. Vittore, Castasegna und schneit in Sils-Maria auf dem Monte Generoso und Julier. Auch in den übrigen Teilen der Schweiz ist der Himmel weniger hell geworden.

Nach dem Pariser Bulletin von 8^h a. des 7. März hat sich das Druckminimum über Irland um 10 mm vertieft, während die Isobare von 765 mm nur wenig nach Osten zurückgewichen ist. Der Gradient der immer noch nahe von Nord nach Süd verlaufenden Isobaren ist daher grösser geworden, und demzufolge haben sich die südlichen bis südöstlichen Winde in Spanien, Frankreich und Deutschland, sowie an den Nordküsten des Mittelmeeres verstärkt und sind auch in Italien herrschend geworden.

Im Westen der Schweiz verläuft nach dem Bulletin die Isobare von 765 mm, der im Niveau von 500 m eine solche von ungefähr 711 mm entsprechen würde. In der That zeigt unsere synoptische Karte von 7^h a. des 7. März eine Isobare von 711 mm am Westrande der Schweiz, die aber auch wieder eine tiefe Einbuchtung bis zum Thuner- und Brienzersee und bis zum Vierwaldstättersee aufweist und noch ein lokales Minimum dieses Betrags bei Glarus besitzt. Da im Tessin der Druck nur wenig abgenommen hat, so beträgt jetzt auch wieder die Druckdifferenz zwischen Nordwest und Südost 9 mm, aber dies auf viel kürzere Distanz als am Vorabend, nämlich schon von Bellinzona über den Gotthard bis zu den obgenannten Seen der Centralschweiz. Dieser stärkere Gradient hat nämlich in der Centralschweiz und auf den Alpenpässen eine Erhöhung der Windgeschwindigkeit zur Folge gehabt und damit an vielen Orten eine Zunahme des Föhns, die sich in der folgenden Tabelle ausspricht:

7. März	Temp.	Feucht. %	7^h p.	Temp.	Feucht. %
Bex	12°,2	31	Auen	9°,8	33
Martigny	9,1	40	Glarus	11,6	30
Engelberg	9,5	36	Linthkolonie	10,3	37
Luzern	5,9	68	Thusis	8,6	59
Gersau	11,1	34	Chur	8,2	53
Altorf	10,6	34	Marschlins	9,1	49
Schwyz	10,7	35	Sargans	9,0	—
Einsiedeln	7,5	49	Altstätten	10,9	31
Interlaken	7,2	74	Closters	8,3	44
Trogen	9,1	35	St. Gallen	10,8	26
Gäbris	7,2	—	Rorschach	10,5	34

Hiernach sind höchstens in Luzern und Interlaken die Manifestationen des Föhns erheblich zurückgegangen, während sie im Osten allgemein stärker geworden sind.

Auf der Südseite der Alpen und deren Pässen regnet oder schneit es bei ganz bedecktem Himmel in Lugano, Bellinzona, S. Vittore, Castasegna, auf dem Monte Generoso, Bernhardin, St. Gotthard, Grimsel, Simplon, dann auch in Platta, Andermatt und im Westen in Murten und Ste. Croix. Auch in der übrigen Schweiz ist der Himmel bedeckt oder wenigstens stark bewölkt.

Wie unsere Isobarenkarte von 1ʰ p. des 7. März zeigt, hat vom Morgen zu Mittag durch weiteres Fallen des Barometers im Nordwesten bei gleich bleibendem Druck im Südosten die Druckdifferenz zwischen beiden noch um 2 mm zugenommen und damit bei nahe gleicher Konfiguration der Isobaren (lokale Minima bei Glarus und Trogen) die Windgeschwindigkeiten allgemein bis nahe zum Sturm verstärkt, so dass sich die Föhnwirkungen mit südöstlichen Winden, wie die folgende Tabelle klar macht, weit hinaus verbreitet haben:

7. März	Temp.	Feucht. %	1ʰ p.	Temp.	Feucht. %
Bex	16°,9	31	Auen	12°,2	33
Martigny	13,2	30	Glarus	15,7	25
Engelberg	12,1	29	Linthkolonie	13,7	28
Luzern	16,3	25	Thusis	11,9	31
Gersau	13,2	28	Chur	13,0	31
Altorf	14,5	30	Marschlins	14,5	35
Schwyz	14,1	25	Closters	10,6	34
Einsiedeln	14,1	29	Sargans	14,0	—
Interlaken	15,8	33	Altstätten	13,4	24
Trogen	12,1	30	Beatenberg	14,2	36
Gäbris	11,3	—	Muri	15,6	28
St. Gallen	14,0	25	Zürich	16,0	26
Rorschach	13,3	45	Aarau	17,0	27
Kreuzlingen	15,3	30	Lohn	16,5	21

Im Norden und Westen der Schweiz und auch an einigen Orten des Föhngebietes hat sich der Himmel aufgeheitert; es regnet nur noch in Lugano, Bellinzona, S. Vittore, Castasegna und auf dem M. Generoso, also bloss im äussersten Süden.

Bis um 9ʰ p. des 7. März erfolgt zwar eine Abnahme der Druckdifferenz um 2 mm, indem das Barometer im Nordwesten um 1 mm steigt und im Südosten um 1 mm fällt. Da aber bei annähernd gleichem Verlauf der Isobaren der Unterschied immer noch 9 mm beträgt, so hat die Windstärke im Allgemeinen nur wenig abgenommen und demgemäss hält auch der Föhn durchweg noch unvermindert an. Die nachstehende Tabelle giebt wieder die bezüglichen Temperaturen und Feuchtigkeiten im Föhngebiet:

7. März	Temp.	Feucht. %	9h p.	Temp.	Feucht. %
Bex	13°,5	31	Auen	10°,4	30
Martigny	10,2	47	Glarus	12,3	25
Engelberg	10,1	35	Linthkolonie	11,5	29
Luzern	12,3	30	Thusis	9,4	42
Gersau	11,5	31	Chur	10,0	37
Altorf	11,6	35	Marschlins	10,2	43
Schwyz	12,5	24	Closters	7,7	40
Einsiedeln	10,3	36	Sargans	11,4	—
Interlaken	11.8	33	Altstätten	11,4	68?
Trogen	9,5	32	St. Gallen	10,3	28
Gäbris	7,5	—	Zürich	11,5	38
Rorschach	11,6	28	Lohn	9,3	42

Obschon um 1h p. an den meisten dieser Orte die Temperaturen höher und die Feuchtigkeiten geringer waren, so sind doch diese Daten von 9h p. für den Föhn bezeichnender, weil schon allein dem täglichen Gang bei den erstern ein wesentlicher Anteil in diesem Sinne zukommt.

In der Bewölkung des Himmels sind im Allgemeinen seit Mittag keine wesentlichen Aenderungen erfolgt, wohl aber hat sich im Süden ausser Regen in der Tiefe wieder Schneefall auf dem Bernhardin, St. Gotthard und Simplon eingestellt.

Für den ganzen 7. März sind die im Westen und stellenweise auch im Norden, wohin nämlich der Föhn mit seinen Ausläufern nicht gelangt, auftretenden schwachen oder mässigen westlichen und nördlichen Winde hervorzuheben, da sie dem Südost im Föhngebiet nahezu entgegengesetzt sind. Das von Nordwesten her bis zur Centralschweiz sich hereinstreckende Gebiet niedrigen Drucks ist jedenfalls an diesen Verhältnissen als Ursache mit beteiligt.

Betrachten wir für den Morgen des 8. März wieder zunächst die allgemeine Wetterlage nach dem Pariser Bulletin, so sehen wir, dass sich das Druck-Minimum über Irland vom Vortage ohne erhebliche Vertiefung nordwärts nach Schottland fortbewegt hat, dass die Isobaren sich daher im Norden etwas nach Osten in Frankreich und über der Schweiz dagegen nach West gebogen haben und dass sich zugleich die Isobare von 760 mm nach Osten zurückgezogen hat. Infolge dessen hat von 8h a. des 7. März zu 8h a. des 8. März der Druck in Italien und im Osten der Schweiz abgenommen, dagegen im Westen derselben und in Süd-Frankreich sich verstärkt, was eine Abnahme der Windstärke in diesen Gegenden bewirkte.

Nach unsern synoptischen Karten vom 7. März und derjenigen von 7h a. des 8. März haben sich die letztern Vorgänge in der Schweiz zum Teil schon im Laufe des 7. März vollzogen und auch von 9h p. des 7. März zu 7h a. d e s 6. M ä r z fortgesetzt.

Wir finden daher am letzten Datum die Isobaren über den Alpen etwas weniger gedrängt als am Vorabend und dementsprechend sind auch die Windstärken stellenweise etwas schwächer geworden. Ohne wesentliche Aenderung in der Konfiguration der Isobaren (auch die lokalen Minima verbleiben an ihren Stellen) nimmt der Druck im Nordwesten der Schweiz im Laufe des Tages bis um 9^h p. weiterhin langsam um 2 mm zu, während er im Südosten nahe gleich bleibt. Dementsprechend sind auch ausser um Mittag, wo in der östlichen Schweiz die Isobaren sich lokal etwas mehr drängen, die Manifestationen des Föhns bis zum Abend geringer geworden, wie die folgende Tabelle der Temperaturen und Feuchtigkeiten aus dem Föhngebiet zeigt.

	Temperatur			Feuchtigkeit		
8. März	7^h a.	1^h p.	9^h p.	7^h a.	1^h p.	9^h p.
Bex	11,6	17,3	12,2	35	30	47
Martigny	8,8	16,2	9,7	91	27	44
Engelberg	10,1	12,0	6,5	35	40	61
Luzern	8,7	15,5	7,9	48	33	58
Gersau	11,5	13,5	11,9	32	44	41
Altorf	11,3	14,6	12,7	34	30	31
Schwyz	10,2	14,0	11,0	38	32	37
Einsiedeln	6,7	14,3	4,3	51	32	77
Interlaken	11,4	15,0	9,4	37	37	61
Auen	11,4	13,6	9,2	27	28	42
Glarus	12,9	17,1	8,4	28	26	56
Linthkolonie	10,3	13,7	11,3	35	30	38
Trogen	10,1	13,3	11,0	31	33	37
Gäbris	8,1	11,5	8,5	–		·
Altstätten	11,7	15,9	12,3	68	24	31
St. Gallen	10,5	15,3	10,7	32	30	35
Thusis	9,2	14,3	8,2	44	35	58
Chur	9,2	14,6	7,6	48	33	55
Marschlins	9,3	12,7	10,9	48	42	45
Closters	3,9	10,3	4,9	71	35	80
Sargans	10,0	13,4	10,8	– –	– –	– –
Lohn	7,7	15,6	9,1	43	29	49

Die Bewölkung des Himmels hat seit dem Vortage bis um 7^h a. des 8. März zugenommen, so dass er nur im äussersten Nordosten noch hell erscheint. Es regnet resp. schneit in Lugano, Bellinzona, S. Vittore, Castasegna, Simplon, Gotthard, Bernhardin, Andermatt und Splügen-Dorf. Gegen Mittag hellt sich der Himmel im Norden und bei Martigny auf, und Niederschläge finden nur noch in Lugano, Bellinzona und

S. Vittore statt. Bis zum Abend erfolgt sodann bei zunehmendem Druck von Nordosten her in der ganzen Schweiz nördlich von den Alpenkämmen eine fast vollständige Aufheiterung des Himmels, während er auf der Südseite derselben bis zu den Kämmen hinauf ganz bedeckt bleibt und die Niederschläge wieder zugenommen haben. Dies, sowie die verhältnismässig geringen Feuchtigkeiten an den meisten Orten der vorstehenden Tabelle zeigt, dass der Föhn immerhin noch seine Herrschaft behauptet.

Wenn wir nun die synoptische Karte des Pariser Bulletins für 8^h a. des 9. März betrachten, wonach der Luftdruck im Osten der Schweiz und zugleich auch im Westen über dem Biskayschen Golf hoch (760 mm), über dem Mittelmeer und über der Nordsee niedriger (755 mm) ist (das Sturmcentrum ist ganz nach Norden gerückt), und demgemäss überall ausser an der Südküste Frankreichs schwache Winde verschiedener Richtung wehen, so sollte man glauben, dass der Föhn in der Schweiz unter solchen Verhältnissen ganz aufgehört haben müsse. Die eigentümliche Druckverteilung in der Schweiz selbst, welche nach unsern Isobarenkarten vom 9. März im Niveau von 500 m derjenigen der Vortage trotz des allmählichen allgemeinen Steigens des Barometers noch ganz analog bleibt, ja um 1^h p. sogar ein ausgebreitetes Druckminimum in der Centralschweiz mit einer Druckdifferenz von 6 mm von da zum Gotthard aufweist, lässt die südlichen Winde mit Föhnerscheinungen an vielen Orten noch bis zum Nachmittag andauern und erst am Abend hat das Auseinandertreten der Isobaren — Druckdifferenz über den Gotthard herüber nur noch 4 mm — ein allgemeines Aufhören des Föhns zur Folge, wie dies aus der nachstehenden Tabelle der Orte, wo er überhaupt am 9. März noch auftrat, hervorgeht:

	Temperatur			Feuchtigkeit		
9. März	7^h a.	1^h p.	9^h p.	7^h a.	1^h p.	9^h p.
Martigny	6,°7	17,°0	10,°8	75	32	57 %
Engelberg	12,0	14,2	9,5	36	46	59
Altorf	14,2	17,4	14,0	26	29	41
Glarus	3,3	17,6	8,6	77	32	75
Trogen	11,3	18,0	9,8	36	38	61
Gäbris	9,7	14,3	11,8	—	-	
Altstätten	6,8	17,5	10,7	59	36	61
Sargans	8,0	17,0	14,0	-	—	—
Chur	7,8	15,6	11,2	52	38	59
Churwalden	7,0	14,2	9,9	51	36	66

Im Gefolge des abnehmenden Föhns hat sich schon vom 8. März 9^h p. bis zum 9. März 7^h a. der Himmel über der nördlichen Schweiz wieder grösstenteils bedeckt und bleibt es auch den ganzen Tag. Die Niederschläge im Süden der Alpenkette und auf den Pässen nehmen zu, so dass es um 9^h p. regnet oder schneit in: Monte Gene-

roso, Lugano, Bellinzona, St. Vittore, Castasegna, Sils-Maria, Bevers, Bernina, Julier, Bernhardin, Splügen-Dorf, St. Gotthard, Andermatt, Grimsel und Simplon.

Der Föhn vom 6.—9. März 1872 unterscheidet sich von dem vorher betrachteten im März 1864 hauptsächlich dadurch, dass der Haupt-Druckgradient bei ihm mehr von Südost nach Nordwest als wie damals von Süd nach Nord gerichtet ist. Die typischen Erscheinungen in den Alpenthälern sind aber dieselben wie damals, höchstens hat, wo dies möglich ist, der Wind mehr eine östliche Richtung. Auffallend ist bei diesem Föhn der beständige schwache Nordwest in Chur, während alle umliegenden Orte wie Marschlins, Closters, Churwalden, Reichenau, Thusis durchweg starke südliche bis südöstliche Winde aufweisen, und beim Föhn von 1862 in Chur stets starker Südwest beobachtet wurde. Entweder ist dieser Nordwest aus einem, am mächtigen Bergstock des Calanda gegenüber Chur reflektierten Südost entstanden, der selbst aus dem Thal der Plessur herauswehte, oder der untere Gegenwind zu diesem.

Für die Theorie des Föhns scheint folgendes analoge Verhalten der Föhne vom März 1864 und 1872 im Linththal bemerkenswert. Am 7. März 1864 hatten wir bereits Föhn in Auen um 1^h p., nämlich bei frischem Südost $14^0,0$ und 27 % Feucht., während in Glarus bei schwachem Nordwest die Temperatur zwar schon $15^0,3$, die relative Feuchtigkeit aber erst 43 % war; am Abend um 9^h zeigte Auen bei kräftigem Südost $11^0,8$ und 34 %, Glarus bei frischem Südost $13^0,4$ und 33 %. also jetzt auch schon Föhn. An beiden Orten hielt dann der Föhn als kräftiger Südost mit hoher Temperatur und geringer Feuchtigkeit bis zum Nachmittag des 8. März an, war aber um 9^h p. verschwunden, indem da bei schwachem West in Auen und leichtem Ost in Glarus die Temperatur auf $6^0,8$ resp. $5^0,2$ gesunken und die relative Feuchtigkeit auf 86% gestiegen war. Am folgenden Morgen hatte sich wieder an beiden Orten Föhn als kräftiger, trockener und sehr warmer Süd resp. Südost (Auen $13^0,7$ und 31 %, Glarus $15^0,6$ und 27%) eingestellt, der aber schon um Mittag nahezu und am Abend jedenfalls ganz wieder aufgehört hatte, wo es bei nördlichen Winden sogar regnete.

Am 6. März 1872 trat um 12^h 30^m mittags in Auen der Föhn ein, so dass um 1^h p. bei kräftigem Süd bereits $11^0,4$ und 26 % notiert wurden, während zu gleicher Zeit in Glarus schwacher Nordwest, $9^0,6$ und 46% Feuchtigkeit beobachtet waren. Erst um 2^h 30^m manifestierte sich der Föhn auch unten im Thal bei Glarus, wo dann um 9^h p. bei stürmischem Südost die Temperatur auf $10^0,5$ gestiegen und die Feuchtigkeit bis 30 % gesunken war, während bei fortgesetztem kräftigen Süd in Auen $8^0,4$ und 37 % Feuchtigkeit notiert wurden. Der Föhn setzte sich hierauf als kräftige, ja stürmische südliche Winde mit hoher Temperatur und sehr geringer relativer Feuchtigkeit an beiden Orten bis zum Abend des 8. März fort, wo dann um 9^h p. bei bloss frischem Süd die Temperatur in Auen zwar noch $9^0,2$, die Feuchtigkeit aber schon 42%, in Glarus bei ganz schwachem Süd jene auf $8^0,4$ gefallen und diese auf 56 % gestiegen war. Am folgenden Tag fand nur am Mittag gewissermassen noch eine Tendenz zur Föhnbildung statt.

Ein entsprechender analoger Verlauf zeigt sich endlich auch im Gang der Barometer-Differenz: Glarus—Auen, gemäss der nachstehenden Tabelle dafür:

1864	7. März			8. März			9. März		
Glarus—	7	1	9	7	1	9	7	1	9
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
—Auen	2,0	*1,0*	**0,6**	**0,3**	**—0,1**	1,5	**—0,1**	0,8	1,2

1872	6. März			7. März			8. März			9. März		
Glarus—	7	1	9	7	1	9	7	1	9	7	1	9
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
—Auen	0,4	*—0,1*	**—0,7**	**—1,0**	**—1,8**	**—1,0**	**—0,8**	**—1,2**	*—0,4*	—0,1	**—1,1**	—0,2

Hält man diese Barometerdifferenzen mit den vorhergehenden Bemerkungen über den Eintritt des Föhns an beiden Orten zusammen, so sehen wir, dass die barometrische Differenz: Glarus—Auen, dieselbe als positiv vorausgesetzt, abnimmt, sowie in Auen der Föhn eintritt und noch weiter sich vermindert, wenn derselbe dann auch in Glarus erscheint, und dass beim Verschwinden des Föhns dieselbe umgekehrt wieder anwächst. Zur Erleichterung der Uebersicht sind die Barometerdifferenzen, wo nur in Auen der Föhn auftritt, cursiv und die, wo er bereits an beiden Orten eingetreten ist, fett gedruckt. Angesichts der Unsicherheit der absoluten Meereshöhen und der Correktionen der Barometer in jenen Jahren kann ich nicht entscheiden, an welchem der beiden Orte dabei der absolute Luftdruck grösser ist. Das aber können wir also sagen, sowie der Föhn in Auen sich manifestiert, so bewirkt er ein verhältnismässig noch stärkeres Fallen des Barometers in Glarus, und dieser Effekt nimmt zu, wenn er bis ins Thal bei Glarus heruntergekommen ist.

Auch bei diesem Föhn von 1872 haben wir endlich vor seinem Eintritt eine Steigerung der Temperatur an den hochgelegenen Orten bemerkt, allerdings weniger auffallend als bei dem von 1864.

Föhnsturm vom 30. Januar bis 3. Februar 1885.

Am 28. Januar 1885 herrschte nach dem Wetter-Bulletin der Schweizerischen meteorologischen Centralanstalt im Alpengebiet noch allgemein helles Frostwetter bei hohem Druck (770 mm im Meeresniveau), obschon sich bereits ein starkes barometrisches Minimum im Norden Irlands (737 mm) entwickelt hatte, das von starken Südwestwinden über den britischen Inseln und Nordwest-Frankreich begleitet war. Bis zum Morgen des 29. Januar vertiefte und erweiterte sich dieses Minimum unter Auftreten stürmischer Südwinde an den Küsten von England bis nach Spanien herunter und südwestlicher, kräftiger Winde in Norddeutschland, wo es auch stellenweise bereits regnet. Bei nur um 5 mm vermindertem hohen Druck dauert der Frost mit hellem

Wetter in der Schweiz und in Norditalien an, wo noch östliche bis südliche Winde vorherrschen.

Nach dem Bulletin der Centralanstalt von 8h a. des 30. Januar (im Westen nach dem Pariser Bulletin ergänzt) haben sich unter weiterer Ausbreitung des Minimums besonders nach Süden hin in ganz Frankreich und dem nördlichen Spanien stürmische Südwinde eingestellt, die Isobare von 706 mm im Meeresniveau verläuft am Westrand der Schweiz ins Mittelmeer herunter, und südöstlich von ihr findet über Italien, Oesterreich etc. noch hoher Druck bis 765 mm statt. Im Alpengebiet und in Norditalien herrscht noch überall Frost (ohne Reduktion der Temperatur auf das Meeresniveau).

Betrachten wir jetzt unsere synoptische Karte für 7h a. des 30. Januar mit den auf 500 m Höhe reduzierten Barometerständen und Temperaturen, so bemerken wir am Westrande der Schweiz eine Isobare von 714 mm (annähernd 760 mm im Meeresniveau entsprechend), die aber sehr gewunden erscheint und ebenso ist auch die Isobare von 720 mm (nahezu 765 mm im Meeresniveau) längs des Südostrandes der Schweiz mit starken Ein- und Ausbuchtungen versehen. Da im nördlichen Tessin noch eine Isobare von 721 mm kompariert und die Isobare von 715 mm in der Centralschweiz sich stark dem Gotthard nähert, so besteht da bereits eine barometrische Differenz von 6 mm, welche stürmische südliche Winde im obern Rhein-, Reuss- und Aarethal, resp. beginnenden Föhn zur Folge hat.

30. Januar 7h a.	Temp.	Feucht.
Platta	6°,8	38 %
Gurtnellen	8,3	22
Guttannen	9.6	39

Während im Flachland der Schweiz nördlich von der Alpenkette durchweg noch Frost herrscht mit Temperaturen bis — 10° im Nordosten, und ebenso im äussersten Osten sowie im Tessin bis Airolo hinauf und im Oberwallis die Temperatur unter Null ist, stellenweise tiefer als — 5°, ist im grössern Teil von Graubünden, im Appenzellerland, im mittlern und untern Wallis und besonders an allen höher gelegenen Stationen bereits eine starke Erwärmung durch die südlichen bis westlichen Winde in der Höhe eingetreten. Auf das Niveau von 500 m reduziert haben wir nämlich auf dem Chaumont 3°,3, in Beatenberg 5°,7, Andermatt 4°,2, St. Gotthard 0°,1, Bernhardin 1°,0, Rigi-Kulm 6°,5, Grächen 3°,9, St. Bernhard 0°,7, Säntis 5°,4, Gäbris 6°,1. Uebrigens haben schon am 29. Januar einige hochgelegene Orte beim Eintritt westlicher bis südlicher Winde relativ hohe Temperaturen und teilweise auch geringe Feuchtigkeiten gezeigt, wie folgende Zusammenstellung beweist:

1885	Temperatur			Feuchtigkeit		
29. Januar	7	1	9	7	1	9
Säntis	2°,7	6°,9	4°,7	48	44	37
Gäbris	6,7	13,3	7,9	13?	6?	8?

1885 29. Januar	Temperatur 7	 1	 9	Feuchtigkeit 7	 1	 9
Rigi	7,4	9,6	7,3	27	21	21
Platta	1,0	9,0	7,0	76	40	46
Beatenberg	4,9	11,3	4,1	70	53	57
Chaumont	3,1	9,5	2,9	94	82	95

Dass das Haarhygrometer in Gäbris offenbar viel zu geringe Feuchtigkeitsangaben machte, haben wir schon früher bemerkt.

Der Himmel ist am Morgen des 30. Januar in der ganzen Schweiz fast wolkenlos trotz hoher relativer Feuchtigkeit in den Niederungen.

Wie unsere synoptische Karte von 1^h p. des 30. Januar zeigt, hat sich der barometrische Gradient über dem ganzen Hochgebirge seit dem Morgen erheblich verstärkt, indem an der Nordwestgrenze der Schweiz das Barometer um 3 mm, im Tessin aber nur um 1 mm gefallen ist; ausserdem hat sich um den Vierwaldstättersee ein kleines lokales Minimum gebildet, während das im Appenzellerland verschwunden ist. Durch ein weiteres Sinken des Barometers um 3 mm im Nordwesten und ein solches von bloss 1 mm im Südosten bis um 9^h p. des 30. Januar verstärkt sich die barometrische Differenz beider Grenzen zu diesem Termin auf 11 mm und zugleich treten zwei kleine Minima auf, eines am Vierwaldstättersee und eines bei Glarus. Demgemäss haben sich die südlichen Winde auf den Alpenpässen, besonders am Gotthard verstärkt und hat sich der Föhn im Laufe des Tages nach und nach im ganzen Föhngebiet entwickelt. Ausser den oben für 7^h a. angeführten Orten manifestiert er sich als stürmischer Süd oder Südost um 1^h p. in Altorf, Elm und Sargans, um 6^h p. tritt er in Glarus ins Thal und auch in Altstätten auf und um 9^h p. hat er sich auf das untere Rhonethal, das untere Linththal und untere Rheinthal ausgebreitet. Wo Wolkenzug beobachtet worden, schwankt er zwischen S und W. Nur in Airolo ist er als NW notiert. Die bezüglichen Temperatur- und Feuchtigkeitsverhältnisse erhellen aus der nachstehenden Zusammenstellung:

1885 30. Januar	Temperatur 1^h p.	 9^h p.	Feuchtigkeit 1^h p.	 9^h p.
Aigle	4°,9	11°,1	75%	36%
Sépey	10,6	7,8	42	39
Beatenberg	10,7	7,4	48	51
Engelberg	6,0	9,2	52	42
Guttannen	10,3	8,2	42	55
Gurtnellen	11,0	9,6	25	50
Altorf	13,8	11,4	23	36
Einsiedeln	4,2	— 1,9	50	80
Gersau	3,9	6,1	65	46

1885 30 Januar	Temperatur 1h p.	9h p.	Feuchtigkeit 1h p.	9h p.
Linthal	6,0	8,4	85%	66%
Elm	12,2	8,8	27	42
Glarus	2,6	9,4	58	36
Linthkolonie	4,0	7,7	90	77
Davos-Platz	11,9	4,5	39	70
Wiesen	12,4	4,2	38	74
Ragatz	12,5	7,3	36	42
Sargans	12,0	— 3,0	43	50
Wallenstadt	14,7	11,9	—	—
Altstätten	— 2,5	10,9	90	33
Gäbris	12,5	8,2	—	—
Trogen	11,1	10,3	43	63

Hieraus ersehen wir, dass das Vorrücken des Föhns von 1h bis 9h p. gegen die Thalenden hin an den gesperrt gedruckten Orten zugleich von einer Abschwächung seiner charakteristischen Eigenschaften an den rückwärts gelegenen Stationen begleitet ist. Die 174 m tiefer als das frühere Auen gelegene Station in Linthal notierte zwar den Eintritt des Föhns um 4h p., indessen scheint die Windstärke dort keinen hohen Betrag erreicht zu haben und demgemäss ist auch die Steigerung der Temperatur und Verminderung der Feuchtigkeit eine viel geringere als z. B. früher in Auen und jetzt auf der neuen Station in Elm. In Elm haben wir auch schon um 1h p. typischen Föhn, der sich dann wohl hauptsächlich durch das Sernfthal hinab nach Glarus fortgepflanzt hat.

Was die Bewölkung betrifft, so ist der Himmel um 1h p. im Föhngebiet, in der Nordostschweiz, im Engadin und obern Thal des Tessin noch fast durchweg heiter, dagegen hat sich derselbe im Westen und im südlichen Teil von Tessin bedeckt. Bis um 9h p. aber hat die Bewölkung allgemein zugenommen, im Tessin ist der Himmel überall ausser in Airolo bedeckt, es regnet in Genf, Rivera Bironico, San Vittore und schneit auf dem St. Bernhard und Bernhardin.

Das Bulletin der Centralanstalt von 8h a. des 31. Januar (auch wieder nach dem Pariser Bulletin ergänzt) zeigt gegenüber dem des Vortages eine allgemeine Abnahme des Luftdrucks infolge einer Vertiefung des Minimum-Centrums über Irland um 10 mm. Doch hat in Ober-Italien der Druck sich bloss um ungefähr 5 mm verringert, also der Gradient von da nach Irland sich entsprechend verstärkt, was an den atlantischen Küsten die Süd- bis Südwestwinde zur vollen Sturmstärke entwickelte.

Nach unserer Isobaren-Karte für 7h a. des 31. Januar ist die Isobare von 708 mm, die sich am Vorabend am Nordwest-Rande der Schweiz befand, bis zu den Alpen vorgerückt und es hat sich ausser dem lokalen Minimum am Vierwaldstättersee noch im

Nordosten ein solches von 707 mm gebildet, während dasjenige bei Glarus ausgefüllt erscheint. Da zugleich im Tessin der Druck nur um 1—2 mm gefallen ist, so ist der Gradient von da zur Centralschweiz eher noch etwas stärker geworden als am Vorabend. Daher Fortdauer und stellenweise sogar Verstärkung des Föhns über Nacht. Im engern Föhngebiet: Reussthal, Linthal, Appenzellerland und unteres Rhonethal findet, wie eine spätere Zusammenstellung des Nähern zeigen wird, bei Temperaturen von über 10° eine bedeutende Austrocknung der Luft und heiterer Himmel statt, während im Jura und Flachland, in Oberwallis und im Tessin niedrige Temperatur, bis 5° unter Null, mit hoher Feuchtigkeit und Bewölkung sich paart. Es schneit in Lugano, Rivera Bironico, San Vittore, Airolo, auf dem Bernhardin und St. Gotthard und regnet in Genf.

Von 7^h a. zu 1^h p. des 31. Januar ist im ganzen Nordwesten der Schweiz wieder ein erhebliches Steigen des Barometers erfolgt, so dass jetzt eine Isobare von 709 mm am Nordwestrande derselben verläuft; im Tessin ist der Druck eher etwas gefallen, und es sind daher die Isobaren erheblich auseinandergerückt. Besonders ist dies mit den Isobaren von 710 und 711 mm der Fall; indem sich aber in ihrem Zwischenraum wieder über dem Vierwaldstättersee und über dem Appenzeller- und Glarnerland je lokale Minima von 709 mm und darunter eingelagert haben, besteht vom Tessin aus über die Alpen herüber doch noch eine Druckdifferenz von 8 mm, welche den Föhn mit seinen specifischen Eigenschaften erhält. Dem täglichen Gang und einer Auffrischung der Südwestwinde in der Westschweiz entsprechend ist die Temperatur nördlich von den Alpen überall bei abnehmender Feuchtigkeit und Bewölkung gestiegen, während es auf der Südseite bis zu den Alpenpässen hinauf und ebenso im Engadin bei ganz bedecktem Himmel schneit.

Bis um 9^h p. des 31. Januar steigt das Barometer in der ganzen Schweiz einschliesslich des Tessin um 2 mm an, und da auch die lokalen Minima am Vierwaldstättersee und beim Wallensee verblieben sind, so bleibt der Gradient über das Gebirge derselbe wie um 1^h p. und damit auch der Föhn im Wesentlichen unverändert. In dem oberwähnten engern Föhngebiet erhält sich die Temperatur bei relativer Trockenheit der Luft zwischen 5—9°, während sie im Norden wieder etwas unter Null gesunken ist. Ausser auf der Südseite der Alpen, den Alpenpässen und dem Jura hat die Bewölkung eher seit Mittag etwas abgenommen. Es regnet in Liestal, Neuchâtel, Locarno und Lugano und schneit auf dem Julier, Bernhardin, in Faido und Airolo.

Der Wolkenzug ist in der ganzen nordwestlichen Schweiz vom Genfer- bis zum Bodensee hin Südwest, in der centralen und südöstlichen Schweiz aber Süd, ausser in Airolo, wo wieder Nordwest als solcher notiert ist.

Im weiteren Föhngebiet sind an diesem Tage die Temperaturen und Feuchtigkeits-Verhältnisse, sowie die Windverhältnisse folgende:

1885 31. Januar	Temperatur 7h	1h	9h	Feuchtigkeit 7h	1h	9h	Ganze Tag
Cuves	8°,6	10°,6	3°,9	35%	33%	46%	—
Aigle	11,7	11,8	9,9	22	37	26	SE-Sturm
Sépey	8,7	9,8	4,5	35	57	55	7h a. S-Sturm
Beatenberg	5,7	9,9	3,1	60	58	67	starker SSE
Engelberg	8,3	9,5	6,5	41	35	43	stürm. SE
Guttannen	7,8	6,9	6,4	57	63	56	stürm. SE
Gurtnellen	9,2	8,2	8,2	37	48	37	stürm. S
Altorf	10,4	12,4	8,8	35	30	36	stürm. S
Einsiedeln	11,6	7,5	0,1	25	45	45	7h a. stürm. S
Gersau	11,7	9,0	5,9	27	43	50	SE—SW
Linthal	6,0	8,8	7,0	68	59	73	kräftiger S
Elm	8,6	8,8	6,6	40	39	42	stürm. SE
Glarus	10,5	11,8	8,9	42	41	38	stürm. S.
Linthkolonie	10,9	14,8	8,3	66	81	92	stürmischer E
Ragaz	9,1	12,1	7,9	48	47	55	SW—SE
Sargans	5,0	14,0	9,0	39	57	48	stürm. S
Altstätten	10,8	12,4	8,4	31	32	36	„
Gäbris	9,1	11,4	5,7	18?	15?	23?	„
Trogen	11,3	9,9	8,1	63	79	64	S-Sturm ausser 1h p.

Wenn wir für den Morgen des 1. Februar zunächst wieder das Bulletin der Centralanstalt ins Auge fassen, so ergiebt sich, dass seit dem Vortage überall in Europa das Barometer um ungefähr 5 mm gestiegen ist, indem ohne Verminderung seiner Tiefe das Depressionscentrum von Irland nach dem Norden von Schottland vorgerückt ist. Die Druckgradiente haben dadurch keine wesentlichen Aenderungen erlitten, so dass noch überall im Westen die stürmischen Südwinde fortdauern.

Unsere synoptische Karte von 7h a. des 1. Februar weist gegenüber dem Vorabend auf keine erheblichen Aenderungen in der Luftdruckverteilung hin, indem nur im Südosten der Druck um 1 mm gestiegen ist. Demgemäss dauern auch in der Schweiz die stürmischen Winde fort, und der Föhn macht sich an einigen Orten wie Elm, Glarus, Einsiedeln, Gersau, Gurtnellen, Ragaz, Sargans mehr, an andern wie Gäbris, Trogen, Engelberg, Altorf, Linthal, Altstätten, Aigle weniger geltend. Hohe Temperaturen von 5—10° finden wir nur im Föhngebiet, wo auch der Himmel noch stellenweise heiter ist. In den übrigen Teilen der Schweiz gehen die Temperaturen bis Null herunter, der Himmel ist bedeckt und es regnet nicht blos auf der Südseite der Alpen, sondern auch nördlich davon an 15 Stationen, und auf den hochgelegenen Stationen wie Säntis, Rigi, Bernhardin, St. Bernhard, Grächen schneit es.

Bis um 1^h p. des 1. Februar hat sich gemäss unserer synoptischen Karte für diesen Termin die Situation insofern geändert, als bei gleich gebliebenem Barometerstand im Südosten, im Nordwesten der Druck um 1 mm gestiegen ist. Das lokale Minimum um den Vierwaldstättersee hat sich bis zum Wallensee hin ausgebreitet, und der Föhn ist im Reussthal, Glarner- und Appenzellerland wieder stärker geworden. Da treffen wir denn auch durchweg über 10° betragende, ja bis 15° gehende Temperaturen und bei geringer Feuchtigkeit schwach bewölkten Himmel, während er in der übrigen Schweiz bei Temperaturen unter 10° ganz bedeckt ist und es, ausser in Rivera Bironico, San Vittore und Castasegna, auch an 16 Stationen zwischen Alpen und Jura regnet.

Ein weiteres Steigen des Barometers erfolgt bis um 9^h p. des 1. Februar und zwar um 3 mm im Nordwesten und um 1 mm im Südosten und, obschon um den Vierwaldstättersee noch ein lokales Druckminimum besteht, so ist jetzt die Druckdifferenz von da zum Tessin nur noch wenig mehr als 5 mm, was an den meisten Orten das allmähliche Ersterben des Föhns zur Folge hatte. Dagegen ist ausser im Jura und im Tessin Aufheiterung des Himmels eingetreten und der Regen hat auf der Nordseite der Alpen fast ganz aufgehört.

Für den Wolkenzug gilt dasselbe wie am Tage vorher.

Die Temperatur- und Feuchtigkeitsverhältnisse im Föhngebiet für diesen Tag giebt die folgende Zusammenstellung:

1885	Temperatur			Feuchtigkeit		
1. Februar	7	1	9	7	1	9
Aigle	8°,7	8°,8	7°,7	53%	52%	56%
Guttannen	7,2	9,0	8,6	56	57	57
Engelberg	5,0	10,4	2,9	54	44	81
Gurtnellen	8,8	10,6	9,6	40	37	46
Altorf	10,0	12,8	6,6	39	43	63
Gersau	6,9	11.9	3,7	56	35	89
Einsiedeln	4,4	7,2	3,1	52	38	70
Linthal	4,0	11,0	2,0	87	51	86
Elm	8,4	10,8	6,2	38	39	57
Glarus	3,8	13,6	2,2	71	40	95
Sargans	4,8	13,0	6,0	42	53	42
Altstätten	8,5	14,0	2,4	41	31	93
Gäbris	6,5	11,1	6,5	22?	20?	39?
Trogen	7,3	11,7	5,3	71	60	100

Die Steigerung des Luftdrucks im nordwestlichen Teil der Schweiz im Laufe des 1. Februars um nahe 5 mm ist, wie das Bulletin der Centralanstalt vom Morgen des 2. Februar lehrt, hauptsächlich dem Fortschreiten des Druckminimums über Schottland

nach Norden längs der norwegischen Küste beizumessen. Dies, sowie der Umstand, dass um 8^h a. des 2. Februar an der Westküste Irlands ein neues barometrisches Minimum mit 730 mm aufgetreten ist, hat ein Aufrichten der Isobaren und ein Auseinanderrücken derselben mit abnehmender Windstärke in der Nähe der Schweiz zufolge, während unter dem Einfluss des neuen Minimums die südlichen bis südwestlichen Winde über den britischen Inseln und im Nordwesten Frankreichs sich wieder bis zur vollen Sturmstärke entwickelt haben. Der hohe Luftdruck, 765 mm und darüber, dauert in Italien und östlich davon fort.

Unsere synoptische Karte von 7^h a. des 2. Februar weist im Vergleich mit der des Vorabends hauptsächlich auf eine allgemeine Zunahme des Druckes in der Schweiz hin, die im Südosten 2 mm, im Nordwesten aber nur 1 mm beträgt. Vom Tessin zum lokalen Druckminimum am Vierwaldstättersee hat sich die Druckdifferenz wieder bis zu 6 mm gesteigert, was eine neue Entwicklung des Föhns vorbereitet. Es haben sich daher im Föhngebiet die Temperaturen überall über Null gehalten, ja das Thermometer steht an vielen Orten desselben noch ebenso hoch wie am Vorabend, 8—9°; der Himmel hat sich ausser im südlichen Tessin aufgehellt, er ist sogar fast überall wolkenlos. Es regnet nur in Locarno. Die Winde sind aber durchweg noch schwach und veränderlicher Richtung.

Im Laufe des Vormittags haben sich die Winde durch Steigerung des Druckgradienten jedenfalls verstärkt und ist auch der Föhn in den Thälern wieder aufgetreten, indessen habe ich über den Zeitpunkt seines Eintritts keine Angaben finden können. Um 1^h p. des 2. Februar herrscht nach unserer synoptischen Karte heftiger Föhn im ganzen Föhngebiet, frische Südwinde wehen auf dem Bernhardin und St. Gotthard und kräftige Südwestwinde auf dem Rigi und Säntis. Demgemäss ist da überall die Temperatur ungewöhnlich hoch, bis 15°, und die Feuchtigkeit sehr gering (bis 23% unter Ausschluss der irrigen geringern Angabe von Gäbris). Hoch, bis 10°, sind auch noch die Temperaturen im Nordwesten, gehen dagegen in der ebenen Schweiz zwischen Jura und Alpen und im Tessin bis zu 5° ja bis 3° herunter. Der Himmel ist wieder teilweise bewölkt, im Westen und im Tessin fast ganz bedeckt; es schneit auf dem Bernhardin. Dies Alles findet seine Erklärung aus der Druckverteilung um 1^h p., wornach der Druck im Tessin seit dem Morgen um 1 mm, im Nordwesten aber um volle 4 mm gefallen ist. Lokal niedrigen Druck von 713 mm finden wir wieder am Vierwaldstättersee und am Wallensee und daher von da zur Isobare von 722 mm im nördlichen Tessin eine barometrische Differenz von 9 mm.

Diese bedeutende Druckdifferenz steigert sich aber bis um 9^h p. des 2. Februar noch zu vollen 11 mm, indem im Nordwesten der Druck weiterhin bis zu diesem Termin um 4 mm, im Tessin aber nur um 2 mm gesunken ist. Heftige Südwinde wehen jetzt auf dem Bernhardin, St. Gotthard und Rigi, und auf dem Säntisgipfel stürmt es von Südsüdwest. Der Föhn mit seinen begleitenden Erscheinungen hat sich denn auch fast überall noch verstärkt. Ganz besonders auffallend sind die mit Rücksicht auf den täg-

lichen Gang ungewöhnlich hohen Temperaturen im Föhngebiet; in Aigle, Sépey, Château d'Oex, Engelberg, Platta, Elm, Linthal, Glarus, Wald, Rorschach sind sie sogar absolut höher als um 1h p. Noch interessanter wird das Verhalten der Temperatur-Verteilung, wenn man nach den auf 500 m Höhe reduzierten Thermometerangaben Isothermen für dieses Höhenniveau konstruiert. Gemäss der beiliegenden Isothermenkarte für 9h p. des 2. Februar zieht sich eine Isotherme von 10° vom Ostende des Bodensees längs dem ganzen Rheinthal und Rhonethal durchweg auf dem Kamme und dem südlichen Abhange des Hochgebirges bis nach Aigle im untern Rhonethal hin und geht dann längs des Nordabhangs der Alpen mit einer Ausbuchtung bis zum Rigi und durch das westliche St. Gallen wieder zum Bodensee zurück. Innerhalb dieser schmalen, den grössern Teil des Föhngebietes in sich fassenden Zone erhebt sich die Temperatur in den Thälern des Nordabhanges stellenweise bis zu 15°. Von ihr drängen sich sodann die Isothermen ausser im bernischen gebirgigen Mittelland eng zusammen, so dass die Isotherme von 5° noch nahe am Gebirge verläuft und im breiten Flachland der Schweiz nur Variationen von 5 bis 2° vorkommen, im nordwestlichen Jura steigt die Temperatur wieder bis 5° an. Im Süden von jener Zone von 10° drängen sich die Isothermen nur im Wallis bis zum St. Gotthard hin etwas enger zusammen, so dass auf dem, dasselbe nach Süden einschliessenden Hochgebirge nahezu die Isotherme von 2° erreicht wird. Da dasselbe am Gotthard und an dem Graubünden nach Süden begrenzenden Hochgebirge der Fall ist (Oberwallis und Gotthard zeigen sogar Temperaturen unter 0°), so findet der stärkste thermische Gradient nach Süden zu am Gotthard statt, während in Graubünden die Isothermen weit auseinander treten. Im Tessin herrschen durchweg um 2° schwankende Temperaturen.

Auf die kurze Strecke zwischen Luzern und Gersau haben wir so um 9h p. im gleichen Niveau bei heiterem Himmel infolge der Föhnwirkung am letztern Orte eine Temperaturdifferenz von 11°, zwischen Reckingen im Oberwallis und Aigle im Unterwallis sogar eine solche von 19° bei ganz bedecktem Himmel an beiden Orten.

Der Himmel ist am Abend des 2. Februar überall ausser um den Vierwaldstättersee und im untern Linthal stark bewölkt oder ganz bedeckt, es regnet in Genf, Lugano, Rivera Bironico und San Vittore und schneit in Airolo, Faido, auf dem Gotthard und Bernhardin.

Der Wolkenzug manifestiert sich ebenso wie am Vortage.

Im weiteren Föhngebiet sind an diesem Tage die Temperatur- und Feuchtigkeitsverhältnisse folgende:

1885	Temperatur			Feuchtigkeit		
2. Februar	7h	1h	9h	7h	1h	9h
Rigi-Kulm	6°,8	10°,2	8°,6	45%	30%	45%
Davos-Platz	—1,9	10,1	8,1	99	37	58
Wiesen	1,7	10,2	8,9	91	61	58
Platta	1,4	7,8	8,0	74	51	65

1885 2. Februar	Temperatur 7h	 1h	 9h	Feuchtigkeit 7h	 1h	 9h
Gäbris	7°,9	11°,7	9°,7	18%?	6%?	13%?
Beatenberg	6,9	12,3	10,9	59	53	46
Wildhaus	7,6	11,7	11,3	—	—	—
Guttannen	8,2	10,8	9,0	58	49	63
Sépey	5,3	11,1	11,3	61	28	36
Engelberg	2,5	11,0	12,1	80	31	34
Château d'Oex	2,8	8,5	10,7	70	46	25
Elm	3,3	11,8	11,9	60	27	38
Einsiedeln	1,4	11,8	8,4	65	40	20
Trogen	8,7	12,5	11,7	75	54	55
Gurtnellen	8,9	12,0	11,4	41	32	44
St. Gallen	2,9	13,7	13,1	77	28	31
Linthal	1,0	11,0	11,4	80	57	53
Ebnat	0,0	13,6	8,7	—	—	–
Wald	2,9	8,8	10,8	72	56	40
Sargans	5,0	13,4	7,0	39	42	31
Glarus	0,0	13,4	13,6	93	28	37
Altstätten	4,7	15,1	14,0	62	23	30
Rorschach	0,2	15,3	15,8	—	—	—
Altorf	6,6	14,8	13,4	58	28	34
Gersau	4,0	14,9	14,7	79	24	30
Wallenstadt	6,7	14,7	14,7	—	—	—
Linthkolonie	4,1	10,3	10,1	97	80	74
Aigle	6,4	14,8	16,1	56	19	19

Die Orte sind in dieser Tabelle, abweichend von früher, nach ihren absoluten Höhen angeordnet, um zu zeigen, dass die Reduktion der Temperaturen auf das gemeinsame Niveau von 500 m keine erheblichen Fehler bewirkt haben kann. Auffallend und daher zweifelhaft sind in dieser Zusammenstellung die relativ hohen Feuchtigkeiten in Linthal gegenüber denen in Elm bei nahe gleichen Temperaturen an beiden Orten. Für 9h p. des 2. Februar findet man auch die Verteilung der relativen Feuchtigkeit durch Linien gleicher relativer Feuchtigkeit in einer Karte neben der Isothermenkarte dargestellt. Der verwandte Verlauf beider Linien ist unverkennbar.

Vom Morgen des 2. zu dem des 3. Februar hat in der allgemeinen Wetterlage nach dem Bulletin der Centralanstalt insofern eine Veränderung stattgefunden, als das Centrum der Cyclone bei gleicher Tiefe desselben von Irland zum nördlichen Schottland fortgeschritten ist, die Isobare von 770 mm zwar im Osten noch am gleichen Orte geblieben ist, dagegen die von 765 mm in ihrem südlichen Teil sich bis nach Griechen-

land zurückgebogen hat und diejenige von 760 mm jetzt durch Oesterreich nach Mittel-Italien verläuft. Die Isobaren sind daher im Westen beträchtlich auseinander getreten, so dass die Winde in Frankreich und Deutschland schwächer geworden sind; nur im Alpengebiet sind sie noch stürmisch geblieben, da dort durch die bedeutende Annäherung der nahe von West nach Ost verlaufenden Isobaren von 755 und 750 mm ein starker Druckgradient von Süd nach Nord besteht. In der Schweiz ist darnach seit dem Vortage das Barometer um 11—12 mm gefallen.

Nach unserer synoptischen Karte von 7^h a. des 3. Februar hat die Nacht vom 2. auf den 3. Februar an diesem schon im Laufe des 2. erfolgten Fallen des Barometers sich im Nordwesten nur noch mit ungefähr 4—6 mm beteiligt, im Südosten dagegen mit 5—7 mm. Die lokalen Minima um den Vierwaldstätter- und beim Wallensee haben sich bedeutend vertieft, nämlich um 7 resp. 6 mm, und im Tessin ist stellenweise das Barometer bis um 8 mm gefallen, am Südabhang des Hochgebirges aber nur um etwa 6 mm, so dass sich der Druckgradient über das Gebirge herüber gegen den Vorabend eher noch etwas verstärkt hat, und so sehen wir denn am Morgen des 3. Januar die südlichen Winde im Föhngebiet noch in ungeschwächter Sturmstärke fortdauern. Bemerkenswert ist aber, dass der Sturm auf dem Säntis und Rigi von der mehr südlichen Richtung des Vorabends wieder nach Südwest sich gewendet hat. In den Thälern herrscht durchweg noch starker Föhn und die Isothermen im Niveau von 500 m zeigen noch ganz dieselbe besondere Verteilung der Wärme, wie wir sie für den Vorabend geschildert haben, am Gotthard und im westlichen St. Gallen drängen sich dieselben sogar noch mehr aneinander und die Temperaturen schwanken innerhalb der Schweiz noch um volle 15°. Die Bewölkung hat sich nicht wesentlich verändert, dagegen haben die Niederschläge zugenommen, indem es ausser in Genf auch in Lausanne, Platta, Göschenen, Gurtnellen und Lugano mehr oder minder stark regnet, ferner auf dem Chaumont, Gotthard, Bernhardin und Julier, sowie in Andermatt, Airolo, Faido, S. Vittore, Castasegna und Rivera Bironico schneit.

Dies deutet bereits auf das nahe Ende des Föhns hin, das denn auch durch eine totale Aenderung der Luftdruckverteilung bis um 1^h p. des 3. Februar zu diesem Termin bereits eingetreten ist. Unsere synoptische Karte von 1^h p. zeigt zwar noch tiefe lokale Druckminima um den Vierwaldstättersee und beim Wallensee und ein ebensolches am Nordende der Schweiz, indem aber im Südosten eine Druckverminderung von 4 mm eingetreten ist, haben die Druckgradienten überall abgenommen und nur vom Engadin nach dem Glarnerland hin beträgt die Druckdifferenz auf kürzere Strecke noch 6 mm. Die unregelmässige Druckverteilung lässt indessen auch da keine stürmischen Föhnwinde mehr zur Geltung kommen. Immerhin macht sich im Davos, Prättigau, mittleren und unteren Rheinthal bis zum Bodensee herunter die erwärmende Wirkung der südlichen Winde durch hohe Temperaturen und dadurch geltend, dass da noch keine Niederschläge eingetreten sind, während es sonst auf fast allen Stationen der Schweiz regnet oder schneit.

Dieser gewöhnliche Ausgang des Föhns vollzieht sich nun ganz bis 9h p. des 3. Februar, zu welchem Termin, wie unsere betreffende synoptische Karte zeigt, nur noch Druckdifferenzen von 2—3 mm innerhalb der Schweiz vorkommen und entsprechend durchweg nur schwache südwestliche bis nordwestliche Winde wehen. Der Himmel ist ohne Ausnahme auf allen Stationen bedeckt, auch regnet oder schneit es überall, ausser im mittleren Rhein- und Rhonethal. Die Temperaturen im Niveau von 500 m variieren in der ganzen Schweiz nur noch um 5° gegen 19° am gleichen Termin des Vortages. Im Wolkenzug zeigen sich auch an diesem Tage keine erheblichen Aenderungen; es tritt nur gegen Abend im Osten der Süd gegen West- und Nordwestwind zurück. Auffallend ist bei diesem Föhn der beständige nordöstliche Wolkenzug in Schaffhausen und ebenso das Vorherrschen nördlicher Winde in der Tiefe, während Lohn auch bei nördlichen Winden in der Tiefe durchweg südwestlichen Wolkenzug aufweist.

Zum Vergleich mit der Tabelle des Vortages gebe ich nachstehend in gleicher Anordnung und Ausdehnung eine entsprechende der Temperaturen und Feuchtigkeiten im Föhngebiet für diesen Tag:

1885	Temperatur			Feuchtigkeit		
3. Februar	7^h	1^h	9^h	7^h	1^h	9^h
Rigi-Kulm	7°,6	2°,9	— 0°,7	55%	100%	100%
Davos-Platz	9,5	11,4	2,5	60	62	99
Wiesen	9,2	10,1	3,3	62	70	100
Platta	6,8	4,0	2,6	69	96	100
Gäbris	10,1	6,5	0,9	16?	50?	100
Beatenberg	8,1	5,3	1,5	59	87	100
Wildhaus	11,8	9,0	6,4	—	—	—
Guttannen	7,4	5,6	2,2	74	91	100
Sépey	9,1	4,2	1,1	46	99	100
Engelberg	12,0	7,1	2,3	32	67	100
Château d'Oex	6,1	5,5	1,5	49	71	95
Elm	10,8	8,3	2,0	43	60	97
Einsiedeln	5,4	6,1	3,6	58	80	90
Trogen	12,3	8,5	2,1	59	89	100
Gurtnellen	9,0	7,5	3,0	62	86	96
St. Gallen	12,9	8,5	1,5	36	75	95
Linthal	12,4	8,0	1,2	40	92	100
Ebnat	11,8	7,4	1,4	—	—	—
Wald	3,9	7,7	1,5	76	76	96
Sargans	6,0	13,0	4,0	39	59	40
Glarus	13,8	8,7	1,6	38	69	96
Altstätten	11,0	9,7	2,4	47	62	100

1885 3. Februar	Temperatur 7^h	 1^h	 9^h	Feuchtigkeit 7^h	 1^h	 9^h
Rorschach	12,6	11,4	2,1	—	—	—
Altorf	12,8	10,4	3,4	38	57	90
Gersau	14,7	8,9	3,7	39	55	89
Wallenstadt	13,7	9,7	4,7	—	—	—
Linthkolonie	10,5	7,9	3,0	91	97	99
Aigle	12,3	6,2	3,1	35	71	85

Nur in Sargans und Aigle bleibt also um 9^h p. die Feuchtigkeit noch erheblich unter 90 %.

Auch bei diesem Föhn ergiebt sich wieder sowohl im Linthal als im Reussthal, dass derselbe zuerst am obern Thalschluss eintritt und sich von dort allmählich thalabwärts gegen die Oeffnung fortpflanzt, und ebenso zeigen die folgenden Zusammenstellungen der barometrischen Differenzen der höher oben und tiefer unten im Thal gelegenen Stationen, dass die Differenz der unteren gegen die obere Station, dieselbe als positiv vorausgesetzt, beim Eintritt des Föhns abnimmt, resp. negativ wird und zwar stärker, wenn er bereits an beiden Orten sich manifestiert:

1885	30. Januar 7	 1	 9	31. Januar 7	 1	 9	1. Februar 7	 1	 9	2. Februar 7	 1	 9	3. Februar 7	 1	 9
	mm														
Glarus—Elm	+1,1	*−0,5*	**−2,7**	**−2,8**	**−1,0**	**−0,5**	*+0,2*	**−1,4**	+1,0	+0,8	**−1,8**	**−1,0**	**−2,9**	+1,2	+2,0
„ —Linthal	+0,2	−0,2	**−2,1**	*−0,9*	**−1,1**	**−0,4**	−0,2	**−1,0**	+0,1	+0,6	**−1,6**	**−2,1**	**−1,3**	+0,4	+3,1
Altorf—Gurtnellen	*−0,4*	**−1,2**	**−2,6**	**−1,8**	**−2,0**	**−2,3**	**−2,2**	**−1,3**	*−0,2*	*−0,1*	**−1,9**	**−0,8**	**−3,2**	−0,3	+1,0

Hier stellen auch *cursiv gesetzte* Barometerdifferenzen den Eintritt des Föhns erst am obern Ort und **halbfett gesetzte** Barometerdifferenzen solche dar, wo derselbe bereits an beiden Orten aufgetreten ist.

Föhnsturm vom 18. und 19. August 1892.

Das Bulletin der schweizerischen Centralanstalt von 8^h a. des 18. August 1892 weist ein Druckmaximum von 765 mm südöstlich von der Schweiz auf, während sich vom Ozean her den Westküsten Europas eine Depression von 755 mm nähert. Infolge davon wehen in Frankreich und Ober-Italien südliche bis südöstliche Winde. Diese Situation ist der Entwicklung eines Föhns in der Schweiz günstig.

Unsere synoptische Karte von 7^h a. des 18. August spricht auch hiefür, indem sie im Tessin eine Isobare von 723 mm und innerhalb derselben Barometerstände von 723,6 mm aufweist, während in der Centralschweiz ein lokales Druckminimum von 720 mm mit einem Barometerstand von 719,7 mm in Gersau besteht, also eine Druck-

differenz über den Gotthard hinüber von nahe 4 mm. Eine solche würde nach dem bisherigen im Winter und Frühjahr nicht zur Erzeugung eines Föhns genügen, doch scheint ein Föhn im Sommer schon bei geringern Druckdifferenzen einzutreten. Um 7^h a. stürmt es nämlich auf dem Säntis bereits aus Südwest, bei 26°,8 auf 500 m reduzierter Temperatur und bei 41 % Feuchtigkeit, Sargans meldet Eintritt des Föhns bei allerdings erst mässigem Südost, 21°,2 und 59 %, in Guttannen aber haben wir bei frischem Südost bereits 29°,0 und 30 % Feuchtigkeit, während in Meyringen bei schwachem Süd die Temperatur erst 18°,8 erreicht hat und die Feuchtigkeit noch 78 % beträgt. Der mässige Südost auf dem Monte Generoso mit 41 % und der mässige Süd auf dem Rigi mit 42 % weisen auch auf den bevorstehenden Eintritt des Föhns hin. Der Himmel ist in der ganzen Schweiz, wie übrigens schon am Vortage, wolkenlos und die Temperaturen sind infolge des anhaltend schönen Wetters der letzten Tage überall hoch — Minimum 16°,5 in Böttstein und Campro Vasco, Maximum 29° in Guttannen und Gäbris.

In dem Zwischenraum von 7^h a. bis 1^h p. melden nun weiter den Eintritt des Föhns: Grächen als Südsturm von $8^1/_2{}^h$ bis 10^h a., Meyringen als heftigen Ost (gemäss der Thalrichtung) um 10^h a., Auen und Glarus als mässigen Süd, Elm als mässigen Südost je um 1^h p.

Die synoptische Karte um 1^h p. des 18. August zeigt eine allgemeine Druckverminderung, nämlich im Jura und der Centralschweiz um 3 mm, im Tessin um 2 mm, so dass jetzt die Druckdifferenz über den Gotthard auf 5 mm gestiegen ist. Diese ist genügend, um auf dem St. Bernhard und Pilatus stürmische Südwestwinde, auf dem Säntis stürmischen Südsüdwest zu bewirken und überall in den Thälern des Föhngebiets den Föhn mit seinen charakteristischen Eigenschaften zu entwickeln. Wir begegnen aber um 1^h p. nicht bloss im Föhngebiet, sondern auch in der übrigen Schweiz infolge des heiteren Himmels ungewöhnlich hohen Temperaturen und geringen Feuchtigkeiten, die im Föhngebiet die obern Grenzen 35°,9 und 15 %, ausserhalb als untere nur 27° und 82 % erreichen, wenn wir zwei Angaben von 90 % in Gurtnellen und Muri als offenbar unrichtig ausschliessen.

Obschon unsere synoptische Karte von 9^h p. des 18. August bei einer weiteren ziemlich gleichmässigen Verminderung des Drucks um 2 mm von Schaffhausen bis Bellinzona auch nur eine Druckdifferenz von 5 mm aufweist und die Isobaren um den Gotthard sich weniger drängen, halten die starken südlichen Winde mit Föhnerscheinungen fast überall ungeschwächt an und v.rbreiten sich stossweise auch weiterhin. So meldet Gersau von $3^1/_2—5^h$ p., Luzern von $5—7^h$ p. starken Föhn, in Brünig wird der Eintritt stürmischen Föhns von 2^h p. an angegeben, in Schwyz am Abend. Die Isothermen drängen sich bei diesem Termin noch mehr als um 1^h um das Föhngebiet, da in diesem die Temperaturen seit Mittag nur um etwa 5° (das Maximum beträgt noch 30°,0), ausserhalb desselben aber um mehr als 7° (das Minimum ist 19°,3) gefallen sind. Der Himmel bleibt nach wie vor durchweg heiter und zwar auch im Tessin, wo die Feuchtigkeit bei nahe gleichen Temperaturen wie im Norden, nämlich von 20—24° mit Ausnahme

von Faido eher geringer als in der nördlichen Schweiz ausserhalb des Föhngebiets ist. Den ganzen Tag über herrschen dort in Lugano und auf dem Monte Generoso südöstliche, in Faido westliche, in San Vittore östliche, in Locarno westliche bis südliche Winde, in Bellinzona aber bald Nord bald Süd und zwar in der Tiefe nur schwache, auf dem Monte Generoso frische Winde. Das Verhalten der Feuchtigkeit im Tessin ist also von dem bei den bisher betrachteten Föhnen abweichend. Der Wolkenzug ist wieder im nördlichen Teil der Schweiz von West bis Südwest, um den Gotthard und in Bünden Süd, nur in Andermatt Nord, im Engadin SW.

Die Temperaturen und Feuchtigkeiten im Föhngebiet ergeben sich für diesen Tag des Nähern aus der folgenden Zusammenstellung:

1892	Temperatur			Feuchtigkeit		
18. August	7h	1h	9h	7h	1h	9h
Siders	20°,1	34°,1	28°,3	68%	29%	35%
Beatenberg	24,9	30,9	25,9	59	58	35
Guttannen	29,0	33,5	28,4	30	28	37
Meyringen	18,8	30,7	28,2	78	37	—
Brünig	23,6	31,0	29,1	67	56	30
Göschenen	25,0	33,8	27,8	43	75	36
Altorf	19,2	33,6	29,2	68	22	26
Gersau	19,1	26,2	25,8	79	64	43
Schwyz	20,4	29,2	26,8	65	55	100?
Luzern	19,0	29,1	25,8	73	39	18
Pilatus	26,6	31,2	26,6	46	28	41
Rigi	26,7	30,1	26,3	42	38	47
Engelberg	20,1	32,1	27,8	60	26	27
Platta	20,5	31,5	26,1	62	26	37
Auen	21,2	33,2	26,7	50	23	33
Elm	22,2	33,1	28,0	51	23	26
Glarus	17,4	32,8	28,5	75	41	37
Schuls	21,1	34,3	26,6	58	28	32
Arosa	27,5	32,1	26,4	20	11	26
Chur	20,8	35,1	24,0	58	21	46
Sargans	21,2	35,9	29,8	59	15	32
Wildhaus	26,6	33,4	27,6	—	—	—
Säntis	26,8	29,8	25,5	41	39	42
Altstätten	21,4	32,0	30,0	63	33	26
Heiden	27,2	34,9	28,8	29	15	18
St. Gallen	22,8	30,5	29,8	60	52	42
Zürich	21,4	31,0	26,4	75	37	25

Die Stationen, wo nur um Mittag besonders hohe Temperaturen und niedrige Feuchtigkeiten notiert waren, sind hier weggelassen, da bloss der tägliche Gang diese Wirkung gehabt haben könnte.

Der Wetterbericht der Centralanstalt vom Morgen des 19. August zeigt, dass sich die Depression seit dem Vortage ausgebreitet hat und mit ihrem Centrum bis nach Holland vorgerückt ist. Infolge davon ist das Barometer da und auch im Osten überall um 5 mm gefallen; immer aber herrscht höherer Druck, über 760 mm, noch südöstlich von der Schweiz. In Frankreich haben sich Gewitterregen eingestellt. Die Winde sind durchweg schwach.

Die Isobaren unserer synoptischen Karte für 7^h a. des 19. August weisen ohne erhebliche Aenderungen in ihrem Betrag einen der Föhnbildung günstigeren Verlauf, als am Vorabend auf, indem das lokale Druckminimum am Vierwaldstättersee sich zu 715 mm vertieft hat und die Isobare von 717 mm durch eine solche von 716 mm ersetzt ist, so dass die barometrische Differenz von 5 mm jetzt schon zwischen Gersau und Bellinzona besteht. Die starken südlichen Winde mit begleitenden Föhnerscheinungen, hohen Temperaturen und geringen Feuchtigkeiten, halten daher noch an, doch hat die Feuchtigkeit überall und besonders im Tessin zugenommen und in der Nacht ist in Locarno, Campro Vasco, Güttannen, Meyringen und Andermatt durchweg unter Gewittererscheinungen etwas Regen gefallen. Um 7^h a. ist aber der Himmel überall wieder hell. Obschon der Unterschied zwischen der höchsten und niedrigsten reducierten Temperatur innerhalb der Schweiz noch 9°,9 (27°,4—17°,5) beträgt, so erscheinen doch die Isothermen verhältnismässig viel weniger um das Föhngebiet gedrängt, als am Vorabend.

Unsere synoptische Karte für 1^h p. des 19. August zeigt vom Tessin über den Gotthard zur Centralschweiz keine wesentliche Veränderung im Verlauf der Isobaren, indem entsprechend dem allgemeinen Fallen des Barometers um 1 mm seit 7^h a. der Druckgradient da derselbe geblieben ist; nur im Nordwesten und im mittleren und unteren Rhonethal[1]) ist lokal noch eine weitere Druckabnahme um 1 mm erfolgt. Die südlichen Winde haben daher im allgemeinen an Stärke gewonnen und der Föhn seine Herrschaft verstärkt und ausgedehnt. Nur in einem schmalen Streifen vom Genfersee längs des Jura bis zum Rhein hinauf und zum Vierwaldstättersee hin und sodann im Tessin hinauf bis Andermatt und in Graubünden bis Thusis hin haben wir noch Temperaturen unter 30° (Minimum 26°,3 in Montreux), im Föhngebiet steigen sie bis 33°,4 (in Martigny). Die Variation beträgt also jetzt nur 7°, was ein weiteres Auseinandertreten der Isothermen bedingt hat.

Der Himmel ist mit Ausnahme des Südostens, wo teilweise Bedeckung eingetreten ist, noch überall hell. Vorübergehende Gewitterregen um 1^h p. herum werden von Altorf, Gurtnellen und Lugano gemeldet.

[1]) Vorausgesetzt, dass die Barometer-Angabe in Siders richtig und die in Sitten und Martigny je um 5 mm zu hoch seien.

Von 1^hp. zu 9^hp. des 19. August ist nach unseren synoptischen Karten eine bedeutende Veränderung in der Verteilung des Luftdrucks erfolgt. Im äussersten Nordwesten der Schweiz ist der Druck um 4 mm gestiegen, so dass jetzt da eine Isobare von 718 mm verläuft vis-à-vis einer solchen von gleichem Betrag im östlichen Wallis und westlichen Tessin. Dazwischen erniedrigt sich der Druck zu drei lokalen Minima von je 715 mm, nämlich ein solches im mittleren Wallis um Sitten, ein zweites um den Vierwaldstättersee, ein drittes in St. Gallen, dem nördlichen Thurgau und Zürich. Diese Druckverteilung hat lokale stürmische Winde verschiedener Richtung, besonders aber westlicher und nördlicher im Jura und Flachland der Schweiz zur Folge, wo denn auch die stärkste Abkühlung, nämlich bis 19° erfolgt ist, während im Föhngebiet trotz des allmählichen Rückgangs des Föhns sich noch an vielen Stationen, namentlich der äusseren Teile, hohe Temperaturen (bis 29° in Rorschach) mit geringen Feuchtigkeiten erhalten haben. Trotz vermehrter Feuchtigkeit im Westen der Schweiz und besonders im obern Thal des Tessin ist der Himmel doch noch fast überall heiter. Niederschläge sind nur in Basel, Genf, Locarno und Lugano erfolgt, durchweg in Begleit von Gewittern, die in der folgenden Nacht an vielen andern Orten auftreten. Eine Aenderung im Wolkenzug ist nur in Andermatt eingetreten, wo ein Umschlag von Nord nach West stattgefunden hat. Campro Vasco giebt Wolkenzug aus Nord an.

Zur bessern Orientierung stelle ich wieder die Temperaturen und Feuchtigkeiten aus dem Föhngebiet für diesen Tag zusammen:

1892	Temperatur			Feuchtigkeit		
19. August	7^h	1^h	9^h	7^h	1^h	9^h
Siders	22°,1	31°,0	25°,7	51%	36%	41%
Beatenberg	23,9	31,5	19,5	57	34	63
Guttannen	25,1	29,9	25,5	51	45	46
Meyringen	26,4	30,0	26,2	-	-	—
Brünig	26,2	30,6	26,1	45	32	37
Göschenen	23,5	26,4	23,6	93?	39	52
Altorf	25,4	30,2	26,6	40	42	30
Gersau	23,1	29,9	27,2	60	25	26
Schwyz	26,2	31,0	26,8	84	28	98
Luzern	20,7	28,7	23,6	67	27	24
Pilatus	23,4	29,0	24,0	52	36	40
Rigi	23,3	27,7	23,5	57	43	53
Engelberg	25,5	30,3	25,1	36	28	31
Platta	20,1	27,9	23,5	76	37	45
Auen	23,8	30,2	23,7	43	28	35
Elm	25,6	30,3	24,8	38	27	33
Glarus	22,1	31,0	26,7	62	35	35

1892 19. August	Temperatur 7h	1h	9h	Feuchtigkeit 7h	1h	9h
Chur	21°,6	30°,5	22,6	50%	24%	45%
Sargans	23,0	32,4	25,7	54	30	40
Säntis	23,2	26,5	21,8	55	38	51
Altstätten	26,5	32,3	26,9	37	19	29
Heiden	27,4	32,2	26,8	23	13	19
St. Gallen	23,7	31,3	26,0	55	14	25
Frauenfeld	22,5	31,5	21,5	66	33	50
Zürich	20,0	31,8	22,7	72	24	36
Winterthur	20,8	30,4	26,6	66	33	29

Nach dieser Tabelle könnte es scheinen, dass für den folgenden Tag ein Auffrischen des Föhns und seiner Wirkungen hätte eintreten sollen; indessen stieg über Nacht das Barometer allgemein um 3—4 mm, jede Spur von Föhn war um 7h a. des 20. August verwischt und an vielen Orten der Schweiz traten bei bedecktem Himmel Niederschläge mit und ohne Gewitter ein.

Fassen wir das über diesen Sommerföhn Mitgeteilte zusammen, so gilt auch für ihn, was wir über die Veranlassung zum Föhn früher gefunden haben, er zeigt dieselben charakteristischen Eigenschaften stürmischer Winde, abnorm hoher Temperaturen und grosser Trockenheit in den nördlichen Alpenthälern, dagegen finden wir als Begleiterscheinungen nicht relativ so niedrige Temperaturen und hohe Feuchtigkeiten der Luft sowie starke Niederschläge auf der Südseite der Alpen. Ueberhaupt manifestiert sich der Föhn, wie auch andere Sommerföhne zeigen, weniger intensiv in dieser Jahreszeit und dauert, wie der vorstehende, nur kürzere Zeit an. Es scheint, dass gerade dieses rasche Vorübergehen des Föhns auf der Südseite nicht einen starken, aufsteigenden Luftstrom hat zu Stande kommen lassen, welcher durch Abkühlung eine Zunahme der relativen Feuchtigkeit und Wolkenbildung zur Folge gehabt hätte. Hiezu mag allerdings auch die grössere Trockenheit der Luft in der Lombardischen Ebene zu dieser Jahreszeit beigetragen haben. Dass aber auch dieser Föhn durch einen die Alpen von Südost nach Nordwest überwehenden, mit einer Cyclone im Nordwesten in Zusammenhang stehenden Wind bedingt wird, beweist der während beider Tage auf dem freigelegenen Monte Generoso beständig herrschende Südost und die durch die Isobaren auch in diesem Fall deutlich charakterisierte Stauung der Luft auf der Südseite der Alpen. Beim Beginn des Föhns finden wir um 7h a. des 18. August auch wieder die weitaus höchsten Temperaturen auf den Bergspitzen und Alpenpässen: Chaumont, Weissenstein, Pilatus, Rigi, Säntis, Gäbris, St. Bernhard, Bernhardin, Julier, Monte Generoso. Endlich bemerken wir auch bei diesem Föhn das früher erörterte Verhalten der Barometerdifferenzen zwischen höheren und niedrigeren Stationen im gleichen Thal bestätigt, wie nachstehende Tabelle zeigt:

1892	18. August			19. August		
	7h	1h	9h	7h	1h	9h
	mm					
Glarus—Elm	*+0,8*	**—1,0**	**—0,6**	*0,0*	**—0,3**	**—0,8**
Glarus—Auen	*+0,5*	**—0,8**	**—1,9**	*—0,1*	**—0,6**	**—0,7**
Altorf—Göschenen	*+0,4*	**—1,5**	**—0,4**	*—0,3*	**—0,6**	**—0,6**

Föhnsturm vom 28. Oktober bis 1. November 1892.

Am Morgen des 27. Oktober 1892 herrschte gemäss dem Wetterbulletin der schweiz. meteorologischen Centralanstalt nach vorangegangenem Regen in Central- und Ost-Europa unter Aufheiterung des Himmels hoher Druck, die Isobare von 765 mm geht an der Nordwestgrenze der Schweiz hin und diejenige von 760 mm geht von Dänemark durch die Mitte von Frankreich herunter. Den Westküsten Europas nähert sich aber vom Ocean her eine neue Depression von bereits 740 mm Druck in Irland. Diese Wettersituation accentuiert sich im Laufe des Tages, so dass am Morgen des 28. Oktober bei nahe gleich gebliebenem hohem Druck im Osten und Verstärkung der Depression über den britischen Inseln zwischen Schottland (735 mm) und Budapest (770 mm) eine Druckdifferenz von 35 mm besteht. Es wehen daher an den Westküsten Europas, über Frankreich und Deutschland starke bis stürmische südliche Winde bei vorherrschend heiterem Himmel. An der Nordwestgrenze der Schweiz geht zur Zeit die Isobare von 760 mm vorbei.

Betrachten wir jetzt unsere synoptischen Karten für 7h a., 1h und 9h p. des 28. Oktober, so wird man sich beim Vergleich mit denen der bisher untersuchten Föhnstürme unmittelbar sagen, dass die Isobaren vom Morgen an die für eine Föhnerscheinung charakteristische Druckverteilung repräsentieren. Schon um 7h a. zeigen sich lokale Druckminima auf der Nordseite der Alpen und die Druckdifferenz zwischen dem Tessin und der Centralschweiz über den Gotthard hin beträgt bereits 7 mm. In der That finden wir dem beginnenden Föhn entsprechend resp. als Vorläufer desselben relativ hohe Temperaturen und geringe Feuchtigkeiten auf den Höhen des Chaumont, Weissenstein, Pilatus, Rigi, Säntis, Gäbris, Churwalden, Arosa. Während in den Niederungen reduzierte Temperaturen von 0—5° vorkommen, treffen wir dort solche von 10—14° und Feuchtigkeiten von 35—67%, in der Tiefe aber durchweg 90—100%. In einigen höher gelegenen Alpenthälern ist auch bereits um 7h a. Föhn eingetreten, so in Platta und Gurtnellen. Bei nicht erheblicher Aenderung der Luftdruckverteilung entwickelt sich der Föhn im Laufe des Tages immer mehr, wie aus folgender Zusammenstellung der Temperatur- und Feuchtigkeitsverhältnisse im Föhngebiet resultiert.

1892 28. Oktober	Temperatur 7h	 1h	 9h	Feuchtigkeit 7h	 1h	 9h
Platta	8°,6	11°,0	11°,2	59%	50%	50%
Beatenberg	9,0	14,8	10,4	68	55	52
Guttannen	8,2	13,9	13,2	75	40	43
Engelberg	3,6	13,9	6,0	81	47	80
Brünig	5,9	13,6	14,7	80	57	56
Elm	4,5	16,7	11,9	73	23	35
Auen	5,0	14,4	11,3	79	46	45
Heiden	3,4	15,5	14,4	80	32	22
Gurtnellen	13,2	15,4	14,6	44	39	44
Chur	6,5	16,5	9,2	63	34	54
Meyringen	2,6	11,3	8,5	100	70	71
Schwyz	2,2	11,2	13,4	100	80	44
Sitten	5,6	16,6	8,8	79	40	66
Sargans	3,5	15,5	13,2	95	43	45
Altstätten	1,1	6,0	11,6	96	89	45
Altorf	3,8	16,9	14,7	95	40	37
Territet	4,7	8,7	16,1	96	96	36
Montreux	4,4	8,9	14,5	92	84	36
Glarus	1,9	10,5	6,0	96	73	87
Gersau	4,9	9,3	8,7	94	81	84

Wir ersehen hieraus, dass sich der Föhn bis 1^h p. bereits in Beatenberg, Guttannen, Brünig, Elm, Heiden, Altorf und Sargans (hier schon seit 9^h a.) und bis um 9^h p. dann auch in Meyringen, Schwyz, Altstätten und Territet-Montreux eingestellt hatte, dagegen in Engelberg, Chur, Auen, Glarus und Sitten noch nicht, wo die höhere Temperatur und geringe Feuchtigkeit um Mittag bloss dem täglichen Gang beizumessen ist, was auch die Richtung und Stärke des an diesen Orten beobachteten Windes bestätigt. Der Wolkenzug ist W bis SW und nur in Davos und Bellinzona S bis SE.

Der Himmel ist auf der ganzen Nordseite der Alpen hell und, wo er am Morgen noch bewölkt war, hat er sich wenigstens bis zum Abend durchweg aufgeheitert. Dagegen ist er im Tessin bis zu den Alpenpässen herauf bewölkt oder ganz bedeckt, die Luft feucht und am Vormittag regnet es in Locarno und Bellinzona.

Vom 28. auf den 29. Januar zeigt das Bulletin der Centralanstalt für 8^h a. nur unbedeutende Veränderungen der Luftdruckverteilung über Europa. Die Depression über den britischen Inseln hat sich etwas nach Osten ausgebreitet, so dass das Barometer im Norden und Westen der Schweiz ein wenig gefallen ist, während sich der hohe Luftdruck im Südosten fast unverändert erhalten hat. In Oberitalien haben wir daher östliche bis südöstliche Winde.

Unsere synoptische Karte für 7^h a. des 29. Januar ist von der des Vorabends nur dadurch unterschieden, dass der Luftdruck überall um ungefähr 1 mm abgenommen hat, die Verteilung desselben ist nahe dieselbe geblieben und damit auch die Richtung und Stärke der Winde sowie die Manifestation des Föhns.

Bis um 1^h p. des 29. Januar sodann ist nur insofern eine Veränderung eingetreten, als im Kanton Glarus und im unteren Rheinthal lokale Minima sich entwickelt haben und damit dort jetzt auch der Föhn eingetreten ist und zwar in Glarus bereits von 10^h a. an.

Ein allgemeines Fallen des Barometers bis um 9^h p. des 29. Januar und zwar um 2 mm im Nordwesten und 1 mm im Südosten hat eine Verstärkung des Luftdruckgradienten namentlich vom Tessin zur Centralschweiz zur Folge gehabt, so dass zum Abend eine Zunahme und Ausbreitung des Föhns im ganzen mittleren und östlichen Föhngebiet eingetreten ist. Dies erhellt ausser durch die Angaben des Windes in unsern synoptischen Karten aus der nachstehenden Zusammenstellung der Temperatur- und Feuchtigkeitsverhältnisse im Föhngebiet:

1892	Temperatur			Feuchtigkeit		
29. Oktober	7^h	1^h	9^h	7^h	1^h	9^h
Beatenberg	11°,8	14°,8	15°,6	52%	59%	51%
Ober-Yberg	7,2	17,3	17,6	66	56	44
Wildhaus	12,7	18,5	17,5		—	–
Guttannen	14,2	16,5	16,5	33	43	51
Engelberg	5,9	13,4	17,6	69	58	37
Brünig	15,5	17,8	18,3	56	56	48
Elm	14,9	18,3	17,7	37	31	34
Auen	10,7	19,6	18,8	51	35	36
Heiden	15,4	20,4	18,0	24	17	25
Gurtnellen	15,4	16,7	17,4	48	48	50
Chur	8,2	18,3	12,7	63	37	61
Meyringen	15,7	18,3	17,0	85	41	57
Thun	2,7	11,3	14,7	93	79	55
Schwyz	13,8	16,3	18,0	80	55	76
Sitten	7,8	17,0	12,0	70	51	76
Sargans	11,3	19,4	15,8	51	39	50
Glarus	4,7	20,1	19,7	84	37	40
Altstätten	15,6	20,2	18,6	35	31	32
Altorf	15,5	16,5	18,9	40	50	37
Gersau	7,9	13,1	19,1	83	67	36
Territet	14,9	12,5	16,7	40	82	48
Montreux	13,9	12,5	17,4	37	67	36

In Gersau ist also erst auf den Abend der Föhn zur Geltung gelangt.

Der Wolkenzug ist auch an diesem Tage vorherrschend W bis SW und nur in Davos und Göschenen Süd; auf dem Julier Nord (?).

Im Laufe des 29. Oktober nimmt die Bewölkung in der ganzen Schweiz zu, ausserhalb des Föhngebiets auch die Feuchtigkeit der Luft, doch treten erst abends Niederschläge allgemein auf der Südseite der Alpen und vereinzelt auch im Nordwesten, Basel und Bern, auf.

Nach dem Wetter-Bulletin der Centralanstalt vom 30. Oktober 8^h a. ist die Luftdruck-Verteilung in der Nähe der Schweiz, abgesehen von einem leichten allgemeinen Fallen des Barometers ziemlich unverändert, während sich die Depression im Norden unter Vorrücken ihres Centrums nach Norwegen abgeschwächt hat und demzufolge in Frankreich und Deutschland nur schwache Winde wehen. In der Nähe von Spanien zeigt sich ein neues schwaches Minimum.

Auch unsere synoptische Karte von 7^h a. des 30. Oktober ergiebt gegenüber dem Vorabend nur ein allgemeines Fallen des Barometers um 1 mm ohne wesentliche Aenderung der Luftdruckverteilung im Innern der Schweiz. Demgemäss sind Richtung und Stärke der Winde und die Manifestation des Föhns auch nahe dieselben geblieben wie am Vorabend.

Die Wetterlage bleibt auch bis um 1^h p. des 30. Oktober sehr nahe dieselbe, indem sich nur im Nordwesten noch ein weiteres schwaches Fallen des Barometers nicht ganz um 1 mm geltend gemacht hat. Eine noch geringere Aenderung der Luftdruckverteilung findet dann bis um 9^h p. des 30. Oktober statt, so dass also den ganzen Tag bis zum Abend der Föhn mit unveränderter Stärke andauert.

Wir haben nördlich der Alpenkette ungewöhnlich hohe Temperaturen besonders im Föhngebiet, im letzteren grosse Trockenheit, und der Himmel ist nur teilweise bedeckt, während auf der Südseite der Alpen die Temperaturen verhältnismässig niedrig erscheinen, die Feuchtigkeit eine hohe und der Himmel ganz bedeckt ist, auch die meisten Stationen Niederschläge aufweisen.

Nachstehend gebe ich auch für diesen Tag eine Zusammenstellung der Temperaturen und Feuchtigkeiten im Föhngebiet:

1892	Temperatur			Feuchtigkeit		
30. Oktober	7^h	1^h	9^h	7^h	1^h	9^h
Pilatus	13°,9	15°,3	15°,9	61%	64%	57%
Rigi-Kulm	13,7	16,9	17,4	—	50	53
Beatenberg	15,8	20,5	19,0	58	52	39
Göschenen	15,0	17,5	16,5	57	50	52
Ober-Yberg	18,0	21,0	18,6	43	35	46
Wildhaus	16,1	20,1	18,1	—	—	—
Guttannen	17,6	19,2	18,5	46	47	49

1892 30. Oktober	Temperatur 7h	1h	9h	Feuchtigkeit 7h	1h	9h
Engelberg	18°,6	20°,3	19°,4	36%	40%	39%
Brünig	19,0	21,8	19,7	47	45	50
Elm	18,1	20,5	18,4	34	33	37
Einsiedeln	12,3	19,6	19,4	78	34	34
Auen	19,2	21,4	19,8	38	38	38
Heiden	18,8	21,9	20,4	24	22	23
Gurtnellen	17,0	19,8	18,2	53	53	70
St. Gallen	15,9	21,2	21,0	47	41	37
Haidenhaus	13,6	19,8	16,6	50	55	58
Chur	14,4	18,7	13,0	59	48	69
Meyringen	18,7	21,6	20,3	47	40	58
Siders	11,0	19,6	17,4	78	59	67
Zermatt	15,5	17,1	12,7	—	—	—
Schwyz	19,0	18,7	21,6	100?	60?	87?
Sitten	10,4	20,2	14,4	80	49	66
Sargans	16,3	20,0	17,4	50	45	52
Glarus	20,1	22,9	21,2	39	38	76?
Martigny	12,6	19,9	19,5	89	62	61
Altstätten	19,2	22,2	19,2	35	31	38
Rorschach	8,6	14,0	20,8	—	—	—
Luzern	7,3	15,5	13,4	91	57	55
Altorf	18,7	20,7	20,3	43	40	38
Gersau	19,8	21,6	21,7	35	35	43
Territet	9,8	19,7	18,9	93	50	46
Montreux	9,7	18,7	18,7	81	46	38

Siders meldet von 1^h p. an Eintritt des Föhns, und in Zermatt soll am Vormittag heftiger Föhn geweht haben. Es bedarf kaum der Erwähnung, dass die Feuchtigkeiten in Schwyz wahrscheinlich infolge unrichtiger Funktion des Psychrometers viel zu hoch erscheinen, da von dort fortwährend starker Föhn gemeldet wurde.

Aus der Zusammenstellung ersehen wir deutlich, dass sich die Wirkungen des Föhns bis zum Bodensee hin erstreckten und vom untern Wallis aus bis nach Montreux hin.

Das Wetterbulletin der Centralanstalt von 8^h a. des 31. Oktober zeigt in Central-Europa fast gar keine Veränderung der Luftdruckverteilung. Das schwache Minimum an den Küsten Norwegens und das sekundäre in Spanien bestehen noch fort, ausserdem hat sich noch im Kanal ein entsprechendes Teilminimum gebildet.

Unsere synoptische Karte für die Schweiz von 7^h a. des 31. Oktober ist denn auch nahezu identisch mit derjenigen des Vorabends; doch ist im Südosten das Baro-

meter um 1 mm gefallen und daher der Druckgradient über die Alpen hin entsprechend geschwächt worden. Es erscheinen demzufolge auch die Winde im Allgemeinen und besonders im Föhngebiet schwächer, was ein Nachlassen der Föhnwirkungen zur Folge hatte.

Da indessen nach unserer synoptischen Karte von 1ʰ p. des 31. Oktober bis zu diesem Termin ein neues Fallen des Barometers um 1 mm im Nordwesten stattfand, während im Tessin der Druck derselbe blieb, so hat diese neue Verstärkung des Gradienten auch eine erneute Zunahme der Windgeschwindigkeit besonders in der Central-Schweiz und damit ein Wiederaufleben des Föhns bewirkt.

Unsere synoptische Karte für 9ʰ p. des 31. Oktober ist von derjenigen für 1ʰ p. nur dadurch verschieden, dass im Nordwesten der Druck stellenweise wieder etwas gestiegen, im Appenzellerland dagegen etwas gefallen ist und so die Winde sich hier verstärkt haben, in der Centralschweiz aber etwas schwächer geworden sind. Wie sich der Föhn dazu verhält, ergiebt sich am besten wieder aus der nachstehenden Zusammenstellung der Temperaturen und Feuchtigkeiten im Föhngebiet.

1892	Temperatur			Feuchtigkeit		
31. Oktober	7ʰ	1ʰ	9ʰ	7ʰ	1ʰ	9ʰ
Pilatus	15°,9	16°,7	14°,7	60%	57%	62%
Rigi-Kulm	17,6	17,4	16,2	53	53	55
Gäbris	18,5	21,5	18,5	—	—	
Beatenberg	18,4	21,0	16,2	43	49	47
Ober-Yberg	19,8	20,9	17,0	34	35	49
Wildhaus	16,9	21,9	17,1	—	—	—
Guttannen	19,2	18,4	17,0	49	47	51
Engelberg	16,6	19,1	17,4	48	43	43
Brünig	19,8	20,1	17,7	47	47	51
Elm	17,1	20,8	17,9	38	32	35
Einsiedeln	19,1	21,3	16,9	34	34	50
Auen	14,6	21,7	17,3	57	33	47
Heiden	20,4	23,0	20,1	21	16	18
Gurtnellen	19,2	19,0	17,0	98	92	55
St. Gallen	15,3	24,1	18,0	54	31	43
Haidenhaus	15,8	19,6	16,8	56	57	51
Chur	10,4	20,0	12,7	71	39	65
Meyringen	20,3	21,5	19,2	72	75	64
Siders	14,4	20,2	15,4	60	58	67
Schwyz	18,4	22,0	19,0	96?	59?	100?
Sitten	13,8	22,0	16,2	65	35	—
Sargans	12,7	22,6	16,6	62	38	50

1892 31. Oktober	Temperatur 7h	1h	9h	Feuchtigkeit 7h	1h	9h
Glarus	13°,7	22°,7	19°,9	72%	34%	46%
Martigny	15,9	22,3	15,5	74	59	83
Zürich	9,1	19,8	14,4	93	45	52
Altstätten	19,2	23,4	20,5	35	26	30
Rorschach	10,8	16,0	20,4	—	—	—
Luzern	7,6	20,2	13,9	97	23	54
Altorf	19,9	21,1	19,0	38	39	41
Gersau	15,8	21,8	19,1	69	32	39
Montreux	15,7	15,7	17,5	45	54	38

Der Wolkenzug ist an diesem Tage im allgemeinen ein mehr südlicher geworden.

Während die vollständige Bedeckung des Himmels und der Regen im Tessin den ganzen 31. Oktober fortdauert, hat sich dagegen der Himmel im Norden und Osten der Schweiz bis um 7h a. dieses Tages aufgeheitert, um Mittag sich wieder mehr bewölkt, bis um 9h p. aber im mittleren Rheinthal und untern Rhonethal sowie in der Centralschweiz neuerdings aufgehellt. Ausser im Tessin regnet es zur Zeit dieses Termins auch noch in Genf, Grächen und Leuck.

Nach dem Wetterbulletin der Centralanstalt von 8h a. des 1. November hat sich die Hauptdepression von der Küste Norwegens am Vortage bis zum weissen Meer hin fortgepflanzt und die beiden Minima vom Canal und über Spanien haben sich zu einer langgestreckten Depression über Frankreich, den Niederlanden und dem westlichen Teil von Deutschland vereinigt. Im Osten und Südosten der Schweiz aber bleibt unter geringer Abnahme der höhere Luftdruck noch bestehen. Die Winde sind überall schwach, nur im nordwestlichen Frankreich haben sich frische Nordwinde eingestellt.

Unsere synoptische Karte von 7h a. des 1. November lässt gegenüber dem Vorabend eine allgemeine Abnahme des Luftdrucks von 2 mm ohne erhebliche Veränderung in der Verteilung desselben erkennen und dementsprechend halten auch die stürmischen Winde im Föhngebiet nahezu unvermindert an.

Bis um 1h p. des 1. November tritt weder absolut noch relativ eine merkliche Aenderung in den Luftdruck- und Windverhältnissen ein und somit auch nicht in der Erscheinung des Föhns.

Dagegen zeigt unsere synoptische Karte von 9h p. des 1. November eine Zunahme des Luftdrucks um 2 mm im nordwestlichen Teil der Schweiz und im äussersten Süden des Tessins eine Abnahme um denselben Betrag, also eine erhebliche Verminderung des Gradienten, die denn auch eine Abschwächung der Winde und des Föhns stellenweise bis zu gänzlichem Aufhören desselben zur Folge hatte, wie des Näheren aus der folgenden Tabelle ersichtlich ist.

1892 1. November	Temperatur 7h	1h	9h	Feuchtigkeit 7h	1h	9h
Pilatus	14°,3	14°,5	11°,5	70%	69%	72%
Rigi-Kulm	15,4	14,2	12,4	66	69	84
Gäbris	18,5	17,5	14,5	—	—	-
Beatenberg	15,4	18,7	11,2	62	40	67
Ober-Yberg	17,0	18,8	11,8	50	44	56
Guttannen	12,8	14,7	15,4	67	55	50
Engelberg	14,2	18,0	13,6	80	37	47
Brünig	17,3	18,8	15,7	52	48	54
Elm	19,4	16,6	14,8	34	42	40
Einsiedeln	14,5	18,7	12,1	60	43	70
Auen	18,3	18,2	15,0	44	37	41
Gurtnellen	14,0	15,7	15,2	79	59	58
Heiden	18,3	19,2	16,0	24	24	24
St. Gallen	20,4	20,2	13,9	32	38	64
Haidenhaus	18,6	18,0	14,4	48	62	63
Chur	15,3	14,7	9,9	55	60	86
Meyringen	17,7	19,6	17,5	73	73	69
Siders	13,0	15,4	13,2	80	87	77
Schwyz	19,2	19,8	16,4	100	76	98
Sitten	13,6	17,6	11,6	84	68	78
Sargans	15,4	16,4	13,6	70	55	60
Glarus	14,5	20,1	16,1	71	40	51
Martigny	13,8	17,5	12,3	79	75	79
Zürich	14,2	16,8	8,8	56	58	97
Altstätten	14,4	19,3	17,0	59	42	34
Rorschach	19,4	21,2	10,0	—	—	—
Luzern	12,0	17,0	10,1	65	53	77
Altorf	18,3	19,2	17,1	43	35	41
Gersau	20,1	19,1	12,2	36	37	74
Montreux	16,7	17,3	12,1	44	41	65

Wir ersehen hieraus, dass bis zum Abend auf Rigi-Kulm und Pilatus, in Beatenberg, Ober-Yberg, Einsiedeln, Schwyz, Luzern, Gersau, dann auch in Chur, Sargans, Rorschach, St. Gallen, Haidenhaus, Zürich, Sitten, Martigny und Montreux der Föhn ganz oder nahezu verschwunden ist. In der That meldet Montreux Föhn bloss bis 2h p. Gersau bis 7h p., Glarus noch für 1h p., für 9h p., aber nicht mehr. Auf dem Brünig wird nur um 7h a. bei stürmischem SSW Föhn angegeben, um 1h p. weht dort stürmischer Nordost und um 9h p. schwacher WSW; die Stationen Elm und Siders melden noch zu allen drei Terminen Föhn, der am letztern Ort die Richtung von

Nordost einhält. Offenbar dauert derselbe um 9^h p. auch noch an in Auen, Heiden, Altstätten, Gurtnellen, Altorf, Meyringen, Guttannen.

Am Morgen des 1. November ist der Himmel nirgends hell, ja sogar vorherrschend ganz bedeckt, und es regnet fast auf allen Stationen im Süden bis zu den Pässen herauf, auch im Oberwallis bis herunter nach Siders, in Chur, Andermatt, Göschenen, Gurtnellen, Guttannen, Engelberg, Lausanne und Neuchâtel. Bis um Mittag hellt sich der Himmel nördlich von der Alpenkette, besonders im Westen, auf und am Abend ist es unter dem Einfluss vorherrschender nördlicher Winde da durchweg ganz hell geworden und nur im Tessin, Engadin und bei Genf bleibt der Himmel bedeckt. Um 1 Uhr regnet oder schneit es auf dem St. Bernhard, Bernhardin und Julier, im Tessin und obern Engadin, in Splügen und Elm, 9^h p. a. ausser im Tessin und untern Engadin auf dem Bernhardin und Chaumont, in Genf und in Sursee.

Bis zum Morgen des 2. November hat sich nach dem Bulletin der Centralanstalt zwar ein neues Minimum vom Ocean her Irland genähert; indem aber ein Teilminimum im Ligurischen Meer sich entwickelt und über Spanien und Südfrankreich der Luftdruck stark gestiegen ist, sind trotz des im Südosten noch anhaltenden höheren Drucks die Bedingungen für den Föhn aufgehoben, der denn auch in der That am Morgen des 2. November überall verschwunden ist und schwachen westlichen Winden mit Regen Platz gemacht hat. Während wir um 9^h p. des 1. November zwischen Locarno und Gersau noch eine Druckdifferenz von 6,7 mm hatten, beträgt sie um 7^h a. des 2. Nov. nur noch 0,6 mm.

Dieser Herbstföhn schliesst sich also in seinem Verhalten vollständig an die betrachteten Frühlingsföhne und den Winterföhn an und dasselbe gilt auch von den Barometerdifferenzen höher und tiefer gelegener Stationen im gleichen Thal, wie nachstehende Tabelle zeigt:

	28. Oktober			29. Oktober			30. Oktober			31. Oktober			1. November		
1892	7^h	1^h	9^h	7^h	1^h	9^h	7^h	1^h	9^h	7^h	1^h	9^h	7^h	1^h	9^h
		mm													
Glarus—Elm	1,7	*1,0*	*0,3*	*0,3*	**-1,6**	**-1,9**	**-1,7**	**-1,5**	**-2,1**	*-1,2*	**-2,4**	**-1,8**	*-0,9*	**-0,7**	*-0,6*
„ —Auen	1,1	0,2	0,3	*0,5*	**-0,7**	**-1,0**	**-0,9**	**-1,0**	**-1,1**	*-0,3*	**-1,1**	*-0,8*	-0,2	**-0,5**	*-0,2*
Altorf-Göschenen	*-0,4*	**-2,7**	**-2,3**	**-1,7**	**-2,6**	**-1,4**	**-2,1**	**-2,7**	*-1,6*	*-1,4*	**-1,5**	**-1,1**	**-1,8**	**-2,6**	*-0,4*

Ehe ich nun zu einer Zusammenfassung der Untersuchungsresultate dieser fünf Föhnstürme und des Winterföhns vom 13. Januar 1895, den Herr Billwiller seiner Zeit in ähnlicher Weise untersucht hat, übergehe, halte ich es für nötig, an der Hand der vorliegenden Daten die Zuverlässigkeit unserer Barometer-Reduktionen auf das Niveau von 500 m für höhere Stationen während der Föhne noch näher zu diskutieren Beim Ziehen der Isobaren habe ich nördlich und südlich von der Alpenkette allerdings die reduzierten Barometerdaten für Hochstationen wie Chaumont, Pilatus, Rigi, Säntis,

Monte Generoso, wenn sie erheblich von denen der benachbarten Tiefenstationen abwichen, als unsicher nicht berücksichtigt, im Gebirge selbst aber war ich zu dem Ende doch auf die Daten hochgelegener Stationen angewiesen, und es frägt sich daher, inwiefern da die Reduktionen trotz der bedeutenden Störung des Gleichgewichtszustandes der Atmosphäre zur Zeit der Föhnerscheinungen noch zuverlässig seien oder mit andern Worten die darnach gezogenen Isobaren, wie sie in unsern synoptischen Karten komparieren, Gültigkeit haben. Zur Beantwortung dieser Frage habe ich in der nachstehenden Tabelle für die vier letzteren Föhne die Differenzen der auf 500 m reduzierten Barometerstände von einer Zahl von Kombinationen hochgelegener und benachbarter tieferer Stationen zusammengestellt, wobei das positive Vorzeichen höhere Stände der oberen Station bezeichnet.

Differenzen der auf 500 m Höhe reduzierten Barometerstände für Kombinationen benachbarter hoher und niedriger Stationen:

1872	Termin	Chaumont 1128 m — Neuchâtel 488 m mm	Rigi-Kulm 1787 m — Gersau 440 m mm	Beatenberg 1150 m — Interlaken 571 m mm	St. Bernhard 2478 m — Martigny 480 m mm	M. Generoso 1224 m — Lugano 275 m mm	Uetliberg 874 m — Zürich 480 m mm
6. März	7h a.	—1,4	0,8	—3,4	—2,3	1,4	—1,5
	1h p.	—0,6	1,9	—2,4	0,3	1,8	—1,5
	8h p.	—0,1	2,9	—1,2	—1,5	0,8	—0,8
7. März	7	—0,8	2,7	—2,2	—0,1	0,6	—0,7
	1	0,4	3,4	—1,7	2,3	0,9	—0,0
	9	0,5	2,8	—0,5	0,7	1,8	—0,6
8. März	7	0,0	3,2	—1,8	—0,5	1,2	0,4
	1	0,4	3,5	—0,8	0,8	1,7	0,1
	9	0,4	3,1	—2,0	0,9	2,3	—1,7
9. März	7	—0,7	2,4	—1,0	—0,1	2,1	—1,0
	1	—0,2	3,3	—2,0	1,3	1,6	—0,3
	9	0,3	2,8	—2,4	0,8	1,5	—1,3
1885		idem	— Vitznau 440 m	— Thun 565 m	idem	Säntis 2467 m — Wallenstadt 439 m	Säntis 2467 m — Ebnat 647 m
30. Januar	7	1,0	0,1	—1,8	4,5	2,5	2,8
	1	2,3	0,5	—0,6	5,9	4,6	4,3
	9	5,1	2,5	—0,3	6,7	3,7	3,6
31. Januar	7	4,3	2,9	0,9	6,4	2,4	5,5
	1	2,6	2,2	0,4	5,5	3,2	3,7
	9	1,3	1,7	0,8	3,5	1,6	2,7

1885	Termin	Chaumont 1128 m — Neuchâtel 448 m mm	Rigi-Kulm 1787 m — Vitznau 440 m mm	Beatenberg 1150 m — Thun 565 m mm	St. Bernhard 2478 m — Martigny 481 m mm	Säntis 2467 m — Wallenstadt 439 m mm	Säntis 2467 m — Ebnat 619 m mm	
1. Februar	7^h a.	2,4	2,3	0,1	3,7	2,6	1,6	
	1^h p.	2,2	2,6	—0,2	3,2	4,1	5,1	
	9^h p.	2,1	1,4	0,1	2,7	2,4	9,6 ?	
2. Februar	7	1,8	1,4	0,9	2,4	2,6	14,2 ?	
	1	2,1	1,5	0,7	6,2	4,5	10,4 ?	
	9	—1,4	2,4	0,7	8,3	4,5	0,3 ?	
3. Februar	7	3,6	4,8	0,3	6,0	6,4	—5,3 ?	
	1	2,5	1,7	—0,8	4,2	4,4	—2,9 ?	
	9	1,8	—0,3	—0,4	1,8	—0,2	—2,3 ?	
1892		idem	— Gersau 440 m	idem	idem	M. Generoso 1610 m — Lugano 275 m	Säntis 2500 m — Ebnat 649 m	Pilatus 2067 m — Luzern 451 m
18. August	7	—1,1	—0,1	—0,3	1,0	—1,0	—0,6	—2,0
	1	—0,1	1,4	0,6	1,4	0,4	1,1	—0,4
	9	1,4	—0,6	0,6	1,4	—0,1	0,1	—0,5
19. August	7	—1,2	0,0	—0,1	0,1	—1,7	—0,7	—1,4
	1	—0,8	1,1	1,4	—0,8	—0,3	0,5	—0,2
	9	—2,0	—0,2	0,0	1,2	—0,9	0,0	—2,1
		idem	idem	idem	idem	idem	Säntis 2500 m — Gäbris 1253 m	idem
28. Oktober	7	—2,1	—2,0	—1,1	3,8	—1,9	1,1	—3,1
	1	—1,5	—0,2	0,1	4,9	—1,0	—0,2	—1,9
	9	—0,8	—1,6	0,4	3,1	—1,4	0,5	—1,3
29. Oktober	7	—1,1	0,0	0,2	3,6	—1,3	0,8	—1,0
	1	—0,2	—0,3	0,1	5,3	—0,7	0,3	—1,0
	9	—0,5	2,2	1,6	5,4	—0,2	0,4	1,4
30. Oktober	7	0,5	1,4	1,2	6,3	—0,4	0,8	0,2
	1	0,2	1,6	1,7	7,6	0,0	0,7	0,8
	9	0,0	2,1	2,1	8,1	0,1	1,5	1,7
31. Oktober	7	0,3	1,8	1,4	7,2	—0,2	1,0	1,5
	1	0,5	0,3	1,7	8,2	—0,2	2,1	2,3
	9	0,5	1,9	1,4	6,8	—0,5	1,6	1,4
1. November	7	0,2	2,0	0,8	5,9	2,0	0,9	1,4
	1	0,4	1,2	1,4	5,7	0,0	1,3	0,9
	9	—0,2	—0,1	0,7	5,1	1,2	—0,1	—0,3

Aus dieser Tabelle ergiebt sich zunächst in Uebereinstimmung mit dem S. 12 bereits gezogenen Schluss, dass gemäss dem Vorherrschen der positiven Vorzeichen der Differenzen, die Reduktionsgrössen für die hohen Stationen durchweg zu hoch ausgefallen sind.

Für Kombinationen von Stationen, die beide gar nicht oder in ähnlicher Weise vom Föhn beeinflusst erscheinen, wie Chaumont—Neuchâtel, Monte Generoso—Lugano, Pilatus—Luzern, Uetliberg—Zürich, Beatenberg—Thun, erreichen die Barometerdifferenzen selbst für 1600 m Höhendifferenz durchweg keine höhern Werte als ± 2 mm; bei Rigi-Kulm—Gersau (resp. Vitznau) mit 1300 m Höhendifferenz und Beatenberg—Interlaken mit 600 m Höhendifferenz sind die höheren Barometerdifferenzen im März 1872 wahrscheinlich auf fehlerhafte Barometerkorrektionen zurückzuführen; die bedeutenden, bis 8 mm gehenden Barometerdifferenzen der Kombination St. Bernhard—Martigny mit 2000 m Höhenunterschied dürften zum Teil der lokalen Druckverminderung durch den Föhn an der untern Station, zum Teil fehlerhaften Barometerkorrektionen — das Jahresmittel für 1892 von Martigny ist um 1,3 mm niedriger als auf dem St. Bernhard und die Barometerdifferenzen im März 1872 sind viel kleiner als die vom Januar 1885 und Oktober 1892, allerdings auch diejenigen vom August 1892 — und nur bis zu einem Betrag, wie wir ihn bei Säntis-Wallenstadt[1]) mit gleichem Höhenunterschied finden, d. h. bis etwa zu 4 mm einem wirklich zu grossen Wert der Barometerreduktion bei der hohen Station beizumessen sein. Hiernach kämen wir zum Schlusse, dass im Hochgebirge zur Zeit des Föhns unsere, auf das Niveau von 500 m reduzierten Barometerstände je nach der absoluten Höhe der Station um 2—4 mm zu hoch sein dürften.

Es frägt sich jetzt, welchen Einfluss ein solch eventueller Fehler auf die Gestaltung der Isobaren im Hochgebirge resp. auf das Barometergefälle von Süd nach Nord über die Alpen weg haben würde. Da sich die Isobaren am meisten beim Gotthard drängen, und wir auch im ungefähren Meridian desselben nördlich und südlich tief liegende Stationen haben, so wird es am besten sein, zu dem Ende die Druckverhältnisse über den Gotthard hin von Süd nach Nord näher zu besprechen. In der beiliegenden Tafel I habe ich für gewisse Terminstunden einiger ausgezeichneter Föhntage sowie auch von Zeiten vor oder zu Beginn eintretenden Föhns die Druckgefälle der auf 500 m reduzierten Barometerstände einer Zahl von Stationen in der fraglichen Gegend graphisch dargestellt, wobei die Abscissen der Kurven die horizontalen Entfernungen der Orte von Altorf (1 mm = 1 Kilometer) repräsentieren. Betrachten wir nun z. B. die Kurve von 7^h a. des 31. Januar 1885 näher, so beträgt darnach der Druckunterschied zwischen Basel und Lugano 11,0 mm; derselbe wird nur um 0,1 mm vergrössert, wenn wir die beiden Barometerstände im Niveau von Lugano: 275 m nehmen, wobei der von Basel

[1]) Aus dem Vergleich der Barometerdifferenz Säntis—Wallenstadt und Säntis—Ebnat pro Januar—Februar 1885 ersieht man sofort, dass die Barometerstände in Ebnat von 9^h p. des 1. Februar an ganz unrichtig sind, was auch bereits die Isobaren zeigten.

(278 m) nur eine Reduktion von 0,3 mm erfährt. Diese Differenz entspricht also der natürlichen ohne irgend eine Reduktion. Wie aber die Berücksichtigung der Höhenverhältnisse der Stationen ergiebt, gilt dies auch für alle nördlich von der Alpenkette gelegenen Stationen, ausser etwa Einsiedeln, Engelberg, Pilatus und Rigi, da für jene wegen der geringen Höhenabweichung von 500 m die Reduktionsgrössen ± 15 mm nicht übersteigen. Aber selbst die reduzierten Werte für Einsiedeln und Engelberg schliessen sich ganz gut an die der benachbarten Stationen an und auch der Rigi zeigt nur einen wenig zu hohen Wert. Wir können also sagen, dass auf der Nordseite der Alpen bis nach Altorf hin unsere Kurve der Wirklichkeit sehr nahe entspricht. Auf der Südseite gilt dies jedenfalls von Lugano bis in die Gegend von Bellinzona resp. San Vittore hin. Nun weicht aber die Meereshöhe von Faido nicht viel mehr vom Niveau 500 m nach oben hin ab als die von Lugano und San Vittore nach unten und wir dürfen daher auch den reduzierten Wert von Faido bis auf einige Bruchteile des Millimeters als sicher betrachten und entsprechend wohl auch den des sehr nahe gleich hoch gelegenen Gurtnellen auf der Nordseite des Gotthard. Hiefür spricht auch der Umstand, dass die 5,9 mm betragende Differenz der auf 500 m reduzierten Barometerstände dieser Orte (Faido—Gurtnellen) nur um 0,1 mm im positiven Sinn vergrössert wird, wenn wir bloss das Barometer in Faido auf das 17 m tiefer gelegene Gurtnellen reduzieren. Die Differenz der auf 500 m Höhe reduzierten Barometerstände in Airolo und Göschenen beträgt nur 1,6 mm (Airolo—Göschenen) und wird auf 0,7 mm verkleinert, wenn wir das Barometer in Airolo bloss auf das Niveau des 46 m tiefer gelegenen Göschenen reduzieren. Die für diese Stationen bereits über 50 mm betragenden Reduktionsgrössen auf das Niveau von 500 m, involvieren also jedenfalls schon grössere Unsicherheiten, vielleicht über 1 mm. Nun ist kaum anzunehmen, dass der Druck in Airolo niedriger als der in Faido sein sollte, da jedenfalls eine gewisse Stauung der Luft auf der Südseite des Gotthard eintritt; es könnte also höchstens Göschenen einen zu hohen Druck aufweisen, was auch, abgesehen von der Reduktion, aus dem Vergleich mit der vorhergehenden und nachfolgenden Kurve wahrscheinlich wird, ja sogar auf einen Beobachtungsfehler hinzuweisen scheint. Dass der Druck auf dem Gotthard nach der Kurve geringer ist als in Airolo, ist wegen Aufhören der Stauung auf der Passhöhe plausibel, so dass wir die reduzierten Werte für ihn und weiterhin auch für Andermatt jedenfalls nicht als zu hoch ansehen dürfen. Auf der Strecke zwischen Faido und Gurtnellen haben wir also sehr wahrscheinlich einen Druckabfall von 6 mm, jedenfalls aber zwischen San Vittore und Altorf einen solchen von 7 und zwischen Lugano und Altorf von nahe 9 mm. Fehler in den reduzierten Werten der zwischenliegenden Stationen könnten also nur den Effekt haben, dass der Barometersturz auf dieser Strecke zu einem steilern oder minder steilen als in unserer Kurve gestaltet und etwas nach Süden oder Norden verschoben würde. Die allgemeine Verteilung der Isobaren in dieser Gegend würde aber hiedurch nicht wesentlich modifiziert. Es bleibt jedenfalls bestehen, dass der Druck im Süden der Alpen um über 10 mm höher ist als auf der

Nordseite, dass er am Nordabhang der Alpen rasch bis zu einem Minimum am Vierwaldstättersee (die Differenz Vitznau—Gersau bis Lugano beträgt nahe 13 mm) fällt, weiterhin nach Norden wieder etwas ansteigt und sich dann bis zur nördlichen Grenze der Schweiz ziemlich gleich erhält.

Aehnliches zeigen auch die Kurven für 1864, 1872 und 1892, wo nur nach stärkerer Entwicklung des Föhns die reduzierten Werte für den Rigi grössere Abweichungen aufweisen.

Lehrreich dürfte die nachstehende Tabelle sein, in welcher ich die Differenzen der Barometerstände von Rigi-Kulm und Monte Generoso einmal nach Reduktion beider auf 500 m Höhe und sodann nach Reduktion derer von Monte Generoso auf die Höhe von Rigi-Kulm mit den Differenzen der auf 500 m Höhe reduzierten Barometerstände in Gersau und Lugano zusammengestellt habe.

1872		Rigi-Kulm—Monte Generoso 1787 m beide auf 500 m Höhe reduziert. mm	1224 m M. Generoso auf Rigi-Kulm reduziert. mm	Gersau—Lugano 440 m 275 m beide auf 500 m Höhe reduziert. mm	Differenz mm	1892		Rigi-Kulm—Monte Generoso 1787 m beide auf 500 m reduziert. mm	1610 m M. Generoso auf Rigi reduziert. mm	Gersau—Lugano 440 m 275 m beide auf 500 m Höhe reduziert. mm	Differenz mm
6. März	7h	—4,6	—2,5	—4,0	—0,6	28. Okt.	7h	—7,5	—5,5	—7,4	—0,1
"	1	—5,3	—3,2	—5,4	0,1	"	1	—7,2	—5,2	—8,0	0,8
"	9	—6,2	—4,1	—7,4	1,2	"	9	—6,5	—4,5	—6,3	—0,2
7. März	7	—7,8	—5,7	—9,9	2,1	29. Okt.	7	—6,9	—4,9	—8,2	1,3
"	1	—8,1	—6,0	-10,6	2,5	"	1	—7,3	—5,3	—7,7	0,4
"	9	—7,7	—5,6	—8,7	1,0	"	9	—6,9	—4,9	—9,3	2,4
8. März	7	—6,1	—4,0	—8,1	2,0	30. Okt.	7	—6,2	—4,2	—8,0	1,8
"	1	—6,1	—4,0	—7,9	1,8	"	1	—6,7	—4,7	—8,3	1,6
"	9	—5,0	—2,8	— 5,8	0,8	"	9	—6,8	—4,8	—8,8	2,0
9. März	7	—4,6	—2,5	—5,9	1,3	31. Okt.	7	—6,1	—4,1	—8,1	2,0
"	1	—5,1	—3,0	—6,8	1,7	"	1	—7,0	—5,0	—7,5	0,5
"	9	—3,5	—1,4	—4,8	1,3	"	9	—6,3	—4,3	—8,7	2,5
						1. Nov.	7	—8,2	—6,2	—8,2	0,0
						"	1	—6,0	—4,0	—7,2	1,2
						"	9	—6,8	—4,8	—5,5	—1,3

Die letzte Kolumne enthält je den Unterschied der Differenzen Gersau—Lugano und Rigi-Kulm—Monte Generoso, beide auf 500 m Höhe reduziert. Man ersieht hieraus, dass der Gradient über den Gotthard herüber am grössten ist für die in der Tiefe gelegenen, wenig von 500 m Höhe abweichenden Orte beiderseits, dass er um durchschnittlich 2 mm geringer wird für die ungefähr 1500 m hoch gelegenen benachbarten Orte nach Reduktion ihrer Barometerstände auf 500 m Höhe und nochmals um 2 mm abnimmt, wenn wir direkt die Differenzen der Barometerstände in ungefähr 1500 m Höhe betrachten.

Immerhin habe ich beim Ziehen der Isobaren darauf Rücksicht genommen, dass die reduzierten Barometerstände für den St. Bernhard um einige Millimeter zu hoch sein dürften.

Trotz der Unsicherheit der Barometerreduktionen im Hochgebirge können wir nach dem Vorigen schliessen, dass unsere Isobarenkarten auch da der Wirklichkeit nahezu entsprechen werden. Dies gilt allerdings nur von den allgemeinen Zügen, denn sicherlich würde bei einem reichern und stellenweise auch zuverlässigern Beobachtungsmaterial im Detail sich manches anders gestaltet haben. Ebenso hätte die mir nicht mögliche Benutzung der Daten benachbarter ausländischer Stationen gewiss mehrfach kleine Modifikationen der Isobaren bedingt.

Die nähere Untersuchung von sechs typischen Föhnstürmen in den nördlichen Alpenthälern der Schweiz (den von Herrn Billwiller behandelten mit inbegriffen) gestattet nun, die charakteristischen Eigenschaften derselben in folgenden Sätzen etwas schärfer zu formulieren:

1. Der Föhn stellt einen durchaus stürmischen, in den nördlichen Alpenthälern vom obern Anfang zum untern offenen Ende des Thales meistens stossweise wehenden, also im allgemeinen von Süd nach Nord gerichteten Wind dar. Da er sich indessen der Thalrichtung anpasst, so kann er je nach dieser bald als Südwest, Süd, Südost, ja auch als Ost (Wildhaus, Linthkolonie) und sogar, allerdings schwächer, als Nordost (oberes und mittleres Rhonethal) auftreten. Es dürfte kaum ein Thal am Nordabhang der Alpen geben, in welchem nicht zeitweise der Föhn erscheint.

2. Der Föhn tritt als stürmischer Wind immer zuerst am obern Ende des Thales auf und pflanzt sich von da in kürzerer oder längerer Zeit gegen das untere Ende hin fort. Dabei zeigt sich zu Anfang durchweg ein vom Ausgang des Thales her wehender schwacher Gegenwind, der auch den schon eingetretenen Föhn hie und da unterbricht.

3. Das Eintreten des Föhns ist stets von einem Fallen des Barometers, einer Erhöhung der Temperatur und Verminderung der relativen Feuchtigkeit der Luft begleitet. Je stärker der Föhn auftritt, um so abnormer werden diese begleitenden Erscheinungen. Der Himmel heitert sich beim Eintreten des Föhns, wenn er nicht bereits wolkenfrei war, gewöhnlich auf, worauf dann im Allgemeinen bald wieder mehr oder minder starke Bewölkung erfolgt.

4. Nach ein- bis fünftägiger Dauer schlägt gewöhnlich der Föhn in sein Gegenteil um, d. h. es tritt bei westlichen bis nordwestlichen Winden eine Erniedrigung der Temperatur, Vermehrung der Feuchtigkeit, volle Bedeckung des Himmels und Regen ein.

Hiemit gehen wir bereits zur Erörterung der den eigentlichen Föhn in den nördlichen Thälern vorher und nachher, also zeitlich, und ebenso ausserhalb derselben, also räumlich, begleitenden Witterungserscheinungen über.

5. Zur Zeit des Föhns zeigt sich stets über der Schweiz eine ganz abnorme Verteilung des Luftdrucks. Die im Allgemeinen von Südwest nach Nordost verlaufenden Isobaren drängen sich über dem Hochgebirge und namentlich beim Gotthard nahe zusammen infolge starker Erniedrigung des Druckes im ganzen nordwestlichen Teil und Erhöhung desselben im Südosten der Schweiz und zwar besonders im Tessin, so dass

also ein starker von Südost nach Nordwest gerichteter Druckgradient über den Alpen entsteht. Während über der Schweiz im Jahresmittel höchstens drei ganzen Millimetern entsprechende Isobaren im Niveau von 500 m zu verzeichnen sind, muss zur Entstehung eines typischen Föhns der Druckgradient über die Alpen im Niveau von 500 m so gross sein, dass z. B. zwischen Faido und Altorf die Druckdifferenz mindestens 7 mm im Winter, 6 mm im Herbst und Frühling und 4 mm im Sommer beträgt, oder es muss der Gradient nach der internationalen Uebereinkunft pro Aequatorgrad (111 km) mindestens gleich 18 mm, resp. 15 mm, resp. 10 mm sein.

6. Zur Zeit des Föhns bemerken wir am Nordabhang der Alpen stets mehr oder minder zahlreiche und stärker oder schwächer ausgesprochene lokale Druckminima, die meistens an den Ausgängen der Thäler, aber auch in diesen selbst auftreten. Vielleicht würden solche Minima bei genügendem Beobachtungsmaterial in allen vom Föhn heimgesuchten Thälern nachweisbar sein. Doch bedingen diese Minima nicht allein den Föhn, da sie häufig auch vor Beginn oder nach Aufhören des Föhns bestehen; es muss jedenfalls der oberwähnte Gradient über dem Hochgebirge hinzukommen, um einen Föhn zu erzeugen.

7. Ausser dem Föhn in den Alpenthälern finden wir zur Zeit desselben starke Winde nur auf den Höhen des Jura und der Alpen, dagegen im Flachland der Schweiz zwischen Jura und Alpen und besonders im Tessin meistens nur schwache Winde aller möglichen Richtungen, unter denen immerhin dort westliche bis nordwestliche und im Tessin südliche Winde vorherrschen.

8. Zur Zeit des Föhns drängen sich auch die Isothermen ähnlich wie die Isobaren in abnormer Weise um das Hochgebirge. Während über der Schweiz im Jahresmittel durchweg nur drei ganzen Graden entsprechende Isothermen, nämlich im Niveau von 500 m von 8° im Norden bis 10° im Tessin verlaufen, zählen wir deren zu Föhnzeiten bis zu sechszehn, z. B. am 2. Februar 1885 solche von 0° bis 15°, wobei sich im Süden der Alpenkette und ebenso im Flachland der Schweiz zwischen Alpen und Jura die niedrigen Temperaturen finden und die abnorm hohen nur im eigentlichen Föhngebiet, d. h. in den Thälern am Nordabhang der Alpen auftreten.

9. In analoger Weise wie die Temperaturen erscheinen auch die relativen Feuchtigkeiten der Luft zur Zeit des Föhns abnorm verteilt, indem wir in den Föhnthälern trockene Luft bis zu 20% relative Feuchtigkeit antreffen, während wieder im Flachland der Schweiz nördlich von den Alpen, ganz besonders aber im Süden derselben, hohe Feuchtigkeiten auftreten. Ausser im Sommer ist nach eingetretenem Föhn der Himmel im Tessin gewöhnlich ganz bedeckt und die Luft mit Wasserdampf bis zur Kondensation desselben gesättigt.

10. Das Eintreten des Föhns kündigt sich durchweg durch ein vorhergehendes ungewöhnlich starkes Steigen der Temperatur und Fallen des Barometers auf den Höhenstationen der Schweiz an, und in den Föhnthälern bemerkt man bereits stürmischen Wind in der Höhe, ehe der Sturm ins Thal heruntersteigt resp. sich da bemerklich macht.

11. Bei heftigem Föhn in den Alpenthälern zeigen sich meistens auch in den benachbarten ebenern Teilen der Schweiz dem Föhn entsprechende Erscheinungen, d. h. warme und trockene südliche Winde, welche aber nie die stürmische Heftigkeit wie dort erreichen.

12. Der Zug der Wolken oder also der Wind in den höhern Schichten der Atmosphäre ist bei Föhn meistens Südwest, doch kommt häufig auch einerseits Süd und Südost und anderseits West und Nordwest vor. Von den isolierten Berggipfeln ist auf dem Monte Generoso Südost, auf dem Rigi Süd, auf dem Säntis Süd-Südwest und auf dem Pilatus Südwest vorherrschend.

13. Vor Beginn des Föhns und während desselben finden wir stets ein starkes Depressionscentrum über den britischen Inseln oder an der Westküste Frankreichs und hohen Druck in Italien, Süd-Oesterreich, Ungarn und der Türkei, also niedrigen Barometerstand im Nordwesten und Westen der Schweiz und hohen im Osten und Südosten. Cyclonale, durchweg starke Südwestwinde wehen infolge dessen in Frankreich und Deutschland, in Italien südliche bis östliche Winde, die aber in Norditalien am Südabhang der Alpen schwach und veränderlich in der Richtung werden.

14. Der Föhn in den nördlichen Alpenthälern der Schweiz hört auf, sowie sich im Südwesten und Westen derselben, also über Spanien und Süd-Frankreich, beim Fortschreiten des Depressionscentrums im Nordwesten nach dem Nordosten Europas der Druck hebt oder an Stelle des hohen Druckes im Süden und Südosten ein niedriger Druck tritt.

Dies sind wohl so ziemlich alle wesentlichen Eigenschaften des typischen Föhns und der ihn räumlich und zeitlich begleitenden Erscheinungen. Im Detail und in einzelnen Fällen liesse sich noch dies und jenes beifügen, worauf wir auch gelegentlich in der folgenden Diskussion der Theorie des Föhns noch eintreten werden.

Allerdings sind hier nur besonders stark entwickelte Föhnfälle zur Untersuchung ausgewählt worden. Es schien mir indessen dies zur Feststellung aller wesentlichen Eigenschaften des Föhns geboten, indem schwächere und unbestimmtere Fälle desselben dann nur gewisse beschränkende Modifikationen der letztern, sei es in der räumlichen Ausdehnung, sei es bezüglich des Grades ihrer Entwicklung aufweisen werden.

Theorie des Föhns.

Eine richtige physikalische Erklärung des Föhns, wenigstens was die ungewöhnliche Erwärmung der Luft in den Thälern am Nordabhang der Alpen trotz niedriger Temperatur und hoher relativer Feuchtigkeit derselben auf den Höhen betrifft, hat Helmholtz in seiner populären Vorlesung, gehalten zu Frankfurt a./M. und Heidelberg im Februar 1865, „Ueber Eis und Gletscher“ [1]) mit folgenden Worten gegeben: „In einer Luftmasse

[1]) H. Helmholtz, „Populäre wissenschaftliche Vorträge“ S. 97. Braunschweig bei Vieweg. 1865; siehe auch: J. Hann, Neue Arbeiten über den Föhn II. Oesterr. Zeitschrift für Meteorologie Bd. III, S. 293, Anm. 2. Wien 1868. In dem von Hann an dieser Stelle citierten Referat Tyndalls über den obigen Vortrag (Philos. Magaz. Dez. 1865) ist die Helmholtz'sche Erklärung des Föhns nur ganz kurz, ohne eigenes Zuthun, reproduziert und verlohnte daher kaum die Erwähnung.

nämlich, welche sich ausdehnt, verschwindet ein Teil ihres Wärmevorrats, sie wird kühler, wenn sie nicht neue Wärme von aussen aufnehmen kann. Umgekehrt wird durch erneutes Zusammendrücken der Luft dieselbe Wärmemenge wieder erzeugt, welche durch die Ausdehnung verschwunden war. Wenn also zum Beispiel Südwinde die warme Luft des Mittelmeeres nach Norden treiben und sie zwingen, zur Höhe des grossen Gebirgswalls der Alpen hinaufzusteigen, wo sich die Luft, entsprechend dem geringeren, durch das Barometer angezeigten Luftdrucke, etwa um die Hälfte ihres Volumens ausdehnt, so kühlt sie sich dabei auch sehr beträchtlich ab — für eine mittlere Höhe des Gebirges von 11 000 Fuss um 16 bis 25° R. je nachdem sie feucht oder trocken ist — und dabei setzt sie auch gleichzeitig den grössern Teil ihrer Feuchtigkeit als Regen oder Schnee ab. Kommt dieselbe Luft nachher auf der Nordseite des Gebirges als Föhnwind wieder in Thäler und Ebenen hinab, so wird sie wieder verdichtet und erwärmt sich auch wieder. Derselbe Luftstrom also, der in den Ebenen diesseits und jenseits des Gebirges warm ist, ist schneidend kalt auf der Höhe und kann dort Schnee absetzen, während wir ihn in der Ebene unerträglich heiss finden." Obschon diese Erklärung, was den Föhn betrifft, in einigen Punkten nicht ganz zutreffend ist und namentlich auch den grossen Unterschied in der relativen Feuchtigkeit der Luft diesseits und jenseits des Gebirges als Konsequenz nicht betont, so führte sie doch das Hauptprinzip der Abkühlung der Luft durch Dilatation und der Erwärmung derselben durch Kompression in die Theorie des Föhns ein. Dass die Erwärmung beim Herabsinken der Luft in die Alpenthäler diesseits dieselbe relativ sehr trocken mache, hat Herr Hann in seinem Artikel „Zur Frage über den Ursprung des Föhn" [1]) ausgesprochen, in welchem er über die Wirkung der Dilatation und Kompression der Luft fast genau dasselbe wie Helmholtz sagt. In der Anm. auf S. 261 heisst es nämlich: „Wird ein trockener Luftstrom gezwungen, z. B. zur Gipfelhöhe der Berner-Alpen (11—12 000′) aufzusteigen, so kühlt er dabei um etwa 25° R. ab, sinkt er drüben wieder ins frühere Niveau hinab, so wird eine gleich grosse Erwärmung eintreten. Bei einem feuchten Luftstrom würde die Abkühlung nur 16° betragen und seine Wärme am jenseitigen Fuss des Gebirges dementsprechend höher sein [2]). Bestimmter spricht sich Hann ein Jahr später in seinem Aufsatz: „Der Föhn in den österreichischen Alpen" [3]) aus,

[1]) Oesterr. Zeitschrift für Meteorologie Bd. I, S. 261. Oktober 1866.

[2]) Die auffallende Uebereinstimmung dieser Erklärung mit der von Helmholtz gegebenen wird erst dadurch verständlich, dass sie Hann, wie er erst S. 294 des III. Bandes der österreichischen Zeitschrift in Anm. 2 mitteilt, der Schrift von Helmholtz entlehnt hatte. Später (Deutsche meteorol. Zeitschrift 1885, S. 393) hat Herr Hann darauf aufmerksam gemacht, dass eigentlich schon James P. Espy in seinen Schriften von 1857, ja zum Teil sogar bereits 1841 Sätze ausgesprochen hat, welche freilich ohne Anwendung der mechanischen Wärmetheorie doch bereits eine vollständige Theorie der Föhnerscheinungen, wie sie später Helmholtz und Hann aufstellten, enthalten haben. Diese Stellen von Espys Schriften sind indessen ebenso wie die citierte aus Helmholtz Vorträgen seiner Zeit unbeachtet geblieben.

[3]) Oesterr. Zeitschrift Bd. II, S. 433. Oktober 1867.

wo er unter Beibringung von Beobachtungsdaten in den österreichischen Alpen, besonders in Bludenz (S. 440 und folg.), eine präzisere Erklärung des Föhns daselbst nach den obigen Prinzipien giebt.

Eine vollständige Charakterisierung und Erklärung des Föhns in den Schweizer-Alpen habe ich im Jahr darauf in meiner Schrift: „Ueber Föhn und Eiszeit“ (Rektoratsrede gehalten in Bern am 16. November 1867) und im Nachtrag dazu „Der Schweizer-Föhn“ (Bern 1868) gegeben, in denen ich die Resultate meiner Untersuchung von 37 Föhnwinden im Zeitraum vom 1. Dez. 1863 bis 30. Nov. 1866 auf Grundlage der drei ersten Jahrgänge der Beobachtungen der schweizerisch meteorologischen Stationen in Verbindung mit dem internationalen Wetter-Bulletin des Pariser Observatoriums mitteilte. Leider war es mir damals nicht vergönnt, diese Untersuchung meiner Absicht gemäss vollständig zu publizieren. Ich bemerke daher hier nur noch, dass ich schon damals aus der Theorie die Wahrscheinlichkeit einer Föhnerscheinung unter gewissen allgemeinen Witterungsverhältnissen auch auf der Südseite der Alpen folgerte und dann auch die Existenz dieses, von mir zum Unterschied als Nordföhn bezeichneten Windes aus den vorliegenden Beobachtungen in 6 Fällen nachweisen konnte. Ebenso habe ich dort eine physikalische Erklärung des paradoxen Phänomens, dass der Föhn aus der Höhe herabkommt und stets am hintersten Ende des Thales beginnt, ja dort fast am stärksten tobt, zu geben versucht (siehe S. 28 der Rektoratsrede und ausführlicher S. 25—28 des Nachtrags oder S. 30 und 69—72 der gemeinsamen Ausgabe, Bern bei Jent & Reinert 1868).

Im Jahre 1868 erschien sodann die Schrift von L. Dufour „Recherches sur le fœhn du 23. Sept. 1866 en Suisse“[1]), worin derselbe sehr ausführlich diesen speziellen Föhn behandelte und auf S. 58 die Hann'schen Anschauungen über die Trockenheit des Föhns vollständig adoptierte. Herr Dufour hat bei Abfassung seiner Schrift meine Rektoratsrede noch nicht gekannt und konnte sich daher nicht auf dieselbe beziehen.[2]) Dagegen war es mir vergönnt, mich in meinem später verfassten Nachtrag S. 24 (S. 68 der gemeinsamen Ausgabe) bereits auf seine Untersuchung stützen zu können.

In seinem Artikel: „Ueber den Föhn in Bludenz“[3]) hat später Herr Hann die Theorie des Föhns noch eingehender als vorher an der Hand der Beobachtungen entwickelt. Nur in einem Punkt ist seine dortige Erklärung der Vorgänge beim Föhn ungenügend, nämlich was die Ursache des Herabstürzens des Windes in die Thäler betrifft, von der Herr Hann hier zum erstenmale spricht. S. 435 (S. 20 des Separatabdrucks) sagt nämlich Herr Hann: „Man hat früher Schwierigkeiten gefunden, das Herabsteigen des Föhn in die innersten Alpenthäler zu erklären und noch ganz neuerlich hat Herr Hébert in einer sonst sehr verdienstlichen Arbeit eine sehr künstliche und

[1]) Bulletin de la Société vaudoise des sciences nat. vol. IX. No. 58. 1868

[2]) Siehe S. 11 und 12 meiner citierten Schrift: „Der Schweizerföhn“ (od. S. 55 der gemeinsamen Ausgabe von: „Ueber Föhn und Eiszeit“ und dem Nachtrag dazu „Der Schweizerföhn.“

[3]) Sitzungsberichte der Wiener Akad. Bd. LXXXV. II. Abt. März 1882.

gewagte Hypothese aufgestellt, um das Auftreten des Föhn in den Alpenthälern zu erklären. Herr Wild hat früher eine saugende Wirkung des über die Alpenkämme hinbrausenden Sturmes angenommen, welche aber eher einen aufsteigenden Luftstrom in den Thälern erzeugen müsste. In neuerer Zeit hat Herr Billwiller diese scheinbare Schwierigkeit auf die einfachste Weise durch den Hinweis auf die natürlichen Konsequenzen eines Luftzuflusses gegen die atlantischen Depressionsgebiete hinweggeräumt (Zeitschrift für Meteorologie 1878 Bd. XIII p. 319)." Auf die Zusendung seiner Abhandlung schrieb ich damals von Petersburg aus unterm 5/17. Juni 1882 an Herrn Hann gemäss der mir vorliegenden Kopie des Briefes Folgendes: „Ihre interessante Abhandlung über den Föhn in Bludenz, für deren Zusendung ich bestens danke, habe ich gelesen, bin aber mit Ihrer Ansicht auf S. 20 über die Erklärung des Herabkommens des Föhns in den Alpenthälern nicht einverstanden, sondern muss sogar, gestützt auf Ihre eigene Untersuchung S. 18 über den Gradienten in der Höhe und Tiefe nur um so mehr an meiner Ansicht festhalten. Herr Billwiller hat in seiner Abhandlung meines Erachtens nichts Neues gebracht, was nicht Dove und ich (siehe S. 24 meiner ersten Schrift) bereits gesagt hätten. — Leider bin ich auch jetzt anderweitig so sehr in Anspruch genommen, dass ich auf eine Klarstellung der ganzen Frage augenblicklich nicht eintreten kann. Jedenfalls haben Sie die Stelle S. 27 meiner zweiten Schrift (S. 71 der gemeinsamen Ausgabe) übersehen, wo ich darauf aufmerksam mache, dass der Föhn, resp. der thalabwärts gerichtete Wind immer zuerst hinten im Thale auftritt, von dort gegen den Ausgang desselben fortschreitet und dabei durchweg mit einer unmittelbar vorhergehenden, von der Oeffnung des Thales gegen seinen Grund hin fliessenden Strömung zu kämpfen hat. Das ist entscheidend wie die Beobachtung der Vorgänge in einem Regenmesser bei Schneefall mit Wind. Die Schneeflocken gehen auf der dem Winde zugewandten Seite sofort in die Tiefe herunter und dann grösstenteils auf der andern Seite wieder herauf und heraus."

Meine bezügliche Erklärung in der Rektoratsrede, die Herr Hann angreift, lautet (S. 28 resp. 30): „Einer weitern, gegenwärtig allgemein bekannten, weil bereits vielfach praktisch verwerteten Thatsache zufolge wird in einem oben offenen, sonst aber abgeschlossenen Raum jedesmal die Luft verdünnt, wenn ein kräftiger Luftstrom über den Rand der Oeffnung hinstreicht. Dies wird auch mit der in unsern innern Alpenthälern stets mehr oder minder abgeschlossenen Luft geschehen, wenn ein heftiger Sturm über die einschliessenden Gebirge hinbraust. Die Folge davon ist aber, dass dieser Luftstrom in den durch die entgegenstehende Gebirgswand vor ihm geschützten Raum hinein aspiriert wird, also der Sturm nach und nach auch in das Thal heruntersteigt." Von einer saugenden Wirkung des über die Alpenkämme hinbrausenden Sturmes ist also bei mir nicht die Rede, wenn aber Herr Hann eine solche als Ursache der Verdünnung der Luft im Thal annehmen zu müssen glaubte, so würde sich ein allfällig demgemäss aufsteigender Luftstrom jedenfalls nur auf den Anfang des Föhns beschränken, und wir wissen nicht, ob nicht zuerst etwas derartiges geschieht.

Da das Heruntersteigen des Föhns im Thalgrund zur Zeit noch den einzigen unklaren Punkt in der Föhntheorie bildet, so halte ich es für geboten, hier etwas näher darauf einzutreten. Rekapitulieren wir zunächst einige bezügliche Thatsachen.

Im § 18 seiner Schrift über den Föhn vom 23. September 1866 erwähnt L. Dufour drei Fälle, wo der Föhn im Grunde von Thälern als direkt von Höhen bis zu 2500 m herunterkommend beobachtet wurde.[1]) Herr Berndt citiert in seinem Werk über den Föhn S. 124 folgende Aeusserung von Fuchs: „Im Juli 1877 erlebte ich in Engelberg einen mehrtägigen Föhnsturm. Die Luft stürzte damals über alle die Berge vom Surenenpass an über Spanörter und Titlis hinweg in furchtbarer Gewalt in das geschlossene, aus einem See entstandene Thalbecken herab und tobte in dem Kessel in der wildesten Weise durcheinander, indem die von Süd, Südost und Südwest herabkommenden Windstösse allerwärts anprallten und sich durchkreuzten." Nach derselben Quelle S. 65 hat Kohl in seinen Alpenreisen das Eintreten des Föhns im Thal zwischen Guttannen und der Handeckstufe folgendermassen geschildert: „Je weiter wir kamen, desto mehr Spuren zeigten sich von dem schlechten Wetter, das auf der Grimsel herrschte. Kleine Wolken und Nebel flogen, selbst als wir in der Tiefe noch etwas Bise oder Nord hatten, mit ausserordentlicher Hast über unsern Köpfen hin. Der Föhn haust in den oberen Regionen, sagte unser Führer, und da ist sicher weiterhin schlecht Wetter. Weiter hinauf hörte die Bise ganz auf und es kam uns ein warmer Stoss Föhnwind entgegen, der jedoch bald wieder von der Bise verdrängt ward. Als wir noch weiter stiegen, wechselten warmer Föhn und kalte Bise Welle auf Welle, Schlag auf Schlag. — Ueber unseren Köpfen stand ein grauer Wolkenbogen, der die Grenze der Föhn- und Bisherrschaft bezeichnete. Ueber diesem scheinbar ziemlich festen Bogen wurden einzelne Wolkenflocken rasch hinweggetrieben, so dass es also schien, als ob in den höhern Regionen der Föhn die Oberhand hätte. Der Thalwinkel nach der Grimsel zu war sehr finster, abwärts in der Ferne lächelte Sonnenschein. Man sollte nun glauben, dass, wenn ein Sturm erst angefangen habe, aus dem einen Ende eines Thales herabzuwüten, er auch bald nach unten wie ein Wasserfall hinabgeflossen sein müsse. Wir erwarteten jeden Augenblick, dass dies geschehen und der Föhn über uns herfallen

[1]) Bovernier (val d'Entremont, entre Sembrancher et Martigny) est au pied du Catogne au NNO et protégé semble-t-il par cette sommité (haute de 2500 m) de tout courant venant du midi. Le fœhn y a régné avec violence le 23 et, d'après les témoignages concordantes de plusieurs personnes, le courant tombait directement du Catogne, il ne venait point dans le sens de la vallée c'est-à-dire de Sembrancher. — La vallée des Ormonts se termine par un cul-de-sac, le Creux de Champ, dominé au S et au SE par l'énorme massif des Diablerets, dont les sommets forment un espèce de colossale enceinte à 2000 m environ au-dessus du fond de la vallée. Or le foehn a commencé à souffler dans la nuit du 22 au 23 précisément dans ce fond de vallée; sa direction était exactement S-N et s'il n'avait pas une direction inclinée sur l'horizon, on aurait quelque peine à comprendre qu'il atteignit ce point reculé. — La même remarque peut être faite pour le vallon de Frenières, où le vent a été furieux dans les parties les plus enfoncées, protégées au midi par les hauts chaînons qui se rattachent à la chaîne de la dent de Morcles.

werde. Statt dessen blieben wir stundenlang an der Grenze des Schlachtfeldes, wo Föhn- und Biswellen immer abwechselten, und der dunkle Wolkenbogen hielt sich immer über unserem Kopfe, ohne vor- oder rückwärts zu schreiten." Endlich will ich noch einen Bericht über den generellen Eintritt des Föhns in Glarus, welchen Herr Dr. med. Josua Oertly, langjähriger Beobachter daselbst, mir seiner Zeit (19. Oktober 1867) freundlichst eingesandt hat, hier reproduzieren, da er wegen der besonderen Aufmerksamkeit interessant ist, mit welcher dieser akademisch gebildete Mann den im Glarnerland bekanntlich so heftig und typisch auftretenden Föhn viele Jahre hindurch verfolgt hat:

„Als allgemeine Anzeichen eines ins Thal tretenden Föhnes sind nachstehende anzuführen.

Im Süden an den Bergketten zeigen sich leichte, hie und da auch wieder verschwindende Wolken. Ein leichter Cumulus löst sich z. B. zu einem verschwindenden Cirrus auf. Später lagert sich festes Gewölk auf den Spitzen der Berge und wird von einem Fremden sehr leicht für den Kamm der Berge selbst gehalten. Die Färbung dieser Wolkenschicht, bei uns „Föhnmauer" genannt, ist verschieden je nach dem Grade der Beleuchtung oder der Tiefe der Wolkenmasse. Von silberner Färbung geht dieselbe bis zu graudunklem, ja dem Nimbus sich nähernden Kolorit. Morgens und abends ist der Horizont gewöhnlich gerötet; der Himmel ist nicht durchweg bedeckt, die Wolken ziehen aus SO oder SW nach NW oder NO. Der erstere Zug ist der vorherrschende; die Form der Wolken ist durchweg als Cirri, Cirrostrati, Cirrocumuli zu bezeichnen. Wunderschön vor allem sind die herrlichen Südbäume, womit oft der ganze Himmel bedeckt sich findet. Gegen Norden ist blauer Himmel, doch oft ganz im Norden dichtes, dunkles, sattblauschwarzes Gewölk sichtbar.

Auf verschiedene Weise tritt bei uns der Föhn auf. In erster Linie unterscheiden wir den wilden Föhn und den sogen. „Dimmerföhn"; der wilde Föhn, dem oft der zahme oder Dimmerföhn vorangeht, ist eine grossartige Erscheinung in unserem Lande. Dunkles Gewölk bekränzt die Ränder unserer Alpen im Süden. Die Luft ist durchsichtig, aber noch ruhig. Oben jagen die Wolken eilig von S nach N. Unheimliches Tosen und Rauschen in den Bergen zeigt uns die Ankunft des gewaltigen Sturmes an. Immer tiefer sinkt der Wind, endlich im Thale angelangt, zeigt er seine Ankunft durch Bewegung der Windfahne von Nord nach Süd an. Anfänglich mit einzelnen Stössen durchtobt er das Thal, um endlich in einen furchtbaren, Menschen und Tiere deprimierenden Sturm auszuarten, der dann in abwechselnder Stärke bis zu 3—4 Tagen andauert.

Dass der Föhn ein aus der Höhe zu Thal steigender Strom ist, ist für uns ziemlich unangreifbar. Elm, die letzte Ortschaft im Kleinthal, hart am Fusse der gewaltigen Alpenkette, wird von Föhn durchrast, während eine Stunde, zwei Stunden vom Orte, entweder Windstille oder leichter Nord herrscht. Föhn kann bis Mitlödi (1/2 Stunde von Glarus) wehen und in Glarus selbst ist nichts bemerkbar als die Föhnmauer im

Süden, die von Süd nach Nord ziehenden Wolken, bei ruhiger, aus Norden weisender Windfahne. In seltenen Fällen geht der Föhn nur im Kleinthale, im Grossthale aber nicht. Auch hat zuweilen der Wallensee Föhn, das Glarnerland aber nicht. Der aus dem Kleinthale wehende Föhn erscheint viel heftiger, als der aus dem Grossthale.

Beim Dimmerföhn findet nur eine mässig starke südliche Luftströmung statt. Die Berge scheinen uns näher gerückt, da die Luft bei hoher Temperatur durchsichtiger ist. Es wechselt oft ein leichter Nordwind mit dem Südwind ab und die Windfahne dreht sich häufig in kurzer Zeit von Nord über Ost nach Süd und umgekehrt."

Obschon ich mit Herrn Billwiller und Hann darin einig bin, dass die Hypothese des Herrn Hébert von der Existenz von horizontalen Luftwirbeln in den Föhnthälern, welche nach Faye von oben nach unten fortschreitend die Luft aus der Höhe in die Tiefe reissen sollen, wie überhaupt die ganze Cyclonentheorie des Herrn Faye als den Thatsachen widersprechend zu verwerfen sei, so muss ich doch Herrn Hébert insofern Recht geben, als er in der Hann'schen oder wenn man so will in der Espy-Helmholtzschen Theorie des Föhns ein ausreichendes Motiv für das Herabsinken der Luft vermisst. Diese Ergänzung zur Theorie des Föhns habe ich seiner Zeit in der schon mehrfach erwähnten Weise in meiner Schrift über Föhn und Eiszeit zu geben versucht und mich schon damals gegen eine Erklärung dieses auffallenden Phänomens des Herabsteigens ausgesprochen, wie sie später Herr Billwiller[1]) aufgenommen und eingehender befürwortet hat und von der eben Herr Hann im obigen Citat sagt, dass sie diese scheinbare Schwierigkeit in der einfachsten Weise hinwegräume. S. 26 (unten) des Nachtrags zu Föhn und Eiszeit (S. 70 unten der gemeinsamen Ausgabe) drücke ich mich hierüber folgendermassen aus: „Man könnte aber auch als Ursache dieser sprungweisen Erniedrigung des Luftdrucks an dem nördlichen Alpenabhang (an welche ich nämlich meine Erklärung des Hinabsteigens des Windes anknüpfe) an das Abfliessen der Luft nach einer nördlichen Auflockerungsstelle denken, welches Abfliessen Herr Dove in seiner neuesten Schrift (Der Schweizer Föhn S. 24) als Ursache des Sturmes in den Alpen aufzufassen scheint. Nun liegt an beiden Tagen das nächste und Haupt-Depressionscentrum im Nordwesten Europas über England und dem Kanal; dorthin müsste also wohl die Luft aus der Schweiz abströmen. Sehen wir indessen die Beobachtungen nach, so finden wir in der ganzen nordwestlichen Schweiz, wo sich doch dies am auffälligsten zeigen müsste, fast nur südwestliche Winde, im Aarethal wie z. B. in Bern und Olten sogar nordöstliche Winde in der Tiefe und einen von Südwest nach Nordost gerichteten Wolkenzug in der Höhe. Ferner wäre, damit im Luftdruck ein Sprung eintrete, notwendig, dass auch die Luft aus den Alpenthälern teilweise abströme; es müsste also bei diesem Sturme der Wind in den Thälern von Anfang an stets thalabwärts gerichtet gewesen sein und sein Eintritt vom Ausgang des Thales rückwärts bis zum Thalgrunde sich fortgepflanzt haben.

[1]) Oesterr. Zeitschrift für Meteorologie Bd. XIII, S. 319. 1878.

Die Erfahrung zeigt auch hier das Gegenteil. Der Föhn resp. der thalabwärts gerichtete Wind tritt immer zuerst hinten im Thale auf, schreitet von dort allmählich gegen dessen Ausgang hin fort und hat dabei durchweg mit einer unmittelbar vorhergehenden, von der Oeffnung des Thales gegen dessen Grund hinfliessenden Strömung zu kämpfen. Dieses letztere Faktum eines dem Eintritt des Föhns unmittelbar vorhergehenden Gegenwindes scheint mir noch viel sicherer als die vereinzelten Terminsbeobachtungen am Barometer für eine Verdünnung der Luft im Thalgrunde durch den oben über die einschliessenden Bergkämme hinbrausenden Sturm zu sprechen. Es wird nämlich dadurch im Anfang die Luft von der Oeffnung des Thales her ebenso gut aspiriert wie von oben her, bis endlich der nach und nach herabkommende Sturm das erstere verhindert. Ich bin übrigens weit davon entfernt, die Verminderung des Luftdrucks in den Alpenthälern ausschliesslich dieser Verdünnung derselben durch den Sturm in der Höhe zuschreiben zu wollen. Wenn aber am 23. Sept. 1866 der auf das Meeresniveau reduzierte Luftdruck von Rom bis zum St. Gotthard nur um 5 mm und von Altorf bis zum Depressionscentrum im Kanal La Manche nur um 10 mm abnimmt, während er vom Gotthard bis zum nahen Altorf um 7 mm sinkt, so kann ich mir einen fast plötzlichen Absturz von solchem Betrag ohne Zuhülfenahme meiner Verdünnungstheorie nicht erklären." — Die hier mitgeteilten neuen Untersuchungen setzen uns jetzt in den Stand, uns viel bestimmter, als es damals geschah, auszusprechen. Zunächst können wir mit Sicherheit behaupten, dass das blosse Abfliessen der Luft nach dem Depressionscentrum im Nordwesten in den Thälern nicht die Ursache des stürmischen Herabkommens des Windes im Thalgrund sein kann.

Nehmen wir nämlich sogar an, es finde beständig, wenn auch nur vom Flachland der Schweiz her, bis in die hinterste Thalecke im gleichen Niveau ein steigender Druck statt, der ja allein ein Abfliessen der Luft aus dem Thal nach der Ebene hin bewirken könnte, so wird dies nur so lange fortgehen, bis der Druck im Thalgrund demjenigen an seiner Oeffnung oder draussen gleich geworden ist; von einer eigentlichen Verdünnung der Luft im Thalgrunde könnte daher hiernach nicht die Rede sein, und es ist daher auch kein Grund vorhanden, weshalb Luft von oben stürmisch ins Thal herunterfliessen soll, denn die Luft in der Höhe ist wenigstens im Anfang nicht relativ schwerer als die in der Tiefe. Es würde höchstens die Luft in der Höhe, wenn der Druck in ihrem Rücken grösser ist, sich selbst in der Höhe und mit einer schwachen Neigung zum Boden hin gegen das Flachland hin in Bewegung setzen, was ja auch in der That geschieht.

Aber auch jene Voraussetzung ist im Allgemeinen unhaltbar, indem, wie wir gezeigt haben, der Druck vor Beginn des Föhns am Ausgang des Thales stets höher ist als in seinem Grunde und demgemäss zu dieser Zeit auch durchweg der Wind thatsächlich von der Oeffnung gegen den Thalgrund hinweht, also von einem Abfliessen der Luft aus demselben keine Rede ist. Gegen dieses hypothetische Abfliessen der Luft aus den Thälern vor Eintritt des Föhns spricht auch der Umstand, dass die relative

Feuchtigkeit zu dieser Zeit am Ausgang derselben überall bedeutend höher ist als weiter oben im Thal, während sie beim Abfliessen resp. Herunterfliessen im Thal infolge der dabei stattfindenden Erwärmung ganz wie später nach Eintritt des Föhns nach dem Ausgang des Thales zu umgekehrt geringer werden müsste. Erst wenn nach Eintritt des Föhns der Druck im Thalgrund höher geworden ist als weiter unten im Thal tritt ein Abfliessen der Luft aus ihm ein. Um die schon bei den untersuchten Föhnstürmen jeweilen am Schluss dargelegte Druckverteilung in einigen Föhnthälern vor und während des Föhns noch in einem speziellen Fall ad oculus zu demonstrieren, habe ich in der beiliegenden Tafel II die Druckverhältnisse im Linththal mit seinem Zweigthal der Sernf für den Föhn vom Januar bis Februar 1885 graphisch dargestellt unter Hinzufügung von Angaben über das Eintreten und Verschwinden des Föhns an den vier Stationen. Da die Linthkolonie an der Umbiegungsstelle des Linththales und seiner Verbindung mit dem Wallenseethal liegt, durch welches von Osten her ebenfalls häufig Föhnströmungen sich geltend machen, so ist das Verhalten dieser Station nicht immer den Verhältnissen des obern Linththales entsprechend. Wenn man mit dieser Darstellung der Druckverteilung im Linththal die in den Tabellen und in unsern synoptischen Karten angegebenen Winde der Stationen vergleicht, so wird man in 12 von den 15 Terminen die letztern ganz jenen entsprechend finden. Ebenso bestimmt finden wir dies beim Föhn vom Oktober 1892 bestätigt, wo freilich die Station Linthkolonie nicht mehr fungiert hat.

Ich kann also Herrn Billwiller nicht beistimmen, wenn er an der oben citierten Stelle sagt: „Die geheimnisvolle Kraft, welche die herabsteigende Bewegung der Luft veranlasst, ist nichts anderes als die Aspiration eines in grösserer oder geringerer Entfernung vorüberziehenden barometrischen Minimums, in welchem bekanntlich die Luft von allen Seiten her in Spirallinien dem Centrum zuströmt. Diese Aspiration, welche zunächst in den unteren Luftschichten stattfindet, saugt gleichsam die Luft aus den Thälern heraus; durch die Verdünnung derselben wird das Gleichgewicht gestört und es strömt daher oben von den Alpenkämmen, namentlich durch die Pässe, die Luft von der andern Seite der Gebirgsmauer in den luftverdünnten Raum der Thäler; aber dazu bedarf es keiner Wirbel, sondern die Bewegung erfolgt ganz in der Weise eines thalabwärtsfliessenden Wassers, d. h. die Strömung folgt der Richtung der Thäler und breitet sich an der untern Thalmündung nach allen Seiten, wie es eben das Terrain gestattet, aus.“ Nicht nur findet, wie wir gezeigt haben, thatsächlich kein Abfliessen der Luft aus den Thälern vor Eintritt des Föhns statt, sondern eher ein Hineinströmen in dieselben, ja es könnte selbst ein solches Abfliessen nie eine eigentliche Verdünnung der Luft in den Thälern bewirken, welche das stürmische Herunterströmen der Luft von den Alpenkämmen zur Folge hätte. Aber auch die Aeusserung des Herrn Billwiller, dass die Aspiration nach der Depressionsstelle zunächst in den unteren Luftschichten stattfinde, scheint mir nicht den Thatsachen zu entsprechen. Wir haben vielmehr in allen von uns untersuchten Föhnfällen gemäss Erfahrungssatz 10 gesehen,

dass in der Schweiz vor Eintritt des Föhns sich zuerst in den höheren Schichten der Atmosphäre eine warme Südwest-Strömung, welche der cyclonalen Bewegung der Luft um das Depressionscentrum im Nordwesten Europas entspricht, einstellt, dass auch über den Thälern eine starke westliche bis südliche Luftströmung in der Höhe dem Herabsteigen des Sturmes ins Thal vorangeht und dass dagegen in den untern Luftschichten resp. im Flachland der Schweiz zwischen Alpen und Jura relativ niedrige Temperaturen mit schwachen Winden aller möglichen Richtungen, vielfach sogar nördliche, gegen die Alpen hin gerichtete Strömungen die Regel sind.

Wenn endlich Herr Hann auf S. 21 seiner citierten Abhandlung über den Föhn in Bludenz die Helmholtz'sche Theorie des Föhns, die er wie ich früher ganz vertrat, insofern verlässt, als er bestreitet, dass „Südwinde die warme Luft des Mittelmeeres nach Norden treiben und sie zwingen zur Höhe der Alpen hinaufzusteigen, wobei sie sich abkühlt und den grössern Teil ihrer Feuchtigkeit als Regen oder Schnee absetze", so muss ich mich nach unsern vorstehenden Untersuchungen damit, was das Zuströmen der Luft aus der Tiefe im Beginn des Föhns betrifft, einverstanden erklären, dagegen scheint es mir nicht den Thatsachen zu entsprechen, überhaupt jedes Zuströmen der Luft im Süden der Alpen vor Beginn des Föhns zu leugnen und dasselbe erst als eine Folge des Föhns zu betrachten. Wir haben gesehen, dass vielmehr längere Zeit schon vor Beginn des Föhns die Luft in der Höhe über den Alpenkämmen von Süden und Westen her in stürmischer Bewegung sich befindet und dieses stürmische Herüberstreichen der Luft über die Alpenkämme ist meines Erachtens eben die Kraft, welche schliesslich die herabsteigende Bewegung der Luft in den Thälern veranlasst. Sie ist zwar keine geheimnisvolle Kraft, sondern, wie ich früher schon geäussert habe, das Resultat bekannter physikalischer Gesetze. Die stürmische Bewegung der Luft in der Höhe hat eben auch aërodynamische Wirkungen zur Folge. Wenn ein Luftstrom sich plötzlich erweitern kann, so entsteht bekanntlich seitlich von der Erweiterungsstelle stets ein negativer Druck resp. eine Luftverdünnung. Wie sie zu Stande kommt, könnte uns hier gegenüber der bestehenden Thatsache gleichgültig sein; offenbar erfolgt sie aber in der Art, dass die nächsten Luftschichten an der Wand infolge der Reibung an ihr eine kleinere Geschwindigkeit haben als die entferntern, bei der Erweiterungsstelle werden also diese jene überholen und so ein Einbiegen der Luftfaden in den geschützten Raum infolge ihres höhern dynamischen Druckes veranlassen; sie reissen dann die nächsten Teile der ruhigen Luft daselbst mit in ihre fortschreitende Bewegung herein und bewirken damit die Verdünnung der Luft, welche mit dem Manometer nachzuweisen ist. Etwas ganz Entsprechendes wird offenbar auch beim Herüberstreichen eines Windes über einen Gebirgskamm eintreten müssen. Der Luftstrom wird etwas in den geschützten Raum hinter der Bergwand einbiegen, die nächsten Luftschichten mit fortreissen und so einen luftverdünnten Raum bewirken, in welchen zunächst nach aussen gelegene ruhige Luft im Thalgrund zurückströmt, kurz es wird sich eine Art vertikaler Luftwirbel im Thale einstellen, wie wir ihn als Wasserwirbel hinter jedem breiten

Brückenjoch eines rasch fliessenden Gewässers in horizontalem Sinne sich vollziehen sehen. Wir haben oben zur Genüge beim Beginn des Föhns den niedrigen Druck hinten im Thal und den Gegenwind von der Oeffnung desselben her kennen gelernt. Dass nun nach und nach am Anfang des Thales immer tiefere Luftschichten von dem obern Strom direkt ergriffen werden, bis endlich der Wirbel da verschwindet und der Strom von der Höhe das Thal bis auf den Grund erfüllt, also der Föhnsturm dort ins Thal heruntergestiegen ist, wie man sich ausdrückt, während weiter unten im Thal noch die Wirbelbewegung fortdauert, ist selbstverständlich. Die Verdünnung der Luft pflanzt sich also, wie wir es auch gesehen haben, nach dem Thalausgang zu fort, während der Druck am obern Ende durch Ausfüllung mit Luft steigt. Diese Ausfüllung mit dem obern Strom wird aber nach und nach auch unten erfolgen, bis der Föhn das ganze Thal durchbraust. Wir verstehen aber jetzt auch, wie ein Auffrischen des Windes in der Höhe neue Wirbel im Thal erregen und ein erneutes oder verstärktes Auftreten des Föhns von oben nach unten im Thal zur Folge haben kann. Diese aërodynamische Theorie des Heruntersteigens des Föhns ins Thal erklärt auch zugleich sein stürmisches und stossweises Auftreten, sowie das namentlich zu Anfang desselben häufig erfolgende Umspringen des Windes durch Vor- und Zurückweichen des Wirbels im Thal. Man hat früher allgemein und so auch beim Föhn von einem Kampf entgegenstehender Winde, z. B. Südwind und Bise gesprochen, als ob man es da mit zwei agressiv aufeinander losgehenden Gegnern zu thun hätte und die Luft vielmehr nicht einfach dahin strömte, wo der geringere Druck herrscht. Nur wenn die Stelle niedrigern Drucks selbst sich verschiebt, wie das bei den vertikalen Wirbeln nach unserer Theorie der Fall ist, wird es an einem bestimmten Ort scheinen, als ob bald der eine bald der andere Wind die Oberhand gewinne.

Die Wolken aber, welche bei Föhn immer früher oder später an den Gebirgskämmen auftreten, sind auf den aufsteigenden feuchten Luftstrom jenseits des Gebirges zurückzuführen, der aber nicht durch einen in der Tiefe von Süden her kommenden Wind hinaufgetrieben, sondern von dem in der Höhe wehenden Südwind gewissermassen angesaugt wird, wie wir im Verfolg noch näher sehen werden.

Um diese Verhältnisse noch klarer zu machen, habe ich in den nachstehenden Tabellen die unmittelbar beobachteten Temperaturen, die absoluten und relativen Feuchtigkeiten sowie die Bewölkung und dann auch die auf 500 m Seehöhe reduzierten Temperaturen der am Uebergang über den Gotthard von Lugano bis nach Sursee und Zürich hin gelegenen Stationen unter Beifügung der betreffenden Daten des Rigi zu Anfang und des Monte Generoso am Schluss für die untersuchten Föhne mit Ausschluss des Sommerföhns je vom Beginn bis zu 7^h a. des zweiten Tages, d. h. der vollen Entwicklung des Föhns zusammengestellt. Die zugehörigen Wind- und Luftdruckdaten kann man unsern synoptischen Karten entnehmen.

		Rigi	Zürich	Sursee	Luzern	Schwyz	Gersau	Altorf	Gurtnellen	Göschenen	Andermatt	St. Gotthard	Airolo	Faido	Bellinzona	Lugano	M. Generoso
1864	Temp.	2°,8	5°,6		0°,4*	4°,3	0°,0*	3°,3	—	—	2°,2	−4°,0	—	2°,2	1°,9	0°,9	
		mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
7. März	A. F.	—	5,7		4,5	4,7	4,4	4,8	—	—	—			4,1	5,1	4,9	
7^h a.	R. F.		84		91	76	96	84	—	—		—		77	96	100	
	Bew.	8	3		5	3	6	5	—	—	4	6	—	1	0	0	
	R. Temp.	9°,0	5°,6		0°,1	4°,5	−0°,3	3°,1	—	—	6°,7	3°,6	—	3°,2	0°,6	−0°,1	
	Temp.	4,8	13,7		15,1	13,9	14,6	16,5		—	5,0	—2,2	—	6,9	8,2	7,2	
	A. F.	—	7,7		6,9	4,7	5,9	3,2						5,4	7,0	6,7	
1^h p.	R. F.	—	66		54	40	48	23		—				73	86	89	
	Bew.	7	5		7	4	5	2	—	—	7	10	—	6	9	10	
	R. Temp.	11,0	13,7		11,8	14,1	11,3	16,3	—	—	9,5	5,4	—	7,9	6,9	6,2	
	Temp.	4,2	10,4		10,7	11,7	7,4	11,2			3,0	—2,8		4,4	7,2	6,6	
	A. F.	—	6,0		5,6	4,0	5,4	3,4		—	—	—		6,0	7,3	7,1	
9^h p.	R. F.	—	64		59	39	70	28						97	97	98	
	Bew.	6	5		4	0	3	0	—	—	0	10	—	10●	10●	10	
	R. Temp.	10,4	10,4		10,4	11,9	7,1	14,0	—	—	7,5	4,8	—	5,4	5,9	5,6	
8. März	Temp.	2,4	9,1		1,6	12,0	2,2	14,4		—	2,8	—5,0		4,0	6,9	6,4	
	A. F.	—	6,0		5,0	3,9	4,4	3,1		—				5,9	6,8	7,0	
7^h a.	R. F.	—	69		95	38	83	26	—	—	—	—		97	91	97	
	Bew.	4	5		5	3	0	5	—	—	10	10*	—	10●	10●	10●	
	R. Temp.	8,6	9,1		1,3	12,2	1,9	14,2	—	—	7,3	2,6	—	5,0	5,6	5,4	
1872																	
6. März	Temp.	0,0	—0,8	−3,3	0,6	0,5	1,0	0,0			0,1	—5,4		1,2*	8,6 (?)	1,7	0,5
	A. F.	—	4,0	3,5	4,1		4,1	4,0						4,1	—	5,0	2,4
7^h a.	R. F.	—	93	98	86		80	88						81	—	97	51
	Bew.	0	0	0	0	0	0	0	—	—	0	0	—	1	2	10	8
	R. Temp.	6,2	—0,9	3,3	1,1	0,7	0,7	0,2	—	—	4,4	2,2	—	0,2	7,3(1°,8)	0,7	3,9
	Temp.	1,4	7,3	10,2	9,6	9,3	6,1	13,6		-	2,5	—2,9		10,6	9,8	12,5	2,8
	A. F.	—	5,6	5,3	5,6	5,0	5,6	3,7	—	—	—	-		5,1	—	9,6	2,7
1^h p.	R. F.	—	73	58	63	57	79	32						54	—	90	48
	Bew.	2	1	0	5	7	2	4	—	—	0	10	—	8	7	10	8
	R. Temp.	7,6	7,2	10,2	10,1	9,5	5,8	13,4	—	—	7,0	4,7	—	9,6	8,5	11,5	6,2

NB. Der Stern bei den Zahlen für Luzern im Jahr 1864 bedeutet, dass in diesem Jahre nicht in Luzern selbst, sondern in dem nahen Rathhausen beobachtet wurde; ebenso komparieren in diesem Jahre an Stelle von Gersau Beobachtungen im nahen Stanz. Dagegen stellt der Stern * bei den Bewölkungszahlen Schnee und der schwarze Punkt ● Regen dar.

Die um 8^h a. statt 7^h a. in Bellinzona beobachtete Temp. ist am 6. März 1872 offenbar um mindestens 5° zu hoch, wahrscheinlich infolge Versehens beim Ablesen. Reduktion von 8^h a. auf 7^h a. ungefähr —0°,5; also richtigerer Wert ungefähr 3°,1 und in 500 m: 1°,8.

		Rigi	Zürich	Sursee	Luzern	Schwyz	Gersau	Altorf	Gurtnellen	Göschenen	Andermatt	St. Gotthard	Airolo	Faido	Bellinzona	Lugano	M. Generoso
1872																	
6. März	Temp.	-0°,4	3°,5	2°,0	8,°0	9°,8	9°,7	10°,4	—	—	-1°,1	-5°,7	—	5°,5	6°,4	4°,9	-1°,1
		mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
	A. F.		5,4	4,5	3,6	3,0	3,4	3,6		--	·			6,2		5,9	2,7
9h p.	R. F.	—	92	86	45	33	38	38	—	—	—	—	—	93	—	93	64
	Bew.	4	3	2	5	5	2	6	—	—	0	10	—	10●	10●	10●	10*
	R. Temp.	5°,8	3°,4	2°,0	8°,5	10°,0	9°,4	10°,2	—	—	3°,4	1°,9	—	4°,5	5°,1	3°,9	2°,3
7. März	Temp.	0,0	4,6	2,4	5,4	10,5	11,4	10,8			-0,8	-6,0		2,4	5,4	3,1	-0,1
	A. F.	·	4,5	5,0	4,5	3,3	3,4	3,3		--	—		·	5,3	—	5,5	3,8
7h a.	R. F.	—	71	92	68	35	34	34	—	—	—	—	—	96	—	96	83
	Bew.	10	10	10	10	10	7	10	—	—	10*	10*	—	10●	10●	10●	10*
	R. Temp.	6,2	4,5	2,4	5,9	10,7	11,1	10,6	—	—	3,7	1,6	—	1,4	4,1	2,1	3,3
1885																	
30. Jan.	Temp.	1,5	-6,3	-7,0	-5,0	—	-1,3	-2,1	7,3	2,4	0,5	-6,3	-3,4	-4,8	-4,3*	-1,4	—
	A. F.	1,3	2,8	2,7	3,0	—	3,5	3,8	1,7	—	2,1	—	2,9	2,9	3,1	3,7	—
7h a.	R. F.	25	100	100	96	—	85	96	22	—	45	—	82	90	95	91	—
	Bew.	3	1	2	0	—	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	—
	R. Temp.	6,5	-6,5	-7,0	-5,2	—	-1,6	-2,2	8,3	4,8	4,2	0,0	-0,8	-3,8	-5,2	-2,3	—
	Temp.	3,4	2,3	1,9	2,6	—	4,2	13,9	10,0	2,8	2,1	-2,3	0,0	2,2	2,0	3,8	—
	A. F.	1,7	3,7	3,8	3,6		4,0	2,7	2,3	—	2,9	—	3,9	3,7	4,2	4,3	--
1h p.	R. F.	30	68	74	65	—	65	23	25	—	85	—	85	68	78	72	—
	Bew.	5	4	10	4	—	0	10	0	0	0	0	0	0	4	10	—
	R. Temp.	8,4	2,1	1,9	2,4	—	3,9	13,8	11,0	5,2	5,8	4,0	2,6	3,2	1,1	2,9	—
	Temp.	2,6	-0,9	-2,2	-0,6	—	6,4	11,5	8,6	0,6	0,0	-7,9	-2,0	1,0	2,0	1,6	—
	A. F.	2,5	4,0	3,9	3,8	—	3,3	3,7	4,1	—	2,7	—	3,3	4,2	4,2	4,1	—
9h p.	R. F.	45	94	100	86	—	46	36	50	—	60	—	84	85	79	80	—
	Bew.	9	5	3	5	—	0	2	3	0	2	10	0	10	10●	10	—
	R. Temp.	7,6	-1,1	-2,2	-0,8	—	6,1	11,4	9,6	3,0	3,7	-1,6	0,6	2,0	1,1	0,7	—
31. Jan.	Temp.	1,4	-1,1	-2,6	0,0	—	12,0	10,5	8,2	1,4	0,2	-6,1	-0,4	-0,8	1,8	0,8	—
	A. F.	2,5	4,1	3,6	3,9	—	2,8	3,3	3,0	—	3,0	—	4,1	4,3	5,1	4,6	—
7h a.	R. F.	50	96	96	86		27	35	37	—	65	—	92	100	96	94	—
	Bew.	9	9	9	6	—	0	2	3	0	10	10	10	10	10*●	10*	—
	R. Temp.	6,4	-1,3	-2,6	-0,2	—	11,7	10,4	9,2	3,8	3,9	0,2	2,2	0,2	0,9	-0,1	—
1892	Temp.	5,2	1,2	0,6	2,6	2,0	5,2	4,0	12,0	6,6	2,8	—	4,7	5,0	7,5	7,4	1,6
6. März	A. F.	3,4	5,0	4,2	5,5	5,3	6,2	5,8	4,6	—		—		6,5	7,0	7,1	4,1
7h a.	R. F.	52	100	88	100	100	94	95	44	—	—	—	—	100	90	93	81
	Bew.	2	10	10	10	5	10	5	5	0	1	—	10	10	8●	8	10
	R. Temp.	11,4	1,2	0,6	2,4	2,2	4,9	3,9	13,2	9,5	7,3	—	7,8	6,2	6,2	6,4	6,9

NB. Der Stern in der Rubrik Bellinzona im Jahr 1885 bedeutet, dass in diesem Jahr an Stelle der fehlenden Beobachtungen in Bellinzona solche vom nahen San Vittore gesetzt wurden.

		Rigi	Zürich	Sursee	Luzern	Schwyz	Gersau	Altorf	Gurtnellen	Göschenen	Andermatt	St. Gotthard	Airolo	Faido	Bellinzona	Lugano	M. Generoso
1892																	
6. März	Temp.	5°,8	11°,6	12°,7	8°,9	11°,0	9°,6	17°,1	14°,2	9°,9	5°,8	—	7°,8	8°,1	9°,5	10°,8	3°,8
		mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
	A. F.	4,5	6,2	7,4	7,1	7,8	7,2	5,9	4,7	—	—	—	—	8,1	7,5	7,7	4,5
1h p.	R. F.	66	61	68	84	80	81	40	39	—	—	—	—	100	84	81	76
	Bew.	1	2	1	0	1	0	1	2	0	0	—	10	6	10	9	10
	R. Temp.	12°,0	11°,6	12°,7	8°,7	11°,2	9°,3	17°,0	15°,4	12°,8	10°,3		10°,9	9°,3	8°,2	9°,8	9°,1
	Temp.	5,5	5,4	3,6	4,8	13,2	9,0	14,9	13,4	8,8	5,1	—	5,6	5,0	9,0	8,6	3,4
	A. F.	-	6,4	5,9	6,3	5,0	7,2	4,7	5,0					6,5	7,6	7,9	5,2
9h p.	R. F.	—	96	99	98	44	84	37	44	—	—	—	—	100	89	95	88
	Bew.	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	—	10	0	10	10	10
	R. Temp.	11,7	5,4	3,6	4,6	13,4	8,7	14,8	14,6	11,7	9,6	—	8,7	6,2	7,7	7,6	8,7
7. März	Temp.	6,7	2,4	0,8	1,8	13,6	8,2	15,7	14,2	9,0	5,1	—	5,4	6,2	8,2	8,6	3,4
	A. F.	3,5	5,5	4,7	5,1	9,2	6,8	5,4	5,8	—	—	—	—	7,1	7,7	7,9	5,6
7h a.	R. F.	48	100	96	98	80	83	40	48	—	—	—	—	100	94	95	97
	Bew.	3	2	1	0	0	0	0	2	0	0	—	10	10	10	10	10
	R. Temp.	12,9	2,4	0,8	1,6	13,8	7,9	15,6	15,4	11,9	9,6	—	8,5	7,4	6,9	7,6	8,7

Aus diesen Tabellen erhellt zunächst, dass, höchstens mit Ausnahme der Orte im Reussthale oberhalb Altorf, der Gotthard, der Monte Generoso einerseits und der Rigi-Kulm anderseits am ersten Beobachtungstermin je des ersten Tages höhere Temperaturen als die übrigen Stationen nach Reduktion derselben auf gleiches Niveau aufweisen und unter diesen drei Höhenstationen der Rigi-Kulm weitaus die höchsten. Hieraus folgt, dass Rigi und Gotthard schon vor Beginn des Föhns von warmen, aus der Höhe kommenden Winden getroffen werden, welche ihre Temperatur über das ihnen zukommende normale Mass erhöhen, und, wie die spätern Beobachtungen auf Rigi-Kulm und Pilatus zeigen, auch relativ trocken sind. In der That sind auf beiden Stationen durchweg Südwinde zu dieser Zeit notiert. Aus der höhern Temperatur der obern Schichten folgt aber auch das geringere spezifische Gewicht derselben; sie können also nicht bloss unter dem Einfluss der Schwere ins Thal hinuntersinken. Der Umstand, dass ferner bei diesem Termin die reduzierten Temperaturen von Lugano resp. Bellinzona bis zum Gotthard hinaufsteigen und die absoluten sowohl wie relativen Feuchtigkeiten abnehmen, weist sodann darauf hin, dass eine südliche warme Strömung bereits auch an den obern Partieen der südlichen Bergabhänge sich fühlbar macht. Jedenfalls haben wir also in den südlichen Thälern noch keine aufsteigende Bewegung der Luft. Eigentümlich sind im März 1872 und Oktober 1892, am ersten Tag auf dem Monte Generoso die nordöstlichen und nordwestlichen, ebenfalls warmen Winde und der nordwestliche Wolkenzug dort und über Lugano, während da in der Tiefe ein schwacher Südost

weht, der sich erst später auch auf dem Monte Generoso einstellt. Sollten dies bereits Ausläufer der im Depressionscentrum über den britischen Inseln aufgestiegenen und von da in den Höhen der Atmosphäre nach Clement Ley und H. Hildebrandsson zum Druckmaximum im südöstlichen Europa zurückkehrenden Luft sein?

Vom Gotthard nach Norden hin erscheinen die Temperaturen in allen Jahren, wo der Gotthard kompariert, jedenfalls mindestens für Andermatt, in den beiden letzten Jahren auch bis Gurtnellen herunter, um Beträge erhöht, welche die normale Temperaturzunahme nach der Tiefe hin um mehr als das Doppelte übertreffen, also bereits auf als Föhn herabstürzende Luft schliessen lassen, was auch die relativen Feuchtigkeiten und die Winde bestätigen.

Gemäss der Formel für adiabatische Kompression trockener Luft:

$$t - t' = (t' + 273)\left[\left(\frac{p}{p'}\right)^{0,291} - 1\right]$$

wo t die Temperatur in Celsiusgraden beim Druck p, und t' diejenige beim Druck p' repräsentiert, ergeben sich nämlich für die Temperaturzunahmen vom Gotthard nach Andermatt, nach Gurtnellen und nach Altorf herunterstürzender Luft, gemäss den Barometerständen in Altorf: 716 mm, in Gurtnellen: 695 mm, in Andermatt: 640 mm und auf dem Gotthard: 590 mm und der Temperatur $t' = -5^0$ des letztern:

Andermatt—Gotthard:		6°,4
Gurtnellen—	„	13,1
Altorf—	„	15,5

Nach den vorstehenden Tabellen sind aber die faktischen Temperatur-Differenzen gewesen:

			Andermatt —Gotthard	Gurtnellen —Gotthard	Altorf —Gotthard
1864	7. März	7h a.	6°.2	—	7°.3
	„	1h p.	7,2	—	18,7
	„	9h p.	5,8	—	17,0
	8. März	7h a.	7,8	—	19,4
1872	6. März	7h a.	5,3	—	5,4
	„	1h p.	5,4	—	16,5
	„	9h p.	4,6	—	16,1
	7. März	7h a.	5,2	—	16,8
1885	30. Jan.	7h a.	6,8	13°,6	4,2
	„	1h p.	4,4	12,3	16,2
	„	9h p.	7,9	16,5	19,4
	31. Jan.	7h a.	6,3	14,3	16,6

Hieraus ist ersichtlich, dass um 7^h a. des 7. März 1864 die Luft vom Gotthard bereits bis Andermatt, dagegen noch nicht nach Altorf herabgeströmt ist, dass letzteres aber bei den folgenden Terminen auch bereits geschehen war. Um 7^h a. des 7. März 1872 war ebenso der Luftstrom vom Gotthard bis Andermatt, aber noch nicht bis Altorf gelangt, während letzteres auch wieder bis zum folgenden Termin 1^h p. erfolgt war. Am 30. Januar 1885 endlich ist der Luftstrom um 7^h a. vom Gotthard bereits bis Gurtnellen, aber noch nicht bis Altorf heruntergekommen, das von ihm erst später, d. h. jedenfalls schon um 1^h p. erreicht wurde.

So lange als die vorstehenden faktischen Temperaturdifferenzen infolge lokaler Ursachen nicht die obigen theoretischen Werte überschreiten, wird durch die Schwere das Gleichgewicht der Luft nicht gestört werden, d. h. nur der vertikale Wirbel die Luft aus der Höhe herunterführen. Im Allgemeinen ist dies, wie wir sehen, schon beim zweiten Beobachtungstermin d. h. um 1^h p. nicht mehr der Fall, und es wird daher von da an bereits die Luft aus der Höhe längs der Erdoberfläche ins Thal herunterströmen, d. h. also ohne Wirbel das weitere Abfliessen erfolgen, wie wir es S. 80 bereits angedeutet haben.

Von Altorf an nach aussen zu bis Zürich und Sursee sind beim ersten Termin die reduzierten Temperaturen wieder niedriger, ja durchweg niedriger als die Temperaturen in der Tiefe auf der Südseite, und die relativen Feuchtigkeiten nehmen nach aussen hin allgemein zu. Weder die Winde und die Druckverhältnisse nach Tafel I, noch die Temperaturverteilung lassen also zu Beginn des Föhns auf ein Abströmen der Luft von Altorf nach aussen hin schliessen. Leider fehlen für den Gotthard wie auch für alle andern Alpenpässe und meistens auch für Andermatt Feuchtigkeitsbeobachtungen, so dass wir nur aus der Bewölkung gewisse Anhaltspunkte über die Verteilung dieses Elementes gewinnen können.

Das Verhalten der Bewölkung ist zu dieser Zeit, d. h. vor dem Eintritt des Föhns, je nach dem vorausgegangenen Wetter und der grössern oder geringern Imminenz des Föhns ein verschiedenes. Im März 1864 haben wir zu Anfang hell im Süden, mit und vom Gotthard an nach Norden hin durchweg halb bewölkten Himmel; im März 1872 ist es umgekehrt im Norden bis zum Gotthard hell und von jenseits desselben an bedeckt sich der Himmel nach Süden hin; am 30. Januar 7^h a. 1885 ist es auf unserer Linie überall hell und nur in Lugano der Himmel halb bewölkt, während zum gleichen Termin am 6. März 1892 der Himmel überall fast ganz bedeckt erscheint, ausser vom Gotthard bis nach Altorf und Schwyz hin; da aber der Rigi hellen Himmel hat, so ist die Bedeckung im Norden der Alpen wohl mehr Nebel in der Tiefe beizumessen.

Schon bis zum nächstfolgenden Beobachtungstermin um 1^h p. und in gesteigertem Masse bis zu den weiteren Terminen ändern sich nun diese Verhältnisse mit der Entwicklung des Föhns in ganz prägnanter Weise. Der Gotthard hat von da an im März 1864 und 1872 durchweg auf gleiches Niveau reduziert niedrigere Temperaturen als

alle Stationen im Süden und Norden von ihm und am 30. Januar 1885 wenigstens vom Termin 9^h p. an. Die Bewölkung und Feuchtigkeit nimmt südlich von ihm immer mehr zu bis zu vollständiger Bedeckung und letztere durchweg von 9^h p. an auch bis zu eintretenden Niederschlägen zu. Auf dem Gotthard selbst ist der Himmel ausser um 1^h p. des 30. Januar ganz bedeckt; diese Bedeckung geht um 7^h a. des 8. März 1864, des 7. März 1872 und des 31. Januar 1885 bereits auch bis Andermatt herunter, ja es treten bei diesen Terminen sogar teilweise Niederschläge daselbst auf. Das alles beweist, dass sich auf der Südseite des Gebirges mit der Entwicklung des Föhns auf der Nordseite ein aufsteigender Luftstrom zu manifestieren beginnt, der sich auch in der zunehmenden südlichen bis westlichen Windrichtung an den dortigen Stationen dokumentiert und der im Verfolg bis über den Gotthard hinaus sich fortsetzt und so, vielleicht in Berührung mit dem Südwest in der Höhe, auch jenseits durch seine Aufwärtsbewegung Bewölkung und Niederschläge zur Folge hat. Auf der Nordseite erfahren vom Gotthard aus innerhalb des Reussthales und am Vierwaldstättersee meistens bis gegen Luzern hin die Temperaturen durch den sich entwickelnden Föhn eine ungewöhnliche Erhöhung, so dass sie die auf der Südseite des Gebirges weit übertreffen.

So steht z. B. am 7. März 1864 um 1^h p. einer reduzierten Temperatur von $16^0,3$ in Altorf eine solche von $6^0,2$ in Lugano gegenüber, am 7. März 1872 um 7^h a. die Temperatur $11^0,1$ in Gersau gegenüber $2^0,1$ in Lugano, am 30. Januar 1885 um 1^h p. $13^0,8$ in Altorf $1^0,1$ in Bellinzona oder von unreduzierten Temperaturen am gleichen Datum und Termin $2^0,8$ in Göschenen $0^0,0$ in dem nahe gleich hohen Airolo und $10^0,0$ in Gurtnellen $2^0,2$ in dem nahe gleich hohen Faido der Südseite, endlich am 6. März 1892 um 1^h p. $17^0,0$ in Altorf neben $8^0,2$ in Bellinzona, $12^0,8$ in Göschenen neben $10^0,8$ in Airolo, $15^0,4$ in Gurtnellen neben $9^0,3$ in Faido. Im Sommer sind diese Differenzen im allgemeinen geringer, so haben wir z. B. am 19. August 1892 7^h a. von reduzierten Temperaturen: Altorf $25^0,4$ — Bellinzona $19^0,4$ und unreduziert Gurtnellen $24^0,0$ — Faido $21^0,0$, Göschenen $19^0,9$ — Airolo $18^0,3$. Verhältnismässig den grössten Unterschied zeigen aber jenseits und diesseits des Gotthard die relativen Feuchtigkeiten, dort fast Sättigungszustand, hier bis nach Altorf herunter bloss 23 % der Sättigung mit Wasserdampf, ja einmal auch noch in Gersau nur 27 %. Auch die absoluten Feuchtigkeiten sind im Thal diesseits des Gebirges erheblich (2 mm und mehr) kleiner als jenseits, was auf Verluste der Luft an Wasserdampf durch Kondensationen beim Uebergang hinweist. Beim Austritt aus den Thälern der Nordseite in den ebenern Teil der Schweiz erscheint die Luft durchweg wieder feuchter und nur ausnahmsweise pflanzen sich Ausläufer des Föhns als warme südöstliche Winde bis Zürich und Aarau fort (7. März 1872, 1^h p.) und erniedrigen dort die Feuchtigkeit auf 26—27 %.

Es ist bemerkenswert, dass gerade an diesen beiden Orten, wo eigentliche Südwest- und Westwinde häufig auftreten, der Föhn sich stets als Südost bis Süd manifestiert, also diese Richtung nicht extra durch die Thalrichtung bedingt wird, sondern offenbar jener die Alpen überwehenden südöstlichen Strömung als Fortsetzung entspricht.

Während endlich auf der Südseite des Gebirges die Bewölkung mit Eintritt des Föhns auf der Nordseite rasch bis zu völliger Bedeckung zunimmt, heitert der Himmel diesseits etwas auf, wenn er vorher bewölkt war und wenn er ganz hell war, tritt allmählich, besonders weiter aussen im Flachland der Schweiz, Bewölkung desselben auf, die meistens gegen Ende des Föhns auch da in vollständige Bedeckung desselben mit beginnenden Niederschlägen übergeht. Es hält also dort noch einige Zeit in der Höhe die warme, trockene, südliche Luftströmung an, wie ja auch die Beobachtungen auf dem Rigi es zeigen, bis dann zum Schluss des Föhns westliche, feuchte Winde überhand nehmen und auch in der Tiefe sich geltend machen.

Dies alles zeigt, dass wir es zur Zeit des Föhns in der Schweiz offenbar mit zweierlei, zum Teil sich auch wohl vermischenden Luftströmungen zu thun haben, nämlich einer die Alpen von Süden überwehenden, zunächst nicht aus der Tiefe jenseits, sondern aus der Höhe herabkommenden mehr südöstlichen als südlichen Strömung, welche auf der Nordseite in den Thälern vertikale Wirbel erzeugt und infolge dessen als Föhn in dieselben herunterstürzt und damit ungewöhnlich hohe Temperaturen und geringe relative Feuchtigkeiten daselbst bewirkt, ja unter dem Einfluss lokaler Depressionen noch weiter herabsinkend auch bis ins Flachland der Schweiz hinaus sich unter entsprechenden Symptomen ergiessen kann, und sodann eine zuerst nur in der Höhe der Atmosphäre über den nordwestlichen Teil der Schweiz, ja auch über dem Hochgebirge hinfliessende südwestliche Strömung, die zunächst auch als sinkend warm und trocken ist und sich z. B. auf dem Pilatus und Säntis bemerkbar macht. Indem letztere mit dem Fortschreiten des Depressionscentrums nach Norden und Osten immer mehr westlich bis nordwestlich wird und vom Ozean her feuchte Luft aus der Tiefe mitbringt, während anderseits durch Erhöhung des Drucks im Nordwesten der Alpen und Erniedrigung desselben im Südosten die ersteren südöstlichen Winde und damit auch der eigentliche Föhn ersterben, tritt dann in der Schweiz der Umschwung zu trüber Witterung durch jene westlichen Winde ein.

Was endlich die lokalen Druckdepressionen betrifft, welche sich nach unsern synoptischen Karten zur Zeit des Föhns durchweg am Nordfuss der Alpen zeigen, so bin ich mit den bezüglichen Auseinandersetzungen des Herrn Billwiller in seinem einleitend zitierten Aufsatze: „Ueber verschiedene Entstehungsarten und Erscheinungsformen des Föhns“ sowie in seinem neuesten Artikel: „Bildung barometrischer Teilminima durch Föhne“[1]) insofern einverstanden, als ich den Föhn auch nicht als durch diese lokalen Teilminima bewirkt betrachte, dagegen kann ich meinerseits ebensowenig den eigentlichen Föhn als Ursache jener Teilminima anerkennen, wie dies Herr Billwiller meint. Wir haben nämlich gesehen, dass sie nicht bloss während und nach dem Föhn, sondern auch einige Zeit vor demselben auftreten, also jedenfalls nicht allgemein durch ihn hervorgerufen sein können. Allerdings sind wohl hievon die in Satz 6

---

[1]) Meteorologische Zeitschrift. 1899. S. 1. Januar.

erwähnten kleineren Minima in den Thälern selbst auszunehmen, welche wir nach unserer Theorie als vom beginnenden Föhn erzeugt zu betrachten haben.

Entscheidend für die Frage, ob die grösseren lokalen Teilminima am Nordabhang der Alpen durch den Föhn erzeugt seien oder nicht, dürfte der Nachweis sein, dass sie eventuell auch bei einem Südweststurm auftreten, welcher durchaus von keinem eigentlichen Föhn in den Thälern begleitet ist. Ein derartiger Südweststurm in der Schweiz trat z. B. am 8. und 9. Dezember 1897 ein und ich habe demgemäss nachträglich auch diesen Sturm noch untersucht, um obige Frage zu entscheiden.

Sturm vom 8. und 9. Dezember 1897.

Nach den Wetterbulletins der Schweizerischen meteorologischen Centralanstalt in Zürich entwickelte sich bei hohem Druck im nordöstlichen und mittleren Europa und verhältnismässig niedrigem über dem Mittelmeer am 6. Dezember vom Ocean her eine Depression im Nordwesten der britischen Inseln, welche sich am 7. Dezember vertiefte und nach Westen zu verbreiterte. Der hohe Druck hatte sich im Osten nach Süden hin ausgedehnt und im mittleren Frankreich und der Schweiz zu einem lokalen Maximum konzentriert, von welchem aus über Italien gegen das schwache Minimum im Mittelmeer hin nördliche aufheiternde Winde wehten. Bis zum Vormittag des 8. Dezember hatte sich diese Situation dadurch stark verändert, dass sich die Depression im Norden sehr beträchtlich, nämlich bis zu 735 mm Druck im Centrum über der Nordsee, vertieft und infolge dessen über Mitteleuropa der Druck überall abgenommen hatte unter Entwicklung stürmischer Südwestwinde in Frankreich und dem mittleren Deutschland. Da hoher Druck im Osten und Südosten fortdauert, so wäre diese Druckverteilung der Erzeugung eines Föhns in der Schweiz günstig, wenn nicht als Rest des erwähnten schwachen Minimums im Mittelmeer ein lokales Minimum im Ligurischen Meer übrig geblieben wäre, so dass z. B. an der Mittelmeerküste Frankreichs nicht südliche, sondern nordwestliche Winde gegen dieses Minimum hin wehen.

In Folge dieser besonderen Druckverteilung zeigt denn auch unsere, in analoger Weise wie bei den Föhnstürmen entworfene synoptische Karte von 7^h a. des 8. Dezember mit Isobaren im Niveau von 500 m zwar niedrigen Druck bis nahe 717 mm im Nordwesten und höhern Druck bis 721 mm im Südwesten, aber auch solchen bis 720 mm im Nordosten, dazwischen sodann einen recht unregelmässigen Verlauf der Isobaren und eine Reihe schwacher lokaler Druckminima. Nirgends beträgt die Druckdifferenz erheblich mehr als 4 mm; am grössten und entschiedensten ist sie zwischen Reckingen 722,1 mm und Airolo 721,7 mm einerseits und dem lokalen Minimum bei Chur 717,3 mm anderseits, worauf wohl der starke Südwest in Platta zurückzuführen ist. Dieser Wind hat auch dort insofern Föhncharakter, als er da die höchste Temperatur der ganzen Schweiz im Niveau von 500 m, nämlich 6°,9, bewirkte und die relative Feuchtigkeit auf den geringen Betrag von 43% reduzierte. In allen übrigen

Thälern im Föhngebiet und ebenso auch durchweg in der ganzen nördlichen Schweiz, sowie besonders im Süden der Alpen sind die Winde nur schwach bei vorherrschend westlicher Richtung; nur in Schaffhausen, Porrentruy und Lausanne und sodann auf den Höhenstationen des Chaumont, Pilatus, Rigi und Säntis treffen wir stürmische nordwestliche bis südwestliche Winde, in Lausanne sogar stürmischen Süd. Föhn ist nirgends notiert.

Unsere Isobarenkarte von 1^h p. des 8. Dezember weist eine etwas regelmässigere Druckverteilung auf, indem der nahezu bis 712 mm erniedrigte Druck im Nordwesten ziemlich gleichförmig, mit alleiniger Ausnahme des Ostens der Schweiz, gegen Süden hin bis 717 mm zunimmt. Nach dem Vergleich mit den umliegenden Stationen ist es sehr wahrscheinlich, dass bei der Ablesung des Barometers in Reckingen bei diesem Termin ein Fehler von 5 mm stattgefunden hat und der auf 500 m reduzierte Stand daher 719,5 mm statt 714,5 mm sein sollte. Alsdann ergäbe sich noch eine Isobare von 719 mm von Leuk durch's Oberwallis bis gegen Airolo hin. Lokale Minima treffen wir um den Vierwaldstättersee und im untern Rhonethal. — Der stürmische Wind in Platta mit gleich hoher Temperatur und niedriger Feuchtigkeit wie am Vormittag hält zwar noch an, wenn aber die Station Chur bei schwachem Südwest, einer reduzierten Temperatur von 2°,3 und einer relativen Feuchtigkeit von 86 % und ganz bedecktem Himmel Föhn meldet, so beruht dies offenbar auf einem Missverständnis, da in Reichenau, Seewis, Ragaz, Sargans, Wildhaus und Altstätten weder Wind, noch Temperatur und Feuchtigkeit irgendwie auf Föhn schliessen lassen. Eine zweite Föhnmeldung für diesen Termin liegt von Weggis vor, wo allerdings ein kräftiger Südost weht, allein weder die Temperatur 2°,6 noch die in Gersau einerseits und Luzern anderseits beobachteten Feuchtigkeiten 89 und 85 % bei Regen in Luzern und Schneefall auf dem Pilatus gestatten, ihm die Bezeichnung Föhn beizulegen. (Ich bemerke hier, dass die Barometerstände von Vitznau offenbar um mindestens 1 mm zu niedrig sind.) Endlich hat für diesen und den Abendtermin auch Guttannen Föhn notiert, wo bei frischem Südost die reduzierten Temperaturen 6°,2 und 5°,6 und die Feuchtigkeiten 63 und 65 % betragen. Auch in Göschenen haben wir zu diesen beiden Terminen erhöhte Temperatur, nämlich 5°,5 bei frischem Südwind, aber die relativen Feuchtigkeiten 100 und 75 %; ausserdem zeigen um 1^h p. in dieser Gegend reduzierte Temperaturen über 5° noch Platta 6°,9, Splügen (Dorf) 6°,3, Andermatt 5°,3, Airolo 5°,0 und in Verbindung damit nach Süden hin Braggio 5°,2, Locarno 5°,4 und Rivera Bironico 5°,0. Unter den letztern Stationen weht nur in Splügen kräftiger Südwest, sonst überall nur schwache Süd- oder Westwinde. Nach alledem ist auch in Guttannen nicht an einen eigentlichen Föhn zu denken, und dies um so weniger, als es zugleich im nahen Meiringen und auf dem Brünig regnet und schneit, und überhaupt auf fast allen Stationen der nördlichen Schweiz Regen notiert ist. Dort komparieren auch vom Jura nach Norden hin wieder Temperaturen über 5° (bis 9°,5 im Maximum), während sie von da nach den Alpen zu abnehmen und im eigentlichen Föhngebiet sowie auf den Höhestationen

am niedrigsten sind. Also so ziemlich das umgekehrte Bild eines eigentlichen Föhns, was auch die beigegebenen Karten der Verteilung der Temperatur und relativen Feuchtigkeit für 1ʰ p. dieses Tages unmittelbar erkennen lassen.

Bis um 9ʰ p. des 8. Dezember tritt wieder ein allgemeines Sinken des Barometers um ungefähr 4 mm ein. Ein lokales Druckminimum breitet sich jetzt vom Vierwaldstättersee über das Glarnerland und den Wallensee bis zum Bodensee hin aus und die von West nach Ost verlaufenden Isobaren drängen sich am Gotthard so zusammen, dass die Druckdifferenz von Airolo bis nach Altorf fast 6 mm beträgt, also insofern die Bedingung zum Entstehen des Föhns nahezu erfüllt wäre. Wie schon erwähnt, haben wir in der That stürmischen Südwest in Platta, stürmischen Süd in Göschenen bei südwestlichem Wolkenzug und kräftigem Südost in Guttannen; auf diese höhern Alpenthäler beschränken sich aber die kräftigen bis stürmischen Winde, in allen übrigen zeigen sich nur schwache Winde. Die Temperaturen (auf 500 m reduziert), die Feuchtigkeiten und Bewölkung nebst eventuellen Niederschlägen sind um 9ʰ p. an obigen Orten und tiefer im gleichen Thal gelegenen:

Platta	4°,9	59%	9	
Göschenen	5,5	78	10	
Guttannen	5,6	65	7	
Chur	4,0	81	10	
Gurtnellen	7,8	70	10	Regen
Altorf	4,7	91	10	„
Meyringen	1,6	100	9	„

In Gurtnellen weht frischer Nord bei westlichem Wolkenzug, in Chur und in Altorf schwacher Südwest und in Meyringen schwacher Nordost. Nach alledem kann auch jetzt von einem eigentlichen Föhn an obigen drei Orten nicht gesprochen werden.

Im Jura und zwischen Alpen und Jura haben sich die südwestlichen Winde fast überall verstärkt, es stürmt auf Pilatus, Rigi und Säntis von Südwest bis West wie um 1ʰ p. Fast von allen Stationen wird Regen oder Schnee gemeldet.

Nach dem Wetterbulletin der Centralanstalt von 8ʰ a. des 9. Dezember hat sich seit dem Vortage die Depression im Norden mit geringer Verschiebung des Sturmcentrums nach Westen noch um 10 mm vertieft und damit ist auch im mittleren Europa bis nach Italien herunter das Barometer überall stark gesunken und haben sich die Winde um die Schweiz nach West gedreht und verstärkt. In Oberitalien zeigt die Isobare von 755 mm eine starke Ausbuchtung nach Westen hin mit Tendenz zu einer lokalen Minimumsbildung, so dass an der Riviera stürmische Nordwest- bis Westwinde wehen.

Diese Verhältnisse spiegeln sich denn auch in der Druckverteilung innerhalb der Schweiz gemäss unserer, hier nicht mehr reproduzierten synoptischen Karte von 7ʰ a.

des 9. Dezember ab. Wir haben da niedrigen Druck von ungefähr gleichem Betrag wie am Vorabend im Nordwesten und ein lokales Minimum ebenfalls von 708 mm im Tessin, das sich dort seit dem Vorabend durch eine Druckverminderung von 5 mm entwickelt hat. Eine Zone höhern Drucks von 711 mm ragt vom Genfer See über das Berner Oberland und Ober-Wallis bis nach Airolo von Westen herein und im Nordosten besteht eine solche von 710 mm. Ausser auf den Höhen-Stationen, im Oberwallis und Engadin treffen wir stärkere Südwestwinde nur noch vereinzelt in Lausanne, Neuchâtel, Porrentruy, Basel, Schaffhausen, Affoltern und Sarnen. Feuchtigkeitsgrade unter 60 % weisen nur Einsiedeln, Luzern und Gersau bei Temperaturen von durchschnittlich 5° auf. Niederschläge finden sich an der Mehrzahl der Stationen notiert.

Die Situation des Morgens accentuiert sich bis um 1^h p. des 9. Dezember. Das Minimum des Drucks im Tessin hat sich durch Abnahme des Druckes daselbst um 2 mm bis 706 mm vertieft. Am Vierwaldstättersee und im Nordwesten bemerken wir lokale Druckminima von 708 mm, während in der von Südwesten vom Genfersee bis Airolo hereinragenden Zunge höhern Drucks der letztere nur bis 710 mm sich verringert hat. Im Thal zwischen Jura und Alpen haben sich die Südwestwinde wieder verstärkt und dagegen auf den Höhenstationen etwas abgenommen und in den Alpenthälern finden wir nur in Sarnen, Wildhaus und Brieg noch starke Südwestwinde. Da die Luft von den Alpen jetzt nach dem südlichen Minimum strömt, so haben wir im Süden überall Temperaturen von über 5°, im Tessin sogar bis 8° und entsprechend geringere Feuchtigkeitsgrade bis 50 %. Höhere Temperaturen als 5° und geringe Feuchtigkeiten zeigen sich nur noch bei Thun, am Vierwaldstättersee und im Rheinthal bei Chur. Während aber im Tessin der Himmel sich aufgeheitert hat, ist er an den letztern Orten wie überhaupt durchweg in der Schweiz nördlich von der Alpenkette bedeckt und es regnet oder schneit überall bei bis unter 2° hinuntergehenden Temperaturen (Nordföhn-Erscheinung).

Es erscheint überflüssig, das Ende dieses Sturmes in der Schweiz, welches übrigens bereits gegen Abend fast überall eintritt, weiter zu verfolgen. Wir haben gesehen, dass bei diesem, in der Schweiz aufgetretenen Südweststurm ebenfalls lokale Druckminima am Nordfuss der Alpen vorkommen, obschon dabei kein eigentlicher Föhn sich entwickelt hat und jedenfalls nur in dem obersten Teil der Alpenthäler um den Gotthard schwache Föhnerscheinungen sich manifestiert haben. Es können also diese Minima nicht vom Föhn bewirkt sein und wir müssen uns daher nach einer andern allgemeinern Erklärung für dieselben umsehen. Dies scheint nicht schwierig zu sein. Bei allen untersuchten Föhnstürmen und so auch bei dem letztern Sturm ohne Föhn begegnen wir gemäss der cyclonalen Bewegung der Luft um das Depressionscentrum über den Britischen Inseln in der Schweiz nördlich von der Alpenkette und in den obern Schichten der Atmosphäre selbst über dieser einer mehr oder minder starken und tiefer oder weniger tief hinabreichenden südwestlichen Strömung, welche notwendig durch die einseitige Reibung an den ins Flachland der Schweiz hinausragenden Vorsprüngen der Alpenkette horizontale Wirbel und damit die Druckminima erzeugen muss.

Aber auch für die Theorie der Föhnbildung ist der Vergleich des Verhaltens des letztuntersuchten Sturmes mit dem der Föhnstürme lehrreich. In beiden Fällen haben wir nördlich der Alpen bis zum Depressionscentrum bei den Britischen Inseln eine ganz analoge Druckverteilung, welche in der nördlichen Schweiz mehr oder minder starke Südwestwinde mit entsprechender Druckerniedrigung bis zum Hochgebirge zur Folge hat, ja beim Sturm im Dezember 1897 tritt sogar der Südwest da viel stärker und allgemeiner auf als bei den Föhnstürmen, es müsste also das Abfliessen der Luft aus den nördlichen Alpenthälern auch da stattfinden und somit ebenfalls ein Föhn entstehen, wenn dies die entscheidende Ursache der Föhnbildung darstellte. In Wirklichkeit kam es aber in diesem Falle nicht zur Föhnbildung, obschon in vielen Alpenthälern ein solches Abfliessen stattfand und sogar, wie wir gezeigt haben, am 8. Dezember 9^h p. der Druckgradient über den Gotthard die sonst zur Föhnbildung nötige Grösse erreicht hatte. Es muss also zum Südweststurm über der Schweiz in Gemässheit jener cyclonalen Bewegung der Luft um das Depressionscentrum im Nordwesten Europas noch etwas Weiteres hinzukommen, um einen Föhn zu erzeugen. Das ist aber, wie wir schon S. 87 gezeigt und ausführlich erörtert haben, eine die Alpen von Süden überwehende südliche bis südöstliche Luftströmung, welche unterhalb jener Südwestströmung sich geltend macht, und sich auch wohl mit ihr zusammensetzt.

Es bleibt jetzt bloss noch zu erklären, wie eine solche Strömung neben jener Hauptzirkulation der Luft um das Depressionscentrum zu Stande kommt.

Zu dem Ende ist es notwendig, auf die topographischen Verhältnisse um die Schweiz einen Blick zu werfen. Wenn wir die Konfiguration der Alpenländer, wie sie z. B. in der Karte der Alpenländer aus Sydow-Wagners methodischem Schulatlas oder noch besser in der oro-hydrographischen Ausgabe von J. Randeggers grosser Karte des Alpenlandes dargestellt ist, betrachten, so ist sofort klar, dass die Westalpen (Meeralpen, Cottische und Grajische Alpen) vom Mittelmeer bis nach Chambery herauf einen ungefähr 3000 m hohen Wall und weiter bis gegen Basel hin der französische Jura einen solchen von 1000 bis 1500 m Höhe bilden, dass sodann die an die erstern sich anschliessenden Schweizer- und Oesterreichischen Alpen jenen süd-nördlichen Wall nach Osten zu stellenweise sogar bis zu 4000 m Höhe fortsetzen und so die ganze Lombardische Ebene bis Triest hin im Norden abgrenzen, während sie im Süden durch den durchschnittlich 1500 m hohen, an die Westalpen sich anschliessenden Apennin vom Ligurischen Meer und Mittel-Italien getrennt ist und nur zum Adriatischen Meer hin offen bleibt.

Diese Wälle verhindern nun offenbar, dass die Luft in der Lombardischen Ebene bis zu etwa 3000 m Höhe und die im breiten Thale der Schweiz zwischen Alpen und Jura bis zu ungefähr 1000 m Höhe sich bei den fraglichen Stürmen unmittelbar an der cyclonalen Bewegung um und gegen das Depressionscentrum im Norden beteilige. Indem also die Luft in der Tiefe da nicht wie in Frankreich und Deutschland durch wärmere und feuchtere Luft ersetzt und durch Abströmen verdünnt wird, bleibt der Druck über

diesen Gegenden höher als westlich und nördlich von ihnen. In der That haben wir in unsern synoptischen Karten durchweg von jenseits des Jura zur innern Schweiz eine Druckstufe konstatieren können, auf welche dann eine zweite viel höhere am Hochgebirge der Alpen folgte. Bei allen untersuchten Föhnstürmen finden wir auf den synoptischen Karten der Wetterbulletins Isobaren, welche längs der Alpenkette von Oesterreich bis zum Mittelmeer, ja häufig auch unter Umbiegung daselbst längs der ligurischen Küste und Oberitalien bis zum adriatischen Meer hin verlaufen und so das Gebiet höhern Druckes über der Lombardischen Ebene und weiterhin im Südosten Europas von dem niedrigen Drucks westlich und nördlich von den Alpen abgrenzen. Da haben wir denn auch in der Tiefe nur schwache Winde oder Windstille, während die von Westen herströmende Luft in der Provence nach Nord abgelenkt wird und gemäss der besondern Druckverteilung an den Südküsten Frankreichs südöstliche bis östliche Winde auftreten. Die höhern Schichten der Atmosphäre, etwa von 4000 m an aufwärts, können sich dagegen ungehindert auch über den Alpen und südlich von ihnen an der cyclonalen, in dieser Gegend südwestlichen Strömung beteiligen, wie dies zur Föhnzeit konstatiert ist. Indem sie aber dabei auch tiefere Luftschichten in diese Bewegung hineinziehen, kommen für diese gemäss der erwähnten besonderen Druckverteilung von Südost nach Nordwest und sogar von Ost nach West gerichtete Druckkomponenten hinzu und so bilden sich in den tieferen Luftschichten nächst den Kämmen des Hochgebirges südöstliche bis südliche, die Alpen überwehende Winde aus, und, indem auch diese allmählich die tieferen Luftschichten in der Lombardischen Ebene mit fortreissen, führen sie den Alpen von Süden her aus dem Adriatischen Meere stammende feuchte Luft zu, welche dann bei ihrem Emporsteigen am Gebirge die Niederschläge auf der Südseite der Alpen bewirkt.

Diese topographischen und davon abhangenden besondern Druckverhältnisse machen es aber auch unmittelbar verständlich, warum gerade in den nördlichen Alpenthälern der Centralschweiz der Föhn besonders häufig auftritt. Bei den italienischen Seen um das Tessin weist die Lombardische Ebene eine starke Ausbuchtung nach Norden zu auf, an welche sich über die Seen hin niedrigere Teile und Pässe der Centralalpen anschliessen, so dass da jener südlichen bis südöstlichen Strömung gewissermassen ein kürzerer und bequemerer Weg gegen das nördliche Auflockerungsgebiet hin dargeboten wird.

Dieser die Alpen überwehenden südlichen Luftströmung gemäss ist es nun unserer Theorie zufolge unmittelbar verständlich, warum in den von Süd nach Nord gerichteten Alpenthälern, mit Gebirgsabschluss nach Süd hin, also in Bovernier am Nordfuss des Catogne, im Thal von Ormont am Nordfuss der Diablerets, im untern Rhonethal von Martigny bis zum Genfersee hin, im Zermatt-Thal und Saasthal, in den süd-nördlich gerichteten Thälern des Berner-Oberlandes, besonders im obern Aarethal, im Engelbergthal, im Reussthal, in den Thälern der Linth und Sernf, im Medelsthal (Platta), im Hinter-Rheinthal, im untern Rheinthal von Chur zum Bodensee hin, im untern Toggen-

burg nördlich von den Kurfürsten und in den Thälern des Appenzellerlandes nördlich vom Säntis auch wieder bis zum Bodensee herunter starke Föhnwinde zu Stande kommen. Der Föhn in den Querthälern, d. h. von Ost nach West verlaufenden Thälern wie im mittleren und oberen Rhonethal, im obern Thal der Saane, im Grindelwaldthal, im mittleren Aarethal von Meyringen bis Thun, im untern Teil des Vierwaldstättersees, im Wallenseethal, im Vorder-Rheinthal, im Prättigau (Closters) und obern Toggenburg (Wildhaus), dürfte als sekundäre und daher auch schwächere Erscheinung zu erklären sein. Indem nämlich der Föhn in den erstern süd-nördlichen Thälern gegen ihr Ende hin den Luftdruck vermindert, wird auf die Luft in den seitlich gelegenen Querthälern ein Zug ausgeübt, so dass auch da eine abwärts gerichtete Strömung eintritt. Die südöstliche Bewegung der Luft in der Höhe unterstützt eine Strömung im Thal von Ost nach West, so dass zur Zeit des Föhns in am Ostend geschlossenen Thälern föhnartige Strömungen und Erscheinungen weniger auftreten.

Die südliche Luftströmung über die Alpen hin hört auf und damit auch der Föhn, sowie das besondere, oben charakterisierte Luftdruckmaximum über der Lombardischen Ebene verschwindet und ein Föhn kommt in der Schweiz überhaupt nicht zu Stande, wenn wie im Falle des Südweststurmes vom 8. und 9. Dezember 1897 diese spezifische Luftdruckverteilung nicht eintritt, also auch die südlichen bis südöstlichen die Alpen überwehenden Winde ausbleiben.

Dass der Föhn in den Oesterreichischen Alpen namentlich nach Osten hin seltener als in der Schweiz erscheint, ist durch die bedeutendere Breite derselben, durch die grössere Entfernung vom Depressionscentrum und die im Südosten derselben als Hemmung wirkenden Vorberge in Krain und Kroatien erklärlich. In den Westalpen scheint der Föhn ganz zu fehlen, was unmittelbar verständlich ist, da hier die südwestliche Strömung in der Höhe eine von Italien nach Frankreich hin auftretende Ueberwehung des Gebirges nicht würde zu Stande kommen lassen.

Alle diese Verhältnisse werden künftige Untersuchungen, welche sich auf ein umfangreicheres und vermittelst Aufzeichnungen von Registrier-Apparaten kontinuierlicheres Beobachtungsmaterial stützen können, im Detail bestimmter erkennen und darlegen lassen. Vor der Hand dürfte unsere vorstehende Theorie des Föhns den zur Zeit vorliegenden Beobachtungen zu ihrer Verbindung und Erklärung genügen.

Gegen die aus der mechanischen Wärmetheorie folgende Erklärung der Wärme und Trockenheit des Föhns auf der Leeseite des Gebirges ist mehrfach eingewendet worden, dass sich entsprechende Erscheinungen an allen von Winden überwehten Gebirgen auf deren Leeseite zeigen müssten und dass doch die bei Triest vom Karst herabkommende Bora sowie die Bora bei Noworossysk am Schwarzen Meere sehr kalt seien. Nun sind aber in neuerer Zeit an einer ganzen Reihe von Gebirgen, von denen genügende Beobachtungen vorliegen und deren topographische Verhältnisse dies gestatten, spezifische Föhnerscheinungen nachgewiesen worden, und durch Entdeckung des Nord-

föhns in den Alpen habe ich seiner Zeit gezeigt, dass sie nicht an eine einseitige Ueberwehung des Gebirges gebunden sind, was aber die Bora bei Triest und bei Noworossisk betrifft, so repräsentiert sie keinen Föhn, sondern einfach an beiden Orten das Ueberfliessen und den Fall stark erkalteter Luft auf einem Hochplateau, welche sich beim Herunterstürzen zwar auch durch Kompression erwärmt, aber trotzdem wegen der sehr niedrigen Temperatur auf dem Plateau unten doch noch kalt erscheint. So beträgt z. B., wie schon Baron F. Wrangell in seiner Abhandlung „Ueber die Ursachen der Bora in Noworossisk“ [1]) angegeben hat, der Temperaturunterschied zwischen Noworossisk und dem Hochplateau dahinter zur Zeit der Bora daselbst 10° und mehr, wobei auf dem letztern absolute Kältegrade von —17° und mehr vorkommen. Angenommen, die Temperatur sei in Noworossisk 0° und oben —15°, so wird sich zwar die Luft beim Herunterstürzen von 550 m Höhe von —15° auf —10° erwärmen, aber dessen ungeachtet doch noch in Noworossisk gegen 0° vorher als recht kalt erscheinen, besonders wenn man dabei ihre stürmische Bewegung berücksichtigt.

Vorschlag zur Beschränkung des Begriffes Föhn.

Im Vorangegangenen habe ich ausschliesslich den Föhn der nördlichen Alpenthäler der Schweiz behandelt, weil dort dieser bestimmte Wind wegen seiner Gefährlichkeit und anderer besonderer Eigenschaften offenbar zuerst mit einem besonderen Namen belegt worden ist, also seine typischen Merkmale in diesen Thälern am sichersten werden zu erkennen sein.

Durch unsere Untersuchung haben wir aufs Neue bestätigt gefunden, dass der Föhn der nördlichen Alpenthäler ein aus der Höhe herabsteigender stürmischer, vom Thalende nach dessen Oeffnung hin wehender, heisser und trockener Wind ist. Er entsteht als Modifikation des südöstlichen Teils einer Cyclone, deren Centrum über den Britischen Inseln liegt. Die Modifikation besteht darin, dass die infolge davon über der Schweiz wehenden südwestlichen, mässig warmen und feuchten Winde durch die besondere Konfiguration des Alpengebirges veranlasst werden, sich mit südöstlichen, die Alpen überwehenden Winden zu kombinieren und als solche in die nördlichen Alpenthäler herunter zu stürzen, wobei sich die Luft durch Kompression stark erwärmt und dadurch auch relativ sehr trocken wird. Der bedeutende süd-nördliche barometrische Gradient aber, welcher durch Stauung der Luft im Süden der Alpen entsteht, hat eine stürmische Bewegung derselben nicht bloss über die Kämme und Pässe des Gebirges, sondern weiterhin auch in den Thälern als Föhn zur Folge und das allmähliche Emporziehen der Luft aus der Tiefe jenseits des Gebirges durch die südlichen Winde in der Höhe bewirkt dort Abkühlung und erhöhte Feuchtigkeit bis zu Kondensationen des Wasserdampfes. So entstehen die Gegensätze: heiss, trocken, stürmischer, absteigender

[1]) Repertorium für Meteorologie. Bd. V Nr. 4. 1876.

Wind und kühl, feucht, schwacher aufsteigender Wind in den Thälern beiderseits der Alpen, welche um so entschiedener hervortreten, je heftiger und je länger der Föhn sich manifestiert. Dieser Gegensatz ist indessen nicht als durchgängiges Charakteristikum des Föhns zu betrachten, wie der untersuchte Sommerföhn gezeigt hat, und ebenso tritt auch in der nordwestlichen Schweiz nicht ausnahmslos zum Schluss des Föhns Niederschlag ein.

Offenbar wird jeder einen Gebirgszug quer überwehende stürmische Wind auf der Leeseite desselben durch Herabstürzen in den Thälern spezifischen Föhn erzeugen und es wäre daher die Definition des typischen Föhns allgemein dahin zu modifizieren, dass er in den Thälern hinter einem Gebirgszug und zwar besonders in den nahe senkrecht zu ihm verlaufenden, einen aus der Höhe herabsteigenden stürmischen, vom Thalende nach dessen Oeffnung hin wehenden warmen und trockenen Wind darstellt, welcher durch einen das Gebirge von jenseits quer überwehenden heftigen Luftstrom erzeugt ist.

Da stürmische Winde resp. starke Druckgradienten durchweg im Gefolge von Cyclonen auftreten, so ist meistenteils die Entstehung des Föhns an Druckminima gebunden, die auf der einen oder andern Seite eines Gebirges dahin ziehen. Geht also eine Cyclone statt auf der Nordseite der Alpen auf deren Südseite vorbei, so kann in den südlichen Alpenthälern auch ein Föhn entstehen, den ich zum Unterschied Nordföhn genannt und auch zuerst als Schlussfolgerung der Theorie thatsächlich nachgewiesen habe. Herr Hann sowohl als Herr Billwiller haben später noch mehrfach solche Nordföhne untersucht. In verschiedenen Weltteilen sind weiterhin bei von Winden überwehten Gebirgen, wo genügende Beobachtungen dazu vorhanden waren, typische, der obigen Definition entsprechende Föhne erkannt worden.

Mühry und andere haben den Föhn als Windfall bezeichnet. Ich halte es für besser, diese Bezeichnung nicht für den Föhn zu gebrauchen, sondern sie nur für solche aus der Höhe herabkommende Winde zu benutzen, wo in der That das Heruntersinken bloss durch die grössere Schwere bedingt wird, also von einem eigentlichen Fall die Rede sein kann. Beim Föhn ist, wie wir gesehen haben, die erste Ursache des Herunterstürzens der Luft eine andere und erst später kommt dann ein eigentlicher Fall hinzu. Ein spezifischer Fallwind ist z. B. die oberwähnte Bora.

Als Fallwind können wir ferner auch die im Centrum einer Anticyclone aus der Höhe als spezifisch schwerer herabsinkende kalte Luft bezeichnen. Sie wird sich dabei auch erwärmen und dadurch trocken erscheinen und es hängt nur von der Höhe, aus der sie zum Erdboden herabkommt, und ihrer Anfangstemperatur in jener Höhe ab, ob sie unten von uns noch als kalt oder bereits als warm empfunden werden wird. Wenn aber auch jene Umstände derart sind, dass sie am Erdboden als recht warm und sehr trocken erscheint, so ist es bis auf die neueste Zeit niemand eingefallen, in einer Ebene einen solchen Wind als Föhn zu bezeichnen, bloss weil er warm und trocken ist. Man liess sich eben von dem richtigen Gefühl leiten, dass man zwei verschiedene Erscheinungen nicht deshalb mit demselben Namen belegen solle, weil das Endresultat derselben

ein ähnliches ist; auch brauchte man die Bezeichnung Föhn nur für Winde in der Nähe eines Gebirges. Nun kann aber eine Anticyclone auch über einem Gebirge zu Stande kommen und die Luft aus der Höhe wie in dem von Herrn Billwiller geschilderten Fall vom 14. April 1898 auf beiden Seiten des Gebirges in die Thäler heruntersinken und dabei beiderseits warm und trocken werden. Dass wir aber diese, in den Thälern durchweg nur schwachen Winde, wie sie eben der Anticyclone entsprechen, wegen ihrer Wärme und Trockenheit als Föhn bezeichnen sollen, weil sie sich zufällig im Gebirge manifestieren, während wir sie in der Ebene deshalb nicht so benennen würden, dafür scheint mir kein ausreichender Grund vorhanden zu sein. Allerdings will Herr Billwiller in seinem eingangs zitierten Artikel die Bezeichnung Föhn oder föhnartige Winde auch allgemein auf die aus Anticyclonen herauswehenden trockenen und warmen Winde sowie auf die bei Lagerung einer Anticyclone über den Alpen häufig eintretende Umkehr der vertikalen Temperaturverteilung, obschon dabei gewöhnlich gar kein Wind stattfindet, ausgedehnt wissen, nur, weil da in der Höhe die aus noch grössern Höhen herabgesunkene Luft auch warm und trocken erscheint und Anwohner diesen Zustand wohl auch einem Föhn zuschreiben. Ich kann es wohl verstehen, dass Laien in der Meteorologie, welche, ohne selbst je einen wahren Föhn erlebt zu haben, nur auf die Kunde hin, dass der Föhn ein warmer und trockener Wind sei, jeden warmen und trockenen Wind, ja selbst wegen der geringern Fühlbarkeit der Feuchtigkeit auch feuchtwarme Winde als Föhn oder föhnartig bezeichnen; da dies sogar, wie wir gesehen haben, seitens von Stationsbeobachtern, die den wahren Föhn kennen, geschehen ist. Um so mehr scheint es mir aber gerade Pflicht der Meteorologen von Fach zu sein, solchen Verwechslungen und Ausdehnungen der Bezeichnung Föhn auf dem eigentlichen Föhn ganz fremdartige Luftströmungen entgegen zu treten und auf die spezifischen Unterschiede des wahren Föhns und anderer warmen und trockenen Winde ganz verschiedener Entstehungsweise aufmerksam zu machen.

Der Föhn ist eine so eigentümliche Erscheinung von Gebirgsthälern, dass ich den Meteorologen vorschlagen möchte, diese Bezeichnung wieder auf den typischen Föhn unserer obigen Definition desselben gemäss zu beschränken und sogar den Ausdruck föhnartig zur Verhütung von Verwechslungen und falschen Deutungen zu vermeiden. Man spricht von föhnartigen Winden, wenn es eben einfach trocken-warme Winde und nicht eigentliche Föhnwinde sind; warum soll man nicht lieber trocken-warm im Gegensatz zu feucht-warm sagen, statt durch die nicht viel kürzere Bezeichnung föhnartig eine Verwirrung der Begriffe, wie sie leider zum Teil bereits eingetreten ist, zu erzeugen. So kommt es, dass selbst Stationsbeobachter nicht mehr recht wissen, was sie als Föhn bezeichnen sollen, und entweder überhaupt gar nicht mehr Föhn notieren, auch wenn der Wind ganz bestimmt als solcher auftritt, oder dann jeden warmen südlichen Wind mit dem Ausdruck Föhn belegen, wo von eigentlichem Föhn gar keine Rede ist. Wir haben in unserer Untersuchung genügend Bei-

spiele beider Art kennen gelernt. Darauf aber möchte ich noch aufmerksam machen, dass man beim Durchgehen der Annalen der schweizerischen Beobachtungen in den ältern Jahrgängen viel präzisere Angaben über den Föhn findet und höchstens da und dort in Thälern für dort auftretende Winde dieser Art die spezielle Benennung Föhn vermisst, weil dieser Name daselbst noch nicht gebräuchlich war. Erst in neuerer Zeit finden wir infolge der „Verwässerung des Begriffes Föhn“ vielfach südliche Winde mit Föhn bezeichnet, die ihrem Ursprunge nach, ja häufig auch nicht einmal ihren lokalen Eigenschaften gemäss diese Benennung rechtfertigen. Das ist mir bei der Zählung der Föhnfälle sehr unangenehm aufgefallen.

Wenn ein Bergführer dem Touristen mit überlegener Miene voraussagt, es sei Föhn zu gewärtigen, obschon er gar keine bestimmte Notion davon hat, oder wenn ein Kanzlist in der Stadt, um sein Wissen zu bekunden, einen beliebigen, durchs offene Fenster hereindringenden, warmen Luftzug als Föhn bezeichnet, so hat das weiter keine üblen Konsequenzen; wenn aber Fachmänner in Wetterbulletins, Zeitungen oder Zeitschriften aus Bequemlichkeit von föhnartigen Winden, ja sogar direkt von Föhn sprechen, obschon die betreffenden Winde mit dem eigentlichen Föhn gar nichts zu thun haben, sondern höchstens Wärme und Trockenheit mit ihm gemein haben, so begünstigen sie eben beim Laien eine bedauerliche unklare und verschwommene Vorstellung vom Föhn, statt ihn zu belehren und auf die spezifischen Unterschiede des eigentlichen Föhn und anderer warmen und trockenen Winde verschiedenen Ursprungs aufmerksam zu machen. Der Laie, der häufig nur das Endresultat eines Windes, warme und trockene Luft, bemerkt, während ihm der Ursprung zunächst unbekannt bleibt, wird vielleicht nach wie vor die schwachen, aus einer Anticyclone herauswehenden warmen und trockenen Winde als schwachen Föhn bezeichnen; wenn er aber von Fachmännern hört, dass dies kein Föhn war, so wird er allmählich derartige Winde vom Föhn unterscheiden lernen und es wird ihm dann nicht mehr auffallen, wenn auf jene vermeintlichen Föhne die gewöhnliche Folge derselben, Bewölkung und Niederschläge, ausbleibt. So würde nach und nach der reine Begriff des Föhns, des so typischen Windes unsers Alpenlandes, wieder hergestellt.

Zürich, 4. Mai 1901.

Nachtrag.

Herr Professor Pernet hat mir freundlichst in seinem Laboratorium des eidgen. Physikgebäudes seine Unterstützung zu folgendem Experiment gewährt. Auf zwei aneinander geschobenen Tischen wurde mit Glasplatten ein 3 m langer, 0,5 m breiter und hoher, oben und an den Enden offener Kanal gebildet, der 0,5 m vom einen Ende eine Scheidewand besass. Ueber diese Scheidewand legte man ein 0,5 m breites und nahe 2 m langes Zinkblech so herüber, dass die Enden schräg abfallend den Boden des Kanals berührten und so das Ganze gewissermassen ein Gebirge mit 2,5 m langem Thal auf der einen und 0,5 m langem Thal auf der andern Seite darstellte. In beide Thäler wurden nebeneinander Schalen mit rauchender Salzsäure und mit Ammoniaklösung gestellt, so dass sie sich mit Salmiakdämpfen erfüllten. Als man nun von dem Ende des kürzern Thales her horizontal und etwas oberhalb der Gebirgskante einen Strom Kohlensäure durch schwaches Oeffnen des Verschlusses einer Kohlensäurebombe hinbrausen liess, entstand im jenseitigen Thal ein deutlicher vertikaler Wirbel mit unten gegen das Gebirge hin gehender Rückströmung, der dann aber sehr rasch einem heftigen Herunterströmen der Kohlensäure in das Thal unter Herausblasen der Salmiakdämpfe aus demselben Platz machte. Sowie indessen der obere Strom durch weiteres Oeffnen der Bombe verstärkt wurde, stellte sich sofort wieder jener vertikale Wirbel ein, welcher ebenfalls bald in einen einfachen herabsteigenden Strom überging. Im Thale diesseits aber erfolgte nicht sofort, sondern nur allmählich ein aufsteigender Luftstrom längs dem Abhang des Gebirges. Durch diesen leicht zu wiederholenden Versuch hat also meine Theorie des Herabsteigens des Föhns ins Thal eine befriedigende experimentelle Bestätigung gefunden.

20. Juni 1901.



Anhang.

Zahlen-Tabellen.

In den nachstehenden Tabellen der vollständigen Original-Beobachtungen bedeuten die Zahlen bei den Ortsnamen die absolute Höhe des Stationsbarometers über Meer in Metern, ferner geben die in der Rubrik der Barometerstände über diesen aufgeführten mit + oder — bezeichneten Zahlen die an ihnen noch anzubringenden Korrektionen des Barometers an (die Reduktion auf das Niveau von 500 m folgt aus dem Vergleich mit den Isobaren) und die entsprechenden Zahlen in der Rubrik der Temperaturen stellen die Reduktion derselben auf das Niveau von 500 m Höhe dar. Die Stärkezahlen bei den Windrichtungszeichen entsprechen den S. 15 mitgeteilten Definitionen und wo zwei oder mehr Windrichtungen nebeneinander durch Schrägstriche getrennt angegeben sind, bedeutet die erste die Richtung des Wolkenzuges. Die dem Schnee in den Bemerkungen beigesetzten Zahlen repräsentieren die Höhe des entsprechenden Schmelzwassers. F bedeutet Föhn. Die Zeichen für Regen ●, Schnee ⚹, Nebel ≡, etc. entsprechen den bekannten internationalen Vereinbarungen.

Ort	Datum 1861	Barometer			Temperatur			Feuchtigkeit			Bewölkung			Wind			Bemerkungen
		7	1	9	7	1	9	7	1	9	7	1	9	7	1	9	
			+ 1,8			+ 8,3											
Julier	7. März	574,8	575,5	575,7	- 3,0	0,9	- 0,9	—	—	—	0	5	8	NE_0	SW_2	SW_2	
2243 m	8. »	575,0	574,8	574,4	- 2,2	- 0,9	- 1,0	—	—	—	8	8	8	SW_1	SW_2	SW_3	
	9. »	573,0	570,8	571,0	- 2,0	0,4	- 1,8	—	—	—	10	10	10	SW_2	SW_2	SW_3	⚹ bis Ab.
			+ 0,2			+ 7,6											
St. Gotthard	7. »	586,0	586,2	587,0	- 4,0	- 2,2	- 2,8	—	—	—	6	10	10	S	SE_2	S_3	
2100	8. »	586,0	585,2	585,8	- 5,0	- 1,0	- 2,8	—	—	—	10	10	10	S_2	S_2	S_2	⚹
	9. »	583,0	581,3	581,5	- 2,6	- 1,0	- 2,0	—	—	—	10	10	10	S_3	S_3	S_3	⚹
			+ 0,5			+ 7,5											
Bernhardin	7. »	587,4	588,2	588,0	- 4,4	- 1,4	- 2,3	—	—	—	0	10	10	SW_0	S_3	S_2	≡
2070	8. »	587,4	586,5	587,0	- 2,0	- 1,4	- 2,1	—	—	—	10	10	10	S_2	S_2	S_1	≡ ⚹ 17,5 mm.
	9. »	585,1	583,0	582,6	- 1,4	- 1,1	- 1,2	—	—	—	10	10	10	S_3	S_3	S_4	≡ ⚹ 23,0 mm.
			+ 1,1			+ 6,6											
Grimsel	7. »	602,1	601,8	602,1	0,4	2,8	1,0	92	76	69	—	—	—	SW/SE_3	W/E_2	W/SE_1	
1874	8. »	602,2	602,2	602,3	0,6	2,5	1,8	89	77	96	—	—	—	S/SW_0	S/SW_0	SW_0	⚹
	9. »	598,9	597,1	597,9	0,2	0,4	1,2	100	100	86	—	—	—	SE_2	SE_3	SE_4	⚹ 47,1 mm.
			— 0,1			+ 6,3											
Sils-Maria	7. »	606,9	607,6	607,9	- 3,3	0,7	- 0,6	88	89	96	6	8	10	W/SW_1	W/SW_2	SW/SW_3	⚹ 3,7 mm bis Ab.
1810	8. »	606,8	606,6	606,3	- 0,4	1,5	- 0,3	97	90	97	10	10	10	SW/S_1	SW/W_4	SW/W_3	Trüb.
	9. »	604,1	602,9	602,5	- 0,3	1,4	1,1	88	94	95	10	10	10	SW/S_3	SW/SW_3	SW/SW_3	⚹ 5,9 mm g. Tag.
			+ 1,0			+ 6,2											
Rigi-Kulm	7. »	607,0	606,8	606,9	2,8	4,8	4,2	—	—	—	8	7	6	W_1	S_1	W_1	
1787	8. »	605,3	605,2	605,9	2,4	4,4	1,0	—	—	—	4	4	2	S_2	S_1	SE_1	Am 10. ⚹
	9. »	602,6	602,2	602,6	2,8	1,6	0,0	—	—	—	9	7	10	S_0	SE_0	W_0	
			+ 0,7			+ 5,4											
Grächen	7. »	621,1	620,8	621,1	- 0,8	5,6	1,4	—	—	—	5	5	2	E/W_0	W/W_0	W/W_1	
1632	8. »	619,9	619,1	619,6	0,4	6,6	2,2	—	—	—	7	7	7	W/S_0	SW/NE_0	SW/NE_0	Föhnwetter.
	9. »	617,0	615,1	615,9	3,8	7,6	3,6	—	—	—	10	10	3	S/E_0	S/N_0	S/N_0	Föhnwetter.

Ort	Datum 1864	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen
			+ 0,1			+ 5,3											
Zermatt	7. März	622,7	621,9	622,3	- 3,4	7,4	1,5	85	48	68	0	2	0	SW_1	NW_1	SW_0	
1613 m	8. »	621,5	621,0	620,6	- 2,8	5,8	1,5	79	44	74	1	7	6	SW_0	S_3	SW_0	Windig
	9. »	618,6	616,8	617,5	5,0	6,0	4,7	47	49	38	10	10	6	SW_3	SW_3	SW_2	Stürmisch, i. d. Nacht auf den 10. ✱
			+ 0,6			+ 4,6											
Splügen (Dorf)	7. »	632,9	633,8	633,9	- 1,8	3,6	3,1	—	—	—	3	8	10	NW/SW_0	$SW/NW/W_2$	SW/SW_1	● schwach
1471	8. »	632,8	632,0	632,4	2,8	4,1	3,3	—	—	—	9	10	9	SW/S_1	SW/S_3	SW/SW_1	● 12,9 mm
	9. »	630,2	628,3	628,0	2,8	1,1	3,2	—	—	—	9	10	10	SW_2	SW_0	SW_0	● 28,2 mm
			+ 0,3			+ 4,5											
Andermatt	7. »	634,5	635,6	635,6	2,2	5,0	3,0	—	—	—	4	7	0	NE_1	SW_1	SW_1	
1448	8. »	634,6	634,4	634,6	2,8	3,0	4,4	—	—	—	8	10	10	SW_0	SW_0	SW_0	
	9. »	631,6	629,6	629,9	2,3	2,1	2,2	—	—	—	10	10	10	SW_3	SW_1	SW_1	● und ✱
			+ 0,9			+ 4,2											
Platta	7. »	639,8	639,2	639,9	0,2	5,1	4,8	78	60	61	1	8	10	SW/SW	SW/SW_2	SW/SW_2	Windig
1379	8. »	638,1	637,6	638,2	5,1	5,8	5,6	58	63	59	6	9	10	SW/SW_3	SW/SW_2	SW_2	Windig
	9. »	635,1	634*,5	634,0	3,8	4,1	1,2	77	79	100	10	10	10	SW_4	SW_1	NE_0	● 17,4 mm, 10. ✱ 36,7 mm
			+ 0,5			+ 4,0											
Reckingen	7. »	643,6	642,7	644,1	- 2,6	6,2	0,0	—	—	—	5	2	1	NW/N_0	W/N_1	N_0	
1339	8. »	643,0	641,9	641,8	1,6	8,0	2,6	—	—	—	7	8	10	NE_1	W_2	NE_1	
	9. »	639,3	637,5	638,2	4,6	6,8	4,0	—	—	—	10	10	10	N_0	W_1	W_1	Regnerisch
			+ 1,0			+ 3,7											
Weissenstein	7. »	644,3	644,3	644.3	1,0	3,4	1,0	—	—	—	7	9	7	—	—	—	
1290	8. »	643,4	643,4	642,4	2,4	3,2	1,4	—	—	—	5	10	10	—	—	—	●
	9. »	639,2	639,2	641,4	3,0	4,0	- 2,2	—	—	—	8	10	7	—	—	—	●
			+ 0,6			+ 3,3											
Closters	7. »	653,4	652,8	653,8	1,4	10,4	4,2	59	37	70	6	5	1	E_2	SW/S_1	S_0	
1195	8. »	652,8	651,2	652,4	5,0	10,8	4,8	57	29	58	4	6	2	E_1	S_3	S_1	
	9. »	648,7	647,5	648,8	9,7	8,8	3,0	30	47	93	5	10	5	S_3	S_4	0	≡
			+ 1,0			+ 3,1											
Chaumont	7. »	656,1	655,2	655,4	3,6	8,1	7,8	76	69	59	9	7	7	SW_2	SW_3	SW_4	● 0,1 mm
1152	8. »	653,4	654,5	654,4	4,6	5,8	3,8	76	81	96	7	8	5	SW_2	SW_4	SW_0	● 1,2 mm
	9. »	650,6	651,0	652,2	4,4	3,2	1,8	86	86	90	9	9	10	SW_2	W_2	SW_4	△ 9,8 mm
						+ 3,0											
St. Beatenberg	7. »	656,4	655,2	655,7	3,8	13,0	10,3	67	41	38	4	3	3	N_1	SW/S_4	NW_2	
1150	8. »	653,8	653,6	654,6	5,8	12,9	4,1	67	44	80	2	3	0	W_0	SE_2	NE_1	
	9. »	651,0	650,6	652,1	6,2	8,1	4,5	62	76	71	9	9	10	NW_0	NE_1	O	Nachts K
			+ 1,0			+ 2,9											
St. Croix	7. »	660,9	660,6	660,4	7,1	10,1	9,1	52	41	49	9	7	8	SW_2	SW_3	SW_1	● 0,6 mm
1092	8. »	658,5	659,8	658,6	9,1	5,2	6,9	44	82	69	6	10	1	SW_3	SW_2	NW_1	● 6,8 mm
	9. »	655,4	656,0	657,6	8,6	3,5	1,7	48	83	91	10	10	10	SW_4	NW_1	W_2	● 13,0 mm
			+ 0,9			+ 2,9											
Wildhaus	7. »	660,0	659,0	658,5	3,2	11,0	3,4	—	—	—	2	3	—	NW/SW	NW/SW	E	Bedeckt
1094	8. »	658,2	657,8	658,9	7,6	12,0	4,6	—	—	—	—	—	—	E	W	W	Klar
	9. »	655,4	654,3	656,0	9,4	7,2	3,2	—	—	—	2	2	6	NW/S_{1-2}	NW/W_2	NW/W	Stürmisch

Ort	Datum 1861	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen
			+ 0,9			+ 2,6											
Engelberg	7. März	667,1	665,7	666,0	2,5	10,0	6,7	60	48	50	7	5	0	NE_1	SE_3	SE_0	
1024 m	8. »	664,5	664,8	665,3	9,8	9,5	3,7	26	38	90	4	6	1	$W/S/SE_4$	SW/SE_3	W_0	
	9. »	661,8	661,3	662,2	10,4	6,9	3,6	31	76	95	8	10	10	$SW\ S/SE_4$	W_1	W_0	
			+ 1,0			+ 2,0											
Trogen	7. »	674,5	673,8	673,2	5,4	12,5	10,2	61	48	36	1	2	3	SW_0	SW_1	$S_{2\ 3}$	Heiter
926	8. »	671,8	671,6	673,9	10,8	14,5	5,0	31	31	85	5	3	3	$S_{3\text{-}4}$	SW_2	SW_2	●, stürmisch
	9. »	668,9	669,7	670,6	10,8	8,1	4,4	36	77	86	3	10	10	S_2	W_2	0–1	●, trüb u. stürm.
			— 0,1			+ 1,9											
Einsiedeln	7. »	675,9	674,7	674,7	0,9	10,4	5,4	85	38	61	2	4	4	W/SE_0	SW/NE_1	NW/SW_0	
910	8. »	672,9	673,0	674,6	10,1	12,5	3,2	35	31	95	4	4	3	SW/SW_1	SW/SW_2	$SW\ SW_1$	Stürm. m. etwas ●
	9. »	669,8	670,8	671,4	10,4	6,7	3,9	36	87	87	7	10	5	SW_3	NW_2	N_1	Sturm von 2–11^h a.
			+ 1,0			+ 1,8											
Uetliberg	7. »	677,9	677,1	676,9	4,6	12,2	9,4	76	77	100				W	W	W	
874	8. »	675,5	675,8	677,3	6,8	11,2	6,4	73	100	83			—	W	W_4	W	●
	9. »	672,7	673,4	674,3	5,4	6,8	3,4	85	81	96			—	W_2	W	W	≡, ●
			+ 0,3			+ 1,6											
Auen	7. »	683,1	681,9	682,2	3,7	12,4	10,2	70	27	34	4	4	0	NW/SE_3	SW/SE_2	SE_3	
832	8. »	681,3	680,6	681,6	10,6	13,0	5,2	31	32	86	7	7	0	W/SE_3	SW/SE_3	W_1	
	9. »	677,3	677,2	678,8	12,1	10,6	5,0	31	41	93	7	9	10	S/S_3	SW_3	NW_0	Regnerisch
			+ 0,8			+ 1,0											
Faido	7. »	695,0	696,1	696,5	2,2	6,9	4,4	77	73	97	1	6	10	W	NE	E	●
722	8. »	695,3	694,2	694,8	4,0	6,8	4,6	97	91	98	10	10	10	E	N	SE	● 11,7 mm
	9. »	691,4	689,3	689,4	5,2	5,4	6,2	98	96	93	10	10	10	S	S	S	● 39,0 mm
			+ 0,7			+ 1,0											
Thusis	7. »	693,5	692,7	692,9	1,8	13,0	10,4	82	41	52	3	4	4	S_0	SE_2	SE_2	
703	8. »	692,1	691,2	691,4	10,1	14,7	11,4	52	41	47	8	6	8	SE_0	SE_2	SE_2	●
	9. »	689,0	687,2	687,6	11,2	9,2	6,0	49	75	97	8	10	10	S_2	SE_1	SE_0	●
			+ 0,9			+ 1,0											
Castasegna	7. »	696,4	697,9	698,1	2,5	6,2	5,2	73	80	95	1	10	10	0	0		●
700	8. »	696,8	696,5	696,6	4,6	6,6	5,1	97	95	95	10	10	10	0	0	—	● 4,9 mm
	9. »	694,5	691,3	690,6	5,0	5,7	8,4	80	90	69	10	10	10	0	NE_1	-	● 20,0 mm 10. ● 38,6 mm
			+ 1,3			+ 0,9											
Gliss	7. »	697,0	695,1	696,3	1,8	13,6	7,5		–	—	6	3	2	W/SW	SE_1	SE_2	
688	8. »	695,2	694,4	694,6	5,7	14,5	8,3		-		5	6	6	NE_2	SE_2	SE_2	
	9. »	691,5	689,6	689,9	10,1	11,9	9,9		—		9	9	1	E_2	SE_3	E_2	
			+ 1,0			+ 0,9											
St. Gallen	7. »	695,1	694,0	692,9	3,2	13,8	11,7	77	51	30	0	2	0	SW_0	NW/NW_0	SW_0	
679	8. »	692,1	691,7	694,1	7,0	16,9	7,0	64	28	83	3	1	3	W/SW_0	$SW\ SW_1$	SW_0	●
	9. »	689,0	690,2	691,6	11,8	10,3	7,0	71	75	77	2	10	10	SW/SW_0	NW/NW_1	NW_0	● 1,9 mm
			+ 0,1			+ 0,7											
Lohn	7. »	697,9	696,4	696,2	4,4	10,3	9,8	87	72	63	4	5	5	E/NW_1	W/WSW_1	WSW_1	
645	8. »	695,0	695,8	697,1	6,4	9,7	6,4	84	68	94	6	8	10	SW_0	W_2	W_1	Trüb, ●
	9. »	692,2	691,9	694,1	6,5	8,6	4,8	80	69	86	9	9	9	W/NNW_1	W, NNW_3	W/NNW_2	● 11,4 mm

Ort	Datum 1864	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen
			+ 0,4			+ 0,6											
Freiburg	7. März	699,1	697,8	696,9	2,9	12,2	11,9	91	56	61	9	5	10	S_1	S_3	S_2	
630 m	8. »	696,0	696,4	697,2	4,7	12,6	7,7	76	55	90	5	9	9	S_1	S_3	S_1	●
	9. »	692,6	693,8	693,0	5,4	8,0	8,3	89	86	81	7	10	9	S_1	W_1	W_1	● 2,8 mm
			— 0,1			+ 0,5											
Chur	7. »	702,9	701,3	702,3	5,5	16,2	11,2	64	32	46	3	4	2	SE_1	SW_2	SW_2	Föhnwetter
603	8. »	700,9	700,1	700,7	10,6	16,6	11,8	49	34	43	7	5	5	SW_3	SW_2	SW_2	Föhnwetter
	9. »	697,5	696,8	697,1	13,0	10,4	8,1	42	70	77	6	10	10	SW_3	SW_3	SW_1	● 16,4 mm F.
			+ 0,6			+ 0,5											
Reichenau	7. »	703,6	702,5	702,9	3,8	14,2	8,8	—	—	—	2	5	2	SW_1	S_3	—	
597	8. »	701,9	700,8	701,4	6,4	15,1	10,3	—	—	—	5	6	8	SW_2	S_3	—	
	9. »	698,7	697,6	697,5	9,9	9,2	6,5	—	—	—	5	10	10	S_2	SW_2	—	●
			+ 0,6			+ 0,3											
Bern	7. »	704,4	703,0	702,9	2,0	13,2	11,2	91	54	67	7	3	2	E_0	W_2	SW_2	
574	8. »	701,5	701,5	702,4	2,6	12,7	6,6	88	58	93	6	10	10	SE_0	W_4	S_0	
	9. »	698,9	698,8	700,4	4,0	9,4	5,9	95	80	95	8	10	10	SE_1	S_0	NW_0	● 4,9 mm
			— 0,1			+ 0,2											
Schwyz	7. »	706,5	704,9	705,0	4,3	13,9	11,7	76	40	39	3	4	0	N_0	W_0	3h p. SW_1	
547	8. »	703,1	703,1	704,9	12,0	16,0	7,8	38	32	78	3	4	1	NW_0	SW_2	11h a. SE_4 2h p. SE_2 3h p. NE_1 5h p. NW_1	Starker Föhn
	9. »	700,2	700,5	701,9	11,7	11,3	7,1	46	65	80	9	10	4	SW_1	NW_2		
			+ 0,8			+ 0,3											
Marschlins	7. »	707,7	706,6	707,4	5,0	15,8	12,6	73	31	38	5	6	4	N	S_3	S_{2-3}	
545	8. »	706,1	704,4	705,5	12,2	16,5	12,8	41	31	41	7	6	6	SE_2	S_3	S_{2-3}	Ab. zuw. N_2
	9. »	701,7	701,9	702,4	13,1	12,2	7,4	39	62	91	6	9	9	SE_{3-4}	S_2	S	● Abends
			+ 0,6														
Sargans	7. »	710,9	709,3	709,7	7,0	16,9	11,4	65	26	46	4	2	3	W/SE_2	SE_3	SE_4	● 2,0 mm
501	8. »	708,3	707,7	709,5	13,0	16,8	10,3	64	28	51	3	4	4	SE_4	S/SE_4	E_2	Stürmisch
	9. »	704,0	704,1	705,6	14,0	16,6	8,0	34	47	81	5	4	10	S/SE_3	SE_2	E_1	Trüb
			+ 0,6														
Martigny	7. »	713,3	711,6	711,5	4,1	10,3	9,0	80	63	60	4	3	0	SE_0	SE_0	SE_0	⌴
498	8. »	710,8	709,6	709,5	6,6	13,4	9,6	62	57	56	3	10	0	SE_1	SW_0	N_0	⌴
	9. »	705,6	704,0	706,0	12,0	16,0	10,4	47	42	65	10	10	3	SE_4	N_0	N_0	
			+ 0,7			— 0,1											
Neuchâtel	7. »	711,2	709,7	709,1	6,8	12,2	12,4	74	86	57	10	6	10	W_2	SW_3	3	● 0,6 mm
488	8. »	707,8	708,2	709,0	9,0	9,3	7,1	65	75	89	5	10	5	W_0	W_6	1	● 0,7 mm
	9. »	704,4	705,8	706,8	8,4	8,4	7,2	81	71	72	8	7	10	NW_0	W_0	2	● 14,0 mm
			+ 0,6														
Zürich	7. »	712,5	710,8	711,2	5,6	13,7	10,4	84	66	64	3	5	5	NE_1	SW_1	NW_2	Schön
480	8. »	709,3	709,2	710,4	9,1	14,5	7,2	69	54	90	5	6	3	NW_1	NW_3	E_1	● windig
	9. »	706,6	707,3	708,6	7,0	9,9	7,0	83	73	87	7	10	10	N_1	NW_3	NE_1	● windig
			+ 0,7			— 0,2											
Altstätten	7. »	712,2	710,6	710,3	6,2	13,0	14,4	66	62	27	6	2	1	SW	NE	S/S_{2-3}	Am 6. u. 10. März ●
474	8. »	708,3	708,5	711,1	15,0	17,5	8,2	24	28	75	8	2	1	S_{2-3}	SW/S_{2-3}	N	
	9. »	705,8	706,1	708,1	14,4	14,5	7,5	28	48	85	5	7	10	S_2	SW_1	NE	

Ort	Datum 1861	Barometer 7	1	9	Temperatur 7	1	9	Feuchtigkeit 7	1	9	Bewölkung 7	1	9	Wind 7	1	9	Bemerkungen
			+ 1,0			— 0,4											
Solothurn	7. März	715,4	713,8	713,5	1,3	11,8	9,1	97	76	83	5	7	8	W_0	SW_2	W_0	⌴
441 m	8. »	712,2	712,4	713,6	3,3	10,3	5,7	100	89	100	6	8	9	NE_0	SW_3		●
	9. »	708,8	709,1	711,1	5,3	9,3	6,2	96	77	96	8	10	10	SW_0	SW_1	NW_0	●
			+ 1,7														
Glarus	7. »	712,5	710,3	710,2	1,8	15,3	13,4	89	43	33	1	3	0	SF_0	NW_0	SE_2	Schön
488	8. »	709,0	707,9	710,5	13,0	17,6	5,2	31	26	87	4	3	0	$S_{2\,3}$	NE/SE, SE_3	E_0	Föhnsturm Vm.
	9. »	704,6	705,4	707,4	15,6	12,6	7,9	27	52	85	5	10	10	SE_3	$N_{2\,3}$	NE_0	Vm. Heft. F., ● p.
			+ 0,2			0,3											
Stans	7. »	714,9	713,0	713,3	0,0	14,6	7,4	96	18	70	6	5	3	E_0	NE_0		
456	8. »	711,9	711,2	713,4	2,2	16,4	5,4	83	34	90	0	2	4	SE_0	N_1		
	9. »	709,0	708,9	710,1	4,6	12,2	6,8	92	57	81	5	10	10	NW_2	NW_2		Windst. i. d. Höhe
			+ 0,5			— 0,2											
Altorf	7. »	715,2	713,4	713,9	3,3	16,5	14,2	84	23	28	5	2	0	S NW	$S\ S_4$	$S\ S_3$	
454	8. »	712,2	712,1	712,7	14,4	17,1	9,8	26	31	65	5	3	2	$S\ S_{3\text{-}4}$	$S\ S_3$	S/S_2	
	9. »	708,9	708,4	713,1	12,6	14,0	7,4	48	34	84	6	10	5	$S\ S_2$	$S\ S_3$	S E	
			+ 0,7			0,3											
Winterthur	7. »	714,5	713,2	713,7	2*,0	13,8	9,2	72	53	67	6	5	8	SW_1	SW_1	SW_1	
441	8. »	711,7	711,9	713,7	3*,7	15,0	8,0	72	43	84	7	8	6	SW_2	SW_3	SW_2	● 4–5h p.
	9. »	710,0	709,9	711,2	4*,5	10,4	6,5	86	76	86	9	9	10	SW_1	NW_1	NW_1	● 8h p.
			+ 1,0			0,3											
Rathausen	7. »	715,5	713,6	714,2	0,4	15,1	10,7	94	54	59	5	7	4	0	SW/E_1	SW_2	⌴
440	8. »	712,5	712,2	713,9	1,6	16,3	6,2	95	41	94	5	9	6	0	NW_2	W_1	⌓, ●
	9. »	709,9	710,0	711,4	2,8	11,1	6,1	98	76	90	8	10	10	S_1	NW/NE_1	SW_1	⌓, ●
			+ 1,0			– 0,3											
Bex	7. »	716,7	715,2	715,2	8,3	16,0	14,5	67	44	35	7	4	0	SW	SW		
437	8. »	713,5	713,3	713,2	12,1	18,0	9,8	45	34	65	2	7	0	W	W		Abds. starker Wind
	9. »	710,1	709,7	712,1	14,6	15,4	8,2	40	64	86	10	10	10	Gibt nur den obigen Wolkenzug an			
						0,2											
Porrentruy	7. »	713,3	712,4	714,8	11,4	16,0	11,4	46	50	84	10	8	8	SW_3	SW_4	SW_2	
465	8. »	710,5	712,7	712,4	14,6	10,0	8,6	39	79	83	10	10	10	SW_2	SW_4	SW_3	● 1h p.
	9. »	708,9	710,4	711,6	10,8	11,0	6,4	67	70	80	10	10	10	SW_3	SW_3	SW_3	● 54,0 mm g. Tag
			+ 0,9			— 0,3											
Kreuzlingen	7. »	716,9	715,9	714,7	2,1	9,7	5,2	89	63	86	1	3	8	SW_1	NW_1	NW_1	Hell
431	8. »	713,5	713,2	715,6	3,5	14,2	6,4	88	44	90	2	4	10	N_1	NE/NW_2	SW_2	Trüb, ● Föhn
	9. »	710,4	711,0	712,7	3,2	10,2	5,4	93	67	81	6	8	8	NW_2	E/SW_2	SW_2	Trüb, ● 1,8
			+ 1,1			— 0,3											
Zug	7. »	716,5	714,6	714,8	2,1	13,7	11,9	91	56	49	9	8	9	NE_0	SW_0	S_1	
429	8. »	713,5	713,6	715,1	3,3	16,8	7,5	93	49	85	6	9	8	NE_0	SW_0	SW_0	2–5h p. W_2
	9. »	710,6	711,3	712,6	4,3	10,7	7,0	93	70	83	6	10	9	NE_0	N_0	N_0	● p.
			+ 0,6			— 0,4											
Aarau	7. »	720,1	718,1	718,4	2,7	14,4	9,6	100	54	79	7	7	10	NW	W_2	–	
389	8. »	718,9	716,9	718,3	4,0	14,6	7,0	100	58	100	7	10	10	NW	W	SW_2	●
	9. »	714,3	714,6	716,1	5,0	11,1	7,3	100	68	92	10	7	10	NW	W		●

Ort	Datum 1864	Barometer 7	1	9	Temperatur 7	1	9	Feuchtigkeit 7	1	9	Bewölkung 7	1	9	Wind 7	1	9	Bemerkungen 7 1 9
			+ 0,5			— 0,5											
Schaffhausen	7. März	719,3	712,2	717,0	1,6	13,7	9,4	98	47	74	3	6	—	SW_0	SW/SW_2	—	Stürmisch
398 m	8. »	716,3	715,9	717,9	2,3	12,4	7,4	96	64	94	7	10	—	SW_0	W/W_2	—	●
	9. »	713,8	713,4	715,0	5,2	10,6	6,4	97	63	83	9	9	—	NE_0	W/NW_2	—	● 5,9 mm
			0,0			— 0,6											
Montreux	7. »	721,0	720,0	719,8	7,5	14,4	11,1	72	62	73	9	6	5	SW/NW_0	SW/NW_0		
385	8. »	717,6	718,5	718,1	11,1	13,4	8,0	43	61	84	6	10	1	SW/N_2	SW/NW_3	-	
	9. »	713,9	714,6	717,1	9,7	13,8	8,5	62	58	82	10	8	10	S/NE_1	S/NW_1	—	● p.
			+ 0,2			— 0,7											
Mendrisio	7. »	726,2	727,4	727,8	2,0	6,1	7,2	96	93	96	5	8	—	N_0	N_0	-	
355	8. »	726,9	726,6	726,1	6,6	9,0	9,4	98	90	81	10	10	—	NE_0	E_0	—	● 20,3 mm
	9. »	724,2	720,9	721,9	8,4	11,3	10,0	92	70	90	10	10	—	S_1	SE_2	—	● 12,2 mm <
			— 0,1			— 0,6											
Morges	7. »	721,3	720,0	719,8	3,6	13,5	8,1	94	63	88	9	2	8	S_0	S_1	W_1	Schön
380	8. »	717,8	719,2	718,2	9,7	11,1	5,7	65	78	94	9	10	3	SW_1	SW_1	0	● 2,4 mm
	9. »	714,2	714,4	717,4	7,1	13,1	9,0	84	62	70	9	10	10	NW_0	SW_2	SW_2	● 1,2 mm
			+ 1,0			— 1,0											
Basel	7. »	727,8	726,5	727,5	7,2	16,7	12,4	72	42	74	9	9	10	SW_1	SW_3		Bewölkt
281	8. »	724,3	726,3	726,5	9,6	12,0	11,0	72	69	74	9	10	10	E_1	SW_3		●
	9. »	722,5	724,1	718,1	9,6	9,4	8,6	72	74	75	9	10	10	SW_2	SW_2		●
			+ 1,3			— 1,0											
Lugano	7. »	733,1	734,3	734,5	0,9	7,2	6,6	100	89	98	0	10	10	SW_0	S_0	SE_0	⌓
275	8. »	733,5	733,2	732,7	6,4	9,3	8,0	97	91	96	10	10	10	NW_0	SE_0	SE_0	● 14,3 mm
	9. »	730,3	727,5	728,1	8,7	10,0	12,7	93	90	69	10	10	9	SW_0	NW_1	SW_1	● 23,8 mm
			0,1			— 1,3											
Bellinzona	7. »	738,0	739,7	739,4	1,9	8,2	7,2	96	86	97	0	9	10	NE_0	SW_0	S_0	● Nm.
229	8. »	738,0	737,9	737,3	6,9	9;0	7,9	91	93	95	10	10	10	SW_0	SW_0	NE_0	● ganz. Tag
	9. »	734,8	732,2	731,5	8,0	8,3	12,3	95	92	68	10	10	10	NE_0	SW_1	S_2	● um Mittag
	1872					+ 9,5											
St. Bernhard	6. März	564,3	562,9	561,0	- 5,0	- 6,7	- 8,8				—	6	-	—	SW_2	—	
2478	7. »	560,4	560,2	560,7	- 8,0	- 6,7	- 5,7	-				10		—	SW_3		
	8. »	560,6	560,9	561,5	- 7,8	- 6,4	- 6,0	-		-		10	-	—	SW_2		
	9. »	561,8	563,1	564,3	- 6,2	- 4,7	- 4,6	—	—	—	—	10	—	—	SW_2	—	*
						+ 8,8											
Bernina (Hospiz)	6. »	566,7	565,6	564,7	- 9,0	- 2,2	- 7,4	—	—	—	3	8	10	SE_1	SE_2	SE_3	
2340	7. »	564,1	565,0	564,2	- 6,8	- 3,7	- 6,6	—	—	—	10	10	8	SE_4	SE_4	SE_4	Stürmisch
	8. »	563,6	563,7	563,4	- 6,0	1,6	- 6,0	—			9	10	8	E_1	E_1	$NW S_1$	
	9. »	565,7	565,8	567,2	- 3,4	0,5	- 1.2				9	10	10	E_1	E_2	E_1	* *
			+ 0,7			+ 8,3											
Julier	6. »	582,2	579,2	577,7	- 6,0	- 3,0	- 6,0	—	—	—	7	4	10	N/E_1	S/W_1	S/SW	* in der Nacht
2237	7. »	569,6	574,7	573,0	- 4,0	- 1,0	- 5,0	—	—	—	10	9	10	E/NE_2	S/ SW	S/SW_1	
	8. »	576,6	577,0	577,7	- 4,1	- 1,3	- 3,3	—	—	—	10	10	4	S/E_2	S/E_2	S/E_1	
	9. »	578,0	579,1	580,4	- 3,4	2,0	- 1,0	—	—	—	7	10	10	S/E_2	S/E_2	S/E_2	* g. T. v. 9 a. an

Ort	Datum 1872	Barometer 7	1	9	Temperatur 7	1	9	Feuchtigkeit 7	1	9	Bewölkung 7	1	9	Wind 7	1	9	Bemerkungen 7	1	9
						+ 7,6													
St. Gotthard	6. März	592,2	591,2	589,2	-5,4	-2,9	-5,7	—	—	—	0	10	10	S_2	S/SE_2	S_3			
2100 m	7. »	588,4	589,2	589,2	-6,0	-4,3	-5,0	—	—	—	10	10	10	S_3	S_3	SE_3	✱ 70 cm		
	8. »	589,1	589,3	589,8	-5,3	-3,5	-4,5	—	—	—	10	10	10	SE_1	S_1	SE_2	✱ 150 cm		
	9. »	589,8	591,7	592,2	-4,6	-1,4	-1,8	—	—	—	10	10	10	S_1	S_1	SE_1	✱ 3 cm		
						+ 7,5													
Bernhardin	6. »	594,8	594,0	592,3	-5,0	-2,8	-5,6	—	—	—	0	10	10	S_1	S_1	S_2			
2070	7. »	591,4	592,4	591,9	-5,4	-3,0	-4,6	—	—	—	10	10	10	S_3	S_2	S_3	✱ 6,0 mm		
	8. »	591,6	592,2	592,5	-4,6	-2,2	-4,0	—	—	—	10	10	10	S_2	S_1	S_0	✱ 1,0 mm		
	9. »	592,5	593,8	594,8	-4,0	-0,2	-2,0	—	—	—	10	10	10	S_1	S_0	S_0	✱ 1,0 mm		
						+ 7,2													
Simplon (Hosp.)	6. »	598,3	597,5	596,2	-3,8	-3,9	-2,1	—	—	—	0	3	10	SE_4	SE_3	SE_3			
2008	7. »	595,1	595,7	595,7	-4,8	-4,5	-3,4	—	—	—	10	10	10	SE_4	SE_2	S_1	✱	—	✱
	8. »	595,1	595,2	596,0	-4,7	-4,3	-3,4	—	—	—	10	10	10	SE_3	SE_2	SE_2	✱	—	✱
	9. »	596,0	597,1	598,8	-3,6	-3,4	-2,8	—	—	—	10	10	10	SE_1	SE_3	SE_2	—	—	✱
						+ 6,6													
Grimsel	6. »	609,1	608,4	607,0	-4,2	0,6	-2,0	90	90	88	0	10	10	SE_1	NW/SE_3	SE_2	—	—	✱
1874	7. »	606,0	606,8	606,3	-3,0	-0,6	-2,0	100	90	96	10	10	10	SE_3	SE_2	E_3	✱	✱	✱
	8. »	606,2	606,0	606,6	-2,0	1,4	-0,4	100	79	96	10	2	2	SE_1	N/S_1	N/SW_1			
	9. »	606,9	608,0	609,0	-0,6	1,4	0,4	83	85	94	10	10	10	E_2	SE_2	E_2	✱	✱	✱
						+ 6,3													
Sils-Maria	6. »	614,3	613,2	612,0	-12,1	0,8	-3,6	80	67	90	0	3	10	SE_0	SW/S_1	SW/S_1	—	—	✱
1810	7. »	611,2	612,0	611,8	-3,7	1,2	-1,4	92	62	74	10	10	10	SW/W_1	SW/W_2	SW/W_2	Trüb		
	8. »	610,9	611,3	611,4	-2,7	1,0	-4,4	93	76	86	10	10	10	SW/SW_0	SW/S_1	S_0	≡ ganz. Tag		
	9. »	612,1	612,8	613,8	-5,8	3,0	0,2	87	63	95	10	10	10	SW/SW_0	SW/SW_1	SW/SW_0	—	✱	✱
						+ 6,2													
Rigi-Kulm	6. »	615,2	613,4	611,5	0,0	1,4	-0,4	—	—	—	0	2	4	S	S_2	S_3	—	—	F^2
1787	7. »	608,9	609,1	609,7	0,0	3,2	1,4	—	—	—	10	5	7	S_4	S_4	S_4	F^2 ganz. Tag		
	8. »	610,2	610,6	611,9	1,0	3,6	1,4	—	—	—	9	3	1	S_2	S_2	S_1			
	9. »	612,0	612,8	615,2	2,4	4,8	3,0	—	—	—	9	7	3	S_4	S_3	S_1			
						+ 5,9													
Bevers	6. »	622,4	620,4	619,6	-13,4	1,2	-2,2	84	60	78	1	3	10	W_1	NE/SW_2	S/SW_1			
1711	7. »	618,9	619,5	619,4	-3,6	2,0	-2,0	93	61	74	9	8	7	W_0	SW_2	SW_1			
	8. »	618,6	618,8	619,5	-1,9	0,6	-4,0	82	94	87	10	10	1	S_0	S_2	SW_1			
	9. »	619,9	620,4	621,8	-8,2	3,0	0,5	95	62	97	7	9	10	S_0	S_0	S_1	—	—	●
						+ 5,4													
Grächen	6. »	627,3	625,5	624,9	-0,4	5,0	-2,0	—	—	—	0	10	3	W_0	W_0	W/W_0			
1632	7. »	623,9	623,2	623,8	-1,4	4,2	-0,2	—	—	—	10	10	10	W/W_0	W/W_0	W/W_1			
	8. »	623,9	623,7	624,8	-2,0	5,6	-6,0	—	—	—	10	8	0	SW_0	SW_0	SW_0			
	9. »	624,4	625,2	627,4	1,0	6,6	1,5	—	—	—	10	8	10	NE_0	S/NE_0	S/NE_1			
						+ 4,6													
Splügen (Dorf)	6. »	639,9	639,1	637,7	-2,7	3,0	-1,4	—	—	—	2	5	10	N/W_1	N/S_3	N/N_1	Von 3h p. an F^2,		
1471	7. »	636,5	637,1	637,1	-0,4	4,2	1,6	—	—	—	9	7	7	W/W_0	W/W_2	S/S_1	✱, dann ↙		
	8. »	636,7	636,6	637,1	0,6	1,8	1,4	—	—	—	7	7	3	S/S_1	S/S_1	SW/SW_0	✱		
	9. »	636,7	636,5	639,0	1,0	3,9	2,9	—	—	—	5	7	6	SW/SW_1	W/W_0	SW/SW_0	✱		

Ort	Datum	Barometer			Temperatur			Feuchtigkeit			Bewölkung			Wind			Bemerkungen
	1872	7	1	9	7	1	9	7	1	9	7	1	9	7	1	9	7 1 9
						+ 4,5											
Andermatt	6. März	641,5	641,6	639,4	-0,1	2,5	-1,1	—	—	—	0	0	0	W_1	E_{1-2}	NE_{1-2}	
1448	7. »	638,2	639,2	638,9	-0,8	2,2	0,5	—	—	—	10	8	10	E_1	E_2	E_3	*
	8. »	639,0	639,0	639,5	0,8	3,5	1,8	—	—	—	10	8	0	E_1	NE_2	NE_3	*
	9. »	639,1	640,1	641,1	1,9	2,9	4,0	—	—	—	5	10	10	NE_2	E_2	NE_3	●
						+ 4,2											
Platta (Medels)	6. »	648,2	646,7	645,9	3,3	4,1	0,8	53	54	79	0	5	10	SW_3	SW_3	SW_3	
1379	7. »	644,7	644,5	644,8	0,9	4,0	2,7	77	52	64	10	10	10	SW_2	SW_3	SW_2	* 2,1 mm
	8. »	645,0	644,8	645,4	1,8	3,1	3,1	70	56	67	10	7	3	SW_2	SW_2	SW_2	
	9. »	645,4	645,5	647,0	3,3	6,7	5,2	53	59	65	10	9	10	SW_2	SW_3	SW_2	
						+ 4,0											
Reckingen	6. »	650,7	649,2	648,8	-4,2	5,6	0,0	—	—	—	0	10	9	NE_0	W_3	N_1	
1339	7. »	648,3	648,3	648,5	-1,0	4,2	1,8	—	—	—	10	10	10	SW_1	SW_2	NE_1	
	8. »	647,9	647,3	647,8	-5,4	7,4	2,4	—	—	—	10	6	4	NE_1	SW_1	NE_1	
	9. »	648,5	649,5	651,0	3,4	5,0	2,8	—	—	—	10	10	10	NE_2	N_2	NE_2	
						+ 3,5											
Gäbris	6. »	—	—	—	2,3	8,0	2,3	—	—	—	0	0	2	W	S_1	S_2	≡ im Tal
1253	7. »	—	—	—	3,7	7,8	4,0	—	—	—	9	3	3	S_2	S_3	S_3	
	8. »	—	—	—	4,6	8,0	5,0	—	—	—	3	5	1	S_1	S_1	S_1	
	9. »	—	—	—	6,2	10,8	8,3	—	—	—	7	7	3	SE_1	SE_1	S_1	
						+ 3,4											
Monte Generoso	6. »	662,5	661,4	660,4	0,5	2,8	-1,1	51	48	64	8	8	10	NW/NE	—	NE_1	— — *
1224	7. »	659,4	659,9	660,1	-0,1	0,9	0,9	83	—	100	10	10	10	SE_2	NW/SE_2	NW/SE_1	* 16,0 mm
	8. »	659,0	659,4	659,6	0,3	1,3	1,1	100	85	93	10	10	10	SW/NE	SW/NE	NW/NE	* 1,2 mm
	9. »	659,3	660,6	661,4	0,5	2,1	1,9	93	94	86	10	10	10	NE/NW	NW/NE	NW/NE	* 4,2 mm
						+ 3,4											
Churwalden	6. »	662,6	662,1	660,8	0,6	8,2	3,6	88	36	63	0	5	10	SE_2	SE/SE_3	SE_3	
1213	7. »	659,2	658,1	657,1	2,0	6,6	4,0	72	47	69	10	10	10	SE_3	SE_3	SE_4	
	8. »	656,8	657,1	657,9	3,6	7,2	3,4	51	49	63	10	5	0	SE_2	SE_2	SE_0	
	9. »	657,4	657,5	659,6	3,6	10,8	6,5	51	36	66	5	4	2	SW/SW_1	SE_3	SW_1	
						+ 3,3											
Closters	6. »	660,4	658,9	658,1	0,6	7,3	3,0	39	29	50	0	0	0	S_2	S_{2-3}	S_{2-3}	Föhn
1207	7. »	656,9	657,5	657,7	5,0	7,3	4,4	44	34	40	6	7	5	S_{2-3}	E_3	S_1	
	8. »	657,3	656,6	658,0	0,6	7,0	1,6	71	35	80	8	5	0	E_1	SE_1	E_1	
	9. »	657,6	657,6	659,9	2,1	10,3	5,4	64	44	69	8	6	3	NE_0	S_3	S_0	
						+ 3,1											
Chaumont	6. »	664,5	662,3	660,1	1,1	6,7	2,9	81	65	72	0	2	1	NW	NE/SW	—	● 0,2 mm
1152	7. »	657,0	656,9	657,5	1,1	9,6	6,8	97	49	53	10	7	7	SE_1	SW/SW_2	SW_2	
	8. »	658,5	659,6	660,6	3,1	8,4	4,8	66	42	65	9	10	0	SW_1	SW_1	SW_1	
	9. »	660,6	661,6	664,1	4,4	7,6	7,0	57	62	57	8	9	9	NE_1	N	NW_1	
						+ 3,0											
Beatenberg	6. »	663,4	661,6	659,6	-0,3	8,8	4,1	85	50	51	0	6	3	NW_1	SW_1	NW_1	Alpenglühen Abds.
1150	7. »	655,9	655,5	657,4	5,3	11,2	8,0	46	36	49	8	4	10	S_{3-4}	W/SE_{3-4}	W_3	Föhngewölk
	8. »	657,4	658,2	659,3	4,1	12,0	3,9	59	46	63	7	7	0	W_1	S_{2-3}	NW_1	Morgen- u. Abendrot
	9. »	660,2	660,4	662,9	5,1	9,1	5,2	58	61	66	7	7	3	SW_1	S_2	NW_1	

Ort	Datum 1872	Barometer 7	1	9	Temperatur 7	1	9	Feuchtigkeit 7	1	9	Bewölkung 7	1	9	Wind 7	1	9	Bemerkungen
						+ 2,9											
St. Croix	6. März	668,9	666,6	664,3	0,4	7,0	4,3	88	64	57	0	1	2	NE_0	NE_0	SW_1	
1092 m	7. »	661,0	660,7	661,3	1,2	8,3	5,4	88	51	51	10	2	5	NE_2	SW/SE_2	NW/NE_2	✱ ind. Nacht 1,2 mm
	8. »	662,7	663,7	664,9	4,9	8,7	4,3	52	43	70	10	10	0	NE_1	NE_1	NE_1	
	9. »	664,8	665,6	668,3	3,3	7,9	6,1	78	57	75	7	9	9	NE_0	SW_0	SW_1	
						+ 2,6											
Engelberg	6. »	675,6	673,0	671,4	-2,4	7,3	6,8	76	44	28	0	5	3	SW_0	NE/SW_0	E_3	
1024	7. »	667,4	667,5	668,5	6,9	9,5	7,5	36	29	35	8	8	10	E_4	E_4	SE_3	
	8. »	669,1	669,2	671,0	7,5	9,4	3,9	35	40	61	7	6	7	SE_3	SW/SE_3	SW/SE_0	
	9. »	670,8	671,6	674,0	9,4	11,6	6,9	36	46	59	6	7	10	E_3	SE_0	SE_0	
						+ 2,0											
Trogen	6. »	682,7	680,3	678,6	1,0	3,3	5,9	78	60	39	0	0	1	S	N_1	S_2	Ab. Föhn
926	7. »	677,5	676,3	676,6	7,1	10,1	7,5	35	30	32	9	5	1	S_2	S_3	S_3	Föhn (7.–9.)
	8. »	676,8	676,3	676,6	8,1	11.3	9,0	31	33	37	2	2	0	S_2	S_2	S_2	
	9. »	679,1	679,6	681,7	9,3	16,0	7,8	36	38	61	5	8	9	S_1	S_1	S	
						+ 1,9											
Einsiedeln	6. »	684,6	682,1	680,3	-5,0	8,0	6,6	88	56	39	0	7	10	NW_1	NW_2	NW_1	
910	7. »	678,1	677,5	678,0	5,6	12,2	8,4	49	29	36	10	4	10	SE_1	S_3	SW_2	
	8. »	678,5	678,6	680,6	4,8	12,4	2,4	51	32	77	4	4	10	W_1	SW_3	SW_2	
	9. »	680,5	680,9	683,5	1,1	15,6	4,7	77	43	84	8	6	10	W_2	SE_1	SE_1	
						+ 1,8											
Uetliberg	6. »	687,4	684,6	682,7	1,2	9,4	3,4	92	89	90	1	3	5	W	W	N	≡ im Tal
874	7. »	680,7	680,0	680,0	4,4	15,8	8,6	90	79	70	10	3	3	N_1	SSW_3	SSW_3	
	8. »	681,7	681,6	681,8	9.6	17,2	7,6	71	84	69	3	3	2	S	S	N	
	9. »	683,2	683,7	685,5	4,4	11,4	5,8	87	69	97	4	5	10	N	SW	W	
						+ 1,5											
Vuadens	6. »	—	—	—	-1.0	10,1	2,0	96	62	90	3	8	2	0	0	0	
825	7. »	—	—	—	3,0	12,0	5,1	87	70	71	10	7	6	E	E	0	
	8. »	—	—	—	3,4	12,8	2,6	84	61	84	10	10	0	0	0	0	
	9. »	—	—	—	1,6	11,6	6,0	90	64	86	9	10	4	N	E_0	E_0	
						+ 1,6											
Auen	6. »	691,2	688,6	687,7	1,4	9,8	6,8	49	26	37	0	4	6	NE_0	S/S_3	S/S_3	Föhn s. $0^h 30^m$ p.
832	7. »	684,8	685,8	685,6	8,2	10,6	8,8	33	33	30	9	8	10	S/S_3	S/S_3	S/S_3	Föhn
	8. »	685,5	685,4	687,0	9,8	12,0	7,6	27	28	42	9	6	0	S/S_3	S/S_3	S/S_2	Ab. sp. F. nachgel.
	9. »	687,4	687,1	689,7	4,6	14,8	9,0	58	41	55	9	8	10	S/SE_1	S/SW_2	S_0	
						+ 1,4											
Affoltern	6. »	692,8	690,0	687,5	0,8	10,6	5,0	77	54	72	0	1	1	NE_0	NE_0	W_0	
795	7. »	685,4	684,3	685,1	3,4	13,0	6.6	81	46	59	10	7	1	NE_0	N_0	SW_0	
	8. »	686,1	686,7	687,9	4,2	12,2	5,6	65	48	71	7	6	0	SW_0	W_0	W_0	
	9. »	688,2	689,1	691,6	3,6	11,4	7,0	78	56	77	8	10	9	NE_1	NW_0	W_0	
						+ 1,3											
Brusio	6. »	—	—	—	1,9	8,0	4,4	66	45	78	6	10	10	0	S_1	W_1	
777	7. »	—	—	—	3,2	7,0	3,4	93	63	87	9	8	9	0	0	0	
	8. »	—	—	—	3,2	6,2	3,1	97	69	91	10	9	9	0	0	0	
	9. »	—	—	—	3,7	5,5	4,0	72	83	97	10	10	10	0	0	0	●

Ort	Datum 1875	Barometer 7	1	9	Temperatur 7	1	9	Feuchtigkeit 7	1	9	Bewölkung 7	1	9	Wind 7	1	9	Bemerkungen
						+ 1,0											Vorher 2 wolkenl. T.
Thusis	6. März	700,6	698,5	698,2	2,0	13,0	7,2	64	25	50	1	3	8	N/W_0	$E S_3$	—	Von 10h a. an F²
711 m	7. »	696,9	697,2	697,4	7,6	10,9	8,4	59	31	42	8	10	10	S/SE_3	E/SW_3	—	Föhn
	8.	696,9	696,7	695,2	8,2	13,3	7,2	44	35	58	10	8	0	SW, SW_2	S/SE_3	—	
	9.	697,6	697,1	698,8	4,2	12,5	9,2	76	50	44	6	8	10	SW/SW_0	SW/SW_2		
						+ 1,0											
Castasegna	6. »	705,0	703,5	702,7	1,8	8,0	3,4	47	53	90	1	9	10	E_1	SW_1	—	● 7,0 mm
700	7. »	702,6	702,8	702,0	2,1	5,5	4,3	96	83	88	10	10	10	E_0	E_0	—	● 2,7 mm
	8. »	701,6	701,8	702,0	3,3	5,3	3,4	93	86	88	10	10	1	E_0	E_0	E_0	● 4,0 mm
	9. »	702,2	703,0	704,1	3,7	5,6	3,9	76	87	93	9	10	10	SW/E_1	E_0	E_0	● 4,3 mm
			+ 1,0			+ 0,9											Vorher wolkenloser
St. Gallen	6. »	703,9	701,5	699,3	- 3,3	4,0	7,8	99	82	35	5	5	0	N	N	SW_1	Tag, abds. Föhn
679	7. »	697,2	696,5	697,0	9,9	13,1	9,4	26	25	28	10	0	1	S_2	E_2	SW	F., Dreh. d. Windf.
	8.	696,8	697,0	699,0	9,6	14,4	9,8	32	30	35	1	3	0	SW_1	S_1	SW	
	9.	699,5	699,4	702,6	2,2	16,5	9,6	93	42	54	5	5	8	W	N	SW	
						+ 0,7											
Lohn	6. »	707,7	705,8	702,9	- 2,8	0,9	3,2	100	93	84	10	10	2	NE_0	NE_0	NE_2	Neblicht
645	7. »	700,9	699,1	700,3	6,8	15,8	8,6	52	21	42	9	2	4	W/W_1	NE_0	NE_0	Alpen klar
	8. »	700,7	701,0	702,6	7,0	14,9	8,4	43	29	49	4	2	0	NE_0	S_2	—	Alpen klar
	9. »	703,4	703,2	705,7	5,6	12,6	11,0	67	46	52	5	7	3	NE_1	NE_1	NE_1	
						+ 0,7											
Frutigen	6. »	—	—	—	- 1,1	9,4	5,8	—	—	—	0	8	2	0	NE/NE_2	NE_0	
640	7. »	—	—	—	4,2	14,0	10,1	—	—	—	10	5	6	W_1	W/NE_3	SW_3	Stürmisch
	8. »				6,4	13,3	0,5				10	7	0	W_1	NW_1	0	
	9. »				4,9	12,4	4,6				7		10	0		0	
						+ 0,5											
Chur	6. »	714,3	712,3	711,7	1,1	13,5	8,1	46	25	46	1	2	3	SE_1	SW/NW_2	SE/NW_1	
603	7. »	710,6	710,8	710,8	7,7	12,5	9,5	53	31	37	5	7	7	NW_1	NW_2	NW_1	
	8. »	710,8	710,4	710,8	8,7	14,1	7,1	48	33	55	7	5	1	NW_1	NW_1	NW_1	
	9. »	711,3	711,2	712,5	7,3	15,1	10,7	52	38	59	5	7	7	NW_1	NW_1	SW/SE_0	
						+ 0,5											
Reichenau	6. »				1,2	13,2	6,2				1	4	8	SW_2	S_2		
597	7. »				5,0	13,4	6,2				9	9	10	SW_2	S_3		
	8. »				6,1	12,6	6,4				9	7	2	SW_2	S_2		
	9. »				5,5	13,8	9,4				9	8	10	SW	S_1		
			+ 0,7			+ 0,5											
Luzern	6. »	710,5	707,4	705,6	0,6	9,6	8,0	86	63	45	0	5	5	NW_0	SE_0	SW_0	
(Sonnenberg)	7. »	703,5	701,7	702,7	5,4	15,8	11,8	68	25	30	10	9	8	NW_0	SE_2	SE_2	Nm. u. Achts. oft SE_4
590	8. »	703,4	703,9	705,5	8,2	15,0	7,4	48	33	58	8	8	0	NE_0	SE_0	SE_0	
	9. »	705,9	706,3	708,8	5,4	11,8	9,0	68	52	66	9	8	8	NW_0	NW_0	NW_0	
			+ 0,9			+ 0,4											
Bern	6. »	713,2	709,9	707,6	- 1,4	11,1	6,6	92	48	72					SE		
574	7. »	705,2	703,9	704,5	3,8	12,1	9,4	83	48	44					N		
	8. »	705,7	706,3	707,6	2,5	13,3	6,2	81	35	68					W		
	9. »	708,2	708,6	711,1	0,9	10,0	6,9	81	49	75					SE		

Ort	Datum	Barometer			Temperatur			Feuchtigkeit			Bewölkung			Wind			Bemerkungen
	1872	7	1	9	7	1	9	7	1	9	7	1	9	7	1	9	
						+ 0,4											
Interlaken	6. März	714,0	710,7	708,0	1,6	10,0	7,6	69	55	59	0	0	8	NE_4	SW_3	E_0	Föhn
571 m	7. »	705,3	704,4	705,1	6,8	15,4	11,4	74	33	33	10	10	7	W_2	NE_2	E_0	Föhn
	8. »	706,4	706,2	708,5	11,0	14,6	9,0	37	37	61	10	10	6	E_0	NE_2	S_0	Föhn
	9. »	708,4	709,6	712,5	6,4	13,6	7,8	73	50	81	0	10	8	W_3	SW_4	S_2	
						+ 0,2											
Burgdorf	6. »	—	—	—	- 1,0	10,0	6,2	—	—	—	1	1	9	E/SW	E/S	SW_2	
550	7. »	—	—	—	4,8	12,8	6,8	—	—	—	10	4	7	W/SW	W/W	SW	Föhn
	8. »	—	—	—	5,2	13,4	4,6	—	—	—	6	1	3	W/S	W/S	W/S	Föhn
	9. »	—	—	—	1,0	12,8	6,3	—	—	—	4	5	1	W/S	W/S	S	
						+ 0,2					2 helle T. vorh.						
Schwyz	6. »	714,4	711,3	709,7	0,5	9,3	9,8	—	57	33	0	7	5	N_1	NE_0	—	Abds. Föhn
558	7. »	706,9	706,7	707,3	10,5	13,9	12,3	35	25	24	10	7	7	S_3	S_4	S_4	Föhn
	8. »	707,5	707,5	709,4	10,0	13,8	10,8	38	32	37	8	4	0	S_2	S_2	—	Föhn
	9. »	709,9	709,8	712,7	6,1	16,8	9,3	84	52	65	9	9	9	NE_0	SW_1	—	
						+ 0,2					2 wolkenl. T. v.						
Marschlins	6. »	716,2	713,7	713,8	1,6	13,6	8,1	59	31	51	0	1	5	NE_0	S_{2-3}	S_{2-3}	
545	7. »	712,1	712,2	712,5	8,9	14,3	10,0	49	35	43	7	7	7	S_{2-3}	S_{2-3}	S_{2-3}	
	8. »	712,3	711,9	712,9	9,1	12,5	10,7	48	42	45	7	6	0	S_{1-2}	S_{1-2}	S_1	
	9. »	712,8	712,4	714,3	6,2	15,0	11,2	61	47	60	6	7	8	NW_0	S_{2-3}	SW_0	
						+ 0,2					2 wolkenl. T. v.						
Sion	6. »	716,8	713,6	713,2	2,5	13,6	8,0	70	44	58	0	6	0	E_0	E_{2-3}	E_2	Föhn v. Mittag an
544	7. »	711,9	710,5	713,1	6,9	12,8	9,3	63	46	61	9	9	0	E_1	S/NE_{3-4}	E_2	F'sturm von Mittag
	8. »	711,6	711,3	712,5	9,0	13,5	7,3	55	46	66	9	10	0	E_1	E_2	E_1	bis Abend 8^h
	9. »	712,2	712,3	715,4	8,0	15,6	9,8	62	47	66	10	5	5	NE_0	NE_2	0	
						+ 0,2					2 wolkenl. T. v.						
Ragaz	6. »	716,7	713,7	713,0	- 2,0	13,6	8,2	89	41	50	1	1	1	NNW	SE/SE	SE_1	
541	7. »	711,1	711,7	711,7	9,0	13,2	11,2	57	44	46	2	4	3	SW/SE_4	SE_4	SE_4	Stürmisch
	8. »	712,0	711,7	712,5	9,2	13,6	10,8	50	45	49	4	4	1	S/SE_4	S/SE_4	SE_4	Stürmisch
	9. »	712,4	712,7	713,7	9,2	15,8	13,4	57	47	52	2	2	2	S/SE_4	SW/SE	S/SE	
						0,0											
Sursee	6. »	718,5	715,1	712,7	- 3,3	10,2	2,0	98	58	96	0	0	2	NW	E	NW	
502	7. »	710,7	708,7	709,0	2,4	15,9	5,1	92	40	73	10	5	2	W/NW	W/SE	NW	
	8. »	711,0	711,1	713,4	- 0,2	14,0	3,2	92	44	75	10	9	0	NW/NW	NW/NW	NW	
	9. »	713,6	713,7	716,5	- 0,8	13,5	4,2	93	54	92	10	10	5	W/W	SW/NW	NW	
						0,0					2 klare T. vorh.						
Sargans	6. »	—	—	—	- 1,0	5,0	10,0	—	—	—	10	3	3	E/E_1	W/W_2	W/S_4	
501	7. »	—	—	—	9,0	14,0	11,4	—	—	—	6	5	6	W/W_4	W/SE_4	W/S_4	Stürmisch
	8. »	—	—	—	10,0	13,4	10,8	—	—	—	4	3	0	W/SE_4	W/SE_4	E/W_4	Stürmisch
	9. »	—	—	—	8,0	17,0	14,0	—	—	—	4	5	4	W/E_3	W/S_3	W/W_1	Stürmisch
			— 0,2			0,0					2 wolkenl. T. v.						
Martigny	6. »	721,1	717,1	717,0	0,7	14,1	9,6	75	27	35	0	7	10	SE_0	SE_3	SE_3	
498	7. »	715,0	712,4	714,5	9,1	13,2	10,2	40	30	47	10	10	10	SE_4	SE_4	SE_4	
	8. »	715,6	714,6	716,9	8,8	16,2	9,7	91	27	44	10	3	0	SE_3	SE_4	SE_2	
	9. »	716,4	716,3	719,6	6,7	17,0	10,8	75	32	57	7	5	10	SE_0	SE_2	SE_2	

Ort	Datum 1872	Barometer 7	1	9	Temperatur 7	1	9	Feuchtigkeit 7	1	9	Bewölkung 7	1	9	Wind 7	1	9	Bemerkungen
			+ 0,7			0,0					Klar. T. vorh.						
Neuchâtel	6. März	719,8	716,8	714,1	− 1,0	8,9	6,7	96	57	61	0	2	5	NE_0	NE_1	0	
488 m	7. »	711,7	710,4	710,9	4,2	13,5	9,0	90	46	57	10	5	10	E_0	SE_0	0	Alpen sichtbar
	8. »	712,4	713,1	714,1	3,6	11,8	8,6	81	51	53	10	9	0	NE_0	NE_0	0	
	9. »	715,2	715,7	717,7	2,8	9,2	8,2	90	62	63	7	10	5	NE_0	NE_1	0	
						0,1											
Muri	6. »	721,7	718,6	716,2	− 0,9	8,5	4,5	98	71	81	0	3	5	NE	NE/NE	NE	
483	7. »	714,2	712,2	712,9	3,1	15,7	8,7	87	28	51	9	7	10	SE/N_1	SE/SE_2	SE_1	
	8. »	714,1	714,3	715,8	2,3	14,5	8,4	76	47	59	8	5	0	SW/SE_1	W/NW	N	
	9. »	716,6	716,9	719,3	5,1	11,9	7,3	64	51	75	8	8	10	S/N_1	S/NW_1	NW	
						0,1											
Zürich	6. »	721,8	719,0	716,4	− 0,8	7,3	3,5	93	73	92	0	1	3	0	NW_1	0	
480	7. »	714,3	712,9	713,5	4,6	16,1	11,6	71	26	38	10	2	5	0	SE_{2-3}	$SE_{1\ 2}$	Alp. 1^h F^2, 9^h F.
	8. »	714,2	714,4	716,4	3,9	14,4	9,4	81	47	57	5	3	0	0	NW	NW	Klar
	9. »	717,1	716,9	719,7	3,1	13,1	8,0	85	48	83	8	8	5	N	NW_1	NW	
						0,1											
Altstätten	6. »	721,8	719,3	716,8	− 1,0	2,5	9,4	100	99	35	10	10	0	W_0	W_0	0	
478	7. »	715,0	714,5	714,8	11,0	13,5	11,5	31	24	68	6	5	3	S_3	S_3	S_3	
	8. »	714,4	714,2	716,1	11,8	16,0	12,4	68	24	31	5	4	0	SW_2	S_1	SW_0	
	9. »	717,0	716,4	718,8	6,9	17,6	10,8	59	36	61	2	7	10	SW_0	SE_0	0	
						0,1											
Solothurn	6 »	723,6	713,1	717,3	− 1,0	8,5	4,0	100	60	100	0	0	5	N_0	W_1	W_0	
474	7. »	714,5	714,3	714,3	6,0	13,0	7,5	71	62	66	10	3	3	NE_3	E_0	N_0	
	8. »	714,3	714,1	716,2	3,0	12,0	6,0	83	66	71	8	5	0	NE_0	E_0	N_0	
	9. »	716,8	717,3	717,4	1,0	10,5	7,0	100	74	85	7	10	10	N_0	E_0	N_0	
						0,1											
Murten	6. »	722,5	719,2	716,7	0,0	8,2	6,5	91	60	75	0	2	3	SE_0	N W_0	NE, W_0	Abendrot
468	7. »	714,1	712,8	713,5	5,0	11,8	8,0	84	48	69	10	4	10	W_1	NW_0	SW W_0	● i. d. Nacht 0,4 mm
	8. »	715,4	715,5	716,9	3,2	11,9	6,2	88	53	71	7	8	1	SW/SW_0	W_0	NW_0	
	9. »	717,6	718,2	720,5	2,0	9,2	6,8	89	62	84	6	10	4	S/NW_0	W_0	NE_0	
			+ 0,6			0,2											
Glarus	6. »	721,7	718,6	717,1	− 1,8	9,8	10,7	92	46	30	2	5	4	NW_0	NW_1	SE_4	⌴ 2½h F. i. Tal
466	7. »	713,9	714,1	714,7	11,8	15,9	12,5	30	25	25	9	7	6	SE_3	SE/SE_4	SSE_4	Föhn[2]
	8. »	714,8	714,3	716,7	13,1	17,3	8,6	28	26	56	6	7	0	SSE_2	SE/SSE_4	S_0	Föhn bis Ab.
	9. »	717,4	716,1	719,6	3,5	17,8	8,8	77	32	75	8	7	9	SSE_0	SE/WNW_0	NNW_0	Föhngewölk i. Süd
						0,2											
Rorschach	6. »	723,9	719,2	718,2	1,3	2,0	8,5	93	91	43	10	10	10	SW	NE	S_5	≡
455	7. »	716,8	714,7	714,4	10,7	13,5	11,8	34	45	28	8	4	0	$S_{4\ 5}$	S_5	S_5	Schichtenwolken
	8. »	716,0	716,2	717,6	4,5	10,5	11,8	70	50	38	8	8	0	S_5	NE	S_2	Federwolken
	9. »	719,0	719,0	721,1	4,1	10,8	9,5	75	54	69	10	10	10	NE	NE	NW	Streifenwolken
						0,2					3 T. vorh. heit.						
Altorf	6. »	724,3	721,0	719,9	0,0	13,6	10,4	88	32	38	0	4	6	—	S_1	S_2	
454	7.	717,1	717,8	718,3	10,8	14,7	11,8	34	30	35	10	5	10	S_2	S_2	S_2	
	8. »	718,9	718,0	718,8	11,5	14,8	12,9	34	30	34	10	6	0	S_2	S_2	S_2	
	9. »	718,7	719,4	721,7	14,4	17,6	14,2	26	29	41	8	6	10	S_1	S_1		

Ort	Datum 1872	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7 1 9
						0,3											
Winterthur	6. März	725,0	722,6	719,7	− 2,0	5,5	0,0	100	62	96	10	5	5	NE_1	NE_1	NE_0	-
441 m	7. »	717,7	715,8	716,7	0,0	17,0	4,6	98	59	75	10	1	5	NE_0	SW_0	SW_0	=
	8. »	717,4	717,1	719,1	0,0	17,8	6,5	94	60	76	4	3	3	E_0	E_0	E_0	
	9. »	720,3	720,1	722,1	− 0,4	14,0	5,5	96	66	74	6	6	6	E_0	E_1	E_0	10. März ●
						0,3											
Gersau	6. »	723,9	721,0	719,0	1,0	6,1	9,7	80	79	38	0	2	2	W_0	W_0	SE_2	Ab. leicht. F.
440	7. »	715,7	715,2	716,4	11,4	13,5	11,8	34	28	31	7	2	2	SE_4	SE_4	SE_4	F² F² F²
	8. »	716,5	716,6	718,3	11,8	13,8	12,2	32	14	41	6	3	0	SE_4	SE_3	0	F² F²
	9. »	719,1	719,0	721,9	5,0	11,8	8,5	75	72	77	5	2	6	SW_0	SW_0	0	
						0,3											
Bex	6. »	725,6	722,4	721,0	− 1,1	14,2	10,6	87	50	33	0	7	1			S_4	F. v. 5h p. an
437	7. »	718,2	717,1	717,3	12,5	17,2	13,8	31	31	31	7	6	7	S_4	S_4	S_4	Föhn
	8. »	719,0	719,0	720,0	11,9	17,6	12,5	35	30	47	10	8	0	S S_4	S_3	S_4	Föhn
	9. »	720,2		724,0	9,8	18,9	9,7	63		64	8	6	9	SW 0			
						0,3					2 wolkenl.T.v.						
Linthkolonie	6. »	726,5	723,2	721,0	− 2,0	10,2	10,4	96	40	35	2	4	5	SSE_0	NNW_0	ESE_2	v. 9h p. Föhn
434	7. »	718,0	717,7	718,5	10,6	14,0	11,8	37	28	29	9	5	4	$ENE_{1\ 4}$	ENE_4	ENE_4	Föhn
	8. »	719,3	718,6	721,2	10,6	14,2	11,6	35	30	38	7	8	0	$ENE_{1\ 3}$	$ENE_{1\ 4}$	$ENE_{2\ 3}$	
	9. »	721,7	721,8	724,1	7,2	14,8	10,2	56	16	63	9	8	9	SE_1	WSW_1	NNW_1	
						− 0,3					1 heit.T.vorh.						
Porrentruy	6. »	722,9	719,6	717,0	− 2,3	15,0	5,6	80	56	91	0	0	10	NE	S	NE	
430	7. »	716,6	713,5	715,4	5,0	16,1	3,2	92	61	92	10	0	8	NE	NE	NE	
	8.	715,7	718,0	718,4	3,4	17,3	3,6	87	40	93	10	4	0	NE	W	NE	
	9. »	719,3	721,3	722,3	0,5	15,4	4,8	92	59	92	2	1	10	W	NE	NE	
						0,3											
Kreuzlingen	6. »	726,7	724,1	721,2	0,4	3,7	1,0	97	86	96	10	0	1	0	E_1	0	⊔
431	7. »	719,5	717,5	717,4	0,8	15,6	7,4	82	30	58	9	0	1	N_1	SE_2	SE_1	⊔
	8. »	718,6	718,5	720,1	2,8	14,1	8,8	88	38	54	3	2	0	SE_1	0	0	⊔
	9. »	721,6	721,4	722,2	2,2	12,4	8,8	85	67	81	2	9	10	NW_1	0	0	
						− 0,4											
Frauenfeld	6. »	727,9	725,7	722,3	− 0,7	4,4	1,2	90	81	89	10	8		SE_0	SE_0		Nachm. hell
422	7. »	720,9	718,9	719,1	0,5	13,0	5,4	88	48	62	10	2		NW_0	W_0		
	8. »	720,1	720,5	721,9	− 0,6	12,8	5,2	90	41	74	3	3		SW_0	NW_0		
	9. »	723,2	722,9	724,6	0,4	10,8	5,8	88	57	84	5	10		SW_0	W_0		
						0,4											
Genève	6. »	727,6	723,4	721,2	− 1,4	10,2	6,6	90	49	61				SSW_1	NNW_1	NW_1	
405	7. »	719,0	717,2	718,2	5,8	9,6	5,5	82	63	76				W_1	N_1	S_1	
	8. »	720,2	720,5	721,6	3,0	12,1	4,9	81	58	75				SSW_1	ENE_1	SSW_1	
	9. »	722,8	723,3	725,6	2,4	11,1	8,0	81	58	73				S_1	N_1	SW_1	
						− 0,5											
Olten	6.			—	− 1,0	9,9	5,6				0	0	1	SE_0	SE_1	SE_0	
395	7. »				4,1	16,0	5,8				10		4	E_0		E_0	
	8.				2,5	14,8	9,4				7	5	4	W_0	W_0	W_0	
	9. »				2,1	12,7	7,8				5	9	10	W_0	W_0	W_0	

Ort	Datum	Barometer			Temperatur			Feuchtigkeit			Bewölkung			Wind			Bemerkungen
	1872	7	1	9	7	1	9	7	1	9	7	1	9	7	1	9	7 1 9
						0,4											
Aarau	6. März	727,6	724,4	722,0	− 2,8	10,2	3,0	100	56	91	0	0	2	SE	SE$_2$	SE$_0$	
406 m	7. »	719,6	717,6	718,9	2,9	17,4	4,8	91	27	74	7	2	1	SE	SE$_2$	SE$_1$	
	8. »	719,8	720,0	721,7	0,6	17,1	5,2	94	37	77	5	2	0	SE$_0$	SW$_1$	W$_1$	
	9. »	722,5	722,8	725,0	− 0,7	12,8	6,5	96	51	83	4	5	0	SW	SE$_1$	SE$_2$	
						− 0,6											
Montreux	6. »	—	—	—	0,5	11,4	10,1	—	—	—	0	5	0	W/SE	NE/SE	W/W	
(Vernez)	7. »	—	—	—	11,0	15,4	12,8	—	—	—	10	6	0	S/S$_4$	S/SE	S/SE	
385	8. »	—	—	—	11,1	13,2	8,6	—	—	—	10	5	0	S/SE	W/W$_2$	W/W	
	9. »	—	—	—	6,1	11,0	8,4	—	—	—	7	10	2	SW/NW	SW/NW	SW/NW	
						− 1,0					1 Tag heiter						
Basel	6. »	739,5	736,0	733,6	− 0,3	9,5	6,5	91	59	74	0	0	7	NE$_1$	NE$_1$	—	
278	7. »	731,9	729,7	730,1	5,4	12,3	7,6	80	53	87	10	5	10	E$_1$	W/N$_1$	—	
	8. »	731,1	731,6	733,6	4,7	14,9	7,1	62	29	72	8	6	0	S$_1$	S$_1$	—	
	9. »	734,6	734,5	736,6	1,7	11,9	7,1	79	57	80	6	5	8	W$_1$	SW$_1$	—	
						− 1,0											
Lugano	6. »	742,4	740,9	740,9	1,7	12,5	4,9	97	90	93	10	10	10	NW/SE	SW/SW	SE	— — 3,6 mm
275	7. »	740,1	740,3	739,6	3,1	5,7	5,1	96	83	97	10	10	10	W/W	SE/W	NW	15,6 4,1 0,3 mm
	8. »	739,1	739,0	738,6	5,2	9,1	6,3	95	79	84	10	10	10	W/W	N/W	W	● 1,0 0,3 mm —
	9. »	739,5	740,3	741,2	5,1	7,7	6,5	96	87	93	10	10	10	W/W	NW/NW	SW/NW	— 2,1 1,0 mm
						− 1,0					1 Tag heiter						
St. Vittore	6. »	742,7	740,8	740,8	1,2	10,6	5,5	81	54	93	1	8	10	NE/SW	SW	SW$_1$	Abends ●
268	7. »	740,3	741,0	740,0	2,4	6,5	3,7	96	83	97	10	10	10	S$_0$	S$_0$	—	● 14,3 mm
	8. »	739,4	739,2	739,3	3,7	8,6	5,5	99	88	94	10	9	9	—	SW/S$_0$	—	● 1,2 mm
	9. »	739,5	740,8	741,9	4,3	7,1	5,3	93	94	97	10	10	10	—	S$_0$	—	● 1,5 mm
						− 1,3					1 T. wolkenl.						
Bellinzona	6. »	—	—	—	8,6	9,8	6,4	—	—	—	2	7	10	NE/E	E	S/SE	● 0,5 mm i. d. Ncht.
231	7. »	—	—	—	5,4	8,0	6,0	—	—	—	10	10	10	S/SE	S/E	S/SE	● 0,5 mm
	8. »	—	—	—	5,8	9,4	7,0	—	—	—	10	10	10	S/SE	S/SE	S/SE	● 0,8 mm
	9. »	—	—	—	7,2	8,4	6,0	—	—	—	10	10	10	S/SE	S/SE	S/SE	● 1,5 mm
	1885					+ 7,7											
Säntis	30. Jan.	561,5	560,5	558,6	− 2,4	0,1	− 2,1	42	55	65	1	2	7	S$_1$	SW$_1$	SW$_2$	Cirri ≡ Tal
2467	31. »	556,1	557,1	558,4	− 3,4	− 2,9	− 7,3	75	71	77	8	7	4	SW$_4$	SSW$_1$	SW$_1$	Ebene hell
	1. Feb.	559,3	560,1	562,4	− 3,2	− 1,8	− 5,0	61	79	95	9	7	1	WSW$_1$	SW$_1$	S$_0$	✱
	2. »	563,7	561,8	558,7	− 5,0	− 0,3	− 2,4	78	49	70	1	5	9	SW$_1$	SW$_3$	SSW$_4$	Sturm
	3. »	553,2	552,9	553,2	− 2,3	− 1,3	− 9,3	74	79	100	7	9	10	SW$_4$	SE$_2$	W$_3$	St., 3,5 mm ✱
						+ 7,7											
St. Bernhard	30. Jan.	561,9	560,9	559,3	− 7,0	− 4,8	− 8,2	—	—	—	1	7	10	SW$_1$	SW$_2$	SW$_2$	Stürmisch ✱
2478	31. »	557,5	557,2	559,5	− 7,3	− 7,2	− 9,3	—	—	—	10	10	10	SW$_2$	SW$_2$	SW$_2$	✱ Stürmisch
	1. Feb.	560,3	561,0	563,1	− 8,8	− 6,4	− 5,2	—	—	—	9	10	10	SW$_2$	SW$_1$	SW$_1$	✱ 17,5 mm
	2. »	563,8	562,6	560,3	− 6,4	− 5,1	− 6,5	—	—	—	7	7	10	NE$_1$	SW$_2$	SW$_2$	Stürmisch
	3. »	554,1	552,5	553,7	− 7,0	− 5,7	− 9,5	—	—	—	10	10	10	SW$_2$	SW$_1$	NE	✱ 25,6 mm

Ort	Datum 1885	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7	Bemerkungen 1	Bemerkungen 9
						+6,8													
Julier	30. Jan.				−6,0	1,0	−4,0				0	0	0	E_0	E_0	E_0			
2237 m	31.				−6,0	−3,4	−6,0				10	10	10	NE_1	NW_1	S/E_0	6,0 mm *		*
	1. Feb.				−6,0	−1,0	−2,0				10	10	10	NW_1	NW_2	NW_0			
	2.				−6,0	−3,0	−1,1				0	4	10	E_1	SE_1	SE_1		13,5 mm	
	3.				−3,0	−1,0	−5,0				10	10	10	SE_2	SE_2	SE_1	*	*	*
						+6,3													
St. Gotthard	30. Jan.	588,3	588,2	586,8	−6,3	−2,3	−7,9				0	0	10	S_1	S_2	S_3			
2100	31.	585,2	584,8	587,4	−6,1	−6,1	−6,2				10	10	10	S_2	S_2	S_1	2,4 mm		—
	1. Feb.	588,1	587,4	588,8	−6,4	−6,2	−5,8				10	10	10	S_1	S_1	S_3	—	5,6 mm	—
	2.	590,7	590,3	588,3	−6,4	−3,7	−7,7				0	0	10	N_0	S_2	S_3		5,5 mm	*
	3.	582,2	579,2	579,8	−6,4	−4,1	−9,2				10	10	10	S_2	S_0	N_2	*	*	*
																		9,3 mm	
						+6,2													
Bernhardin	30. Jan.	591,6	591,3	590,2	−5,2	−3,2	−4,8				2	4	8	S_1	S_2	S_2			*
2070	31.	587,3	587,5	589,0	−5,4	−4,0	−6,8				10	10	10	S_2	S_2	S_2	*	* 22,5	*
	1. Feb.	590,3	590,9	592,3	−5,6	−4,0	−4,6				10	10	8	S_2	S_2	S_2	* 27,5 mm		
	2.	593,3	593,4	590,3	−6,0	−2,4	−3,2				2	10	10	S_2	S_2	S_3		*	*
	3.	584,9	581,8	581,8	−2,6	−1,0	−4,2				10	10	10	S_2	S_2	S_1	*	*	*
						+5,1													
Sils-Maria	30. Jan.	611,7	610,7	610,3	−11,9	−1,2	−4,0	91	71	93	0	0	6	W_0	S_1	S_1			
1811	31.	607,5	607,8	609,4	−3,5	−2,0	−4,1	91	86	94	10	10	10	S_1	SW_1	SW_1	3,3 mm *		
	1. Feb.	610,7	611,2	612,4	−6,7	−1,8	−1,9	100	91	95	10	10	10	E_0	S_1	S_0			
	2.	613,7	613,6	611,0	−8,0	0,2	−0,4	100	78	84	0	4	10	N_0	N_0	SW_2			
	3.	605,2	602,2	601,7	−1,5	1,0	−2,1	96	89	96	10	10	10	N_0	E_0	E_0	28,5 mm *		*
						+5,0													
Rigi-Kulm	30. Jan.	610,2	608,5	606,9	1,5	3,4	2,6	25	30	45	3	5	9	SE_2	SE_3	SE_2	Stürmisch		
1787	31.	604,2	606,1	607,9	1,4	1,3	−1,7	50	52	52	9	8	2	SW_1	S_3	S_1	Vorm. s. stürmisch		
	1. Feb.	608,5	609,3	612,4	1,4	4,0	−0,8	52	55	75	9	9	1	NW_2	SW_2	SW_1	[illegible]		
	2.	613,6	610,2	607,0	1,8	5,2	3,6	45	30	45	2	6	8	S_1	SW_2	S_1			
	3.	602,1	602,3	604,6	2,6	−2,1	−5,7	55	100	100	10	10	10	SE_1	NW_1	NW_2		1,1 mm	*
						+4,7		Haarhygr.											
Bevers	30. Jan.	620,1	618,8	618,2	−14,6	0,2	−3,9	80	57	85	0	0	3	SW_0	SW_2	W_1			
1711	31.	615,0	615,7	617,2	−2,5	1,1	−3,7	79	67	85	7	8	4	SW SW_2	W_1	SW W_1		*	0,3 mm
	1. Feb.	619,1	619,1	620,6	−5,8	0,6	−1,7	86	80	93	10	10	9	SW_0	SW_0	SW			
	2.	622,0	621,6	618,6	−7,0	0,9	−2,4	97	63	85	10	3	8	SW_0	SW_0	SW_0		13,9 mm	
	3.	613,3	610,2	609,5	1,0	0,6	−1,5	85	92	100	10	10	10	SW_0	NE_3	NE_0		*	*
						+4,4													
Grächen	30. Jan.	624,0	623,5	622,8	−0,5	5,2	−1,5				0	7	10	SW_0	SW SW_0	SW_0			
1632	31.	620,5	621,0	622,5	−3,0	1,2	−3,5				10	10	10	SW_0	SW SW_0	SW_0			
	1. Feb.	623,2	624,0	625,6	−2,5	4,0	3,5				10	10	10	SW_0	SW^0	SW_0	[illegible]		
	2.	626,7	625,6	623,4	2,1	3,6	2,1				10	10	10	SW_0	SW_0	SW_0			
	3.	617,5	615,6	616,5	−2,4	−1,0	−4,1				10	10	10	SW_0	SW_0	SW_0		*	

Ort	Datum 1885	Barometer 7	1	9	Temperatur 7	1	9	Feuchtigkeit 7	1	9	Bewölkung 7	1	9	Wind 7	1	9	Bemerkungen 7	1	9
				+ 0,6		+ 4,2													
Davos-Platz	30. Jan.	628,7	627,4	626,8	– 7,3	7,7	0,3	88	39	70	1	1	1	NE_0	W_1	W_1			
1557 m	31. »	624,3	624,5	627,2	2,1	6,1	– 2,3	63	55	88	6	5	3	W_0	W_1	W_0			
	1. Feb.	628,6	628,3	630,9	0,5	4,1	– 3,1	70	74	100	8	10	1	W_0	SW_1	SW_0			
	2. »	632,3	630,5	626,9	– 6,1	5,9	3,9	99	37	58	2	2	4	N_0	N_0	N_0			
	3. »	621,6	619,0	620,6	5,3	7,2	– 1,7	60	62	99	8	8	10	W_2	SW_0	NE_1	—	—	*
						+ 3,7													
Wiesen	30. Jan.	639,3	638,0	637,5	– 0,3	8,7	0,5	55	38	74	0	0	5	NW_1	SW_1	NW_0			
1454	31. »	634,4	635,2	637,2	1,4	5,8	0,0	66	53	72	4	3	1	NW_1	SW_2	NW_1			
	1. Feb.	638,5	638,5	639,8	– 1,0	4,2	1,6	77	70	75	6	7	2	N_0	NW_0	NW_0			
	2. »	642,2	641,2	638,2	– 2,0	6,5	5,2	91	61	58	0	3	7	N_0	NW_0	SW_1			
	3. »	631,8	629,2	631,0	5,5	6,4	– 0,4	62	70	100	4	10	10	SW_2	SW_1	NW_1	—	10 mm	*
			+ 0,3			+ 3,7													
Andermatt	30. Jan.	638,5	638,1	637,0	0,5	2,1	0,0	45	55	60	0	0	2	SE	$SE_{1\ 2}$	SE_{2-3}			
1448	31. »	635,1	635,0	636,0	0,2	1,0	– 1,0	65	59	67	10	8	10	W_{2-3}	W	$W_{1\ 2}$			
	1. Feb.	636,1	637,3	638,0	– 1,0	2,0	1,1	70	50	60	7	8	10	$W_{2\ 3}$	$W_{2\ 3}$	SW			
	2. »	640,0	639,9	636,9	– 2,5	3,1	2,0	64	50	67	0	1	10	E_1	W_{1-2}	W_{3-4}			
	3. »	631,8	628,7	628,7	0,0	1,1	– 2,1	95	84	85	10	10	10	$W_{3\ 4}$	SW	NE	*		* 9,5 mm
			+ 0,5			+ 3,6													
Leukerbad	30. Jan.	641,5	639,4	638,7	0,2	5,2	1,5	89	64	59	0	3	0	NE	E	E			
1415	31. »	636,4	637,0	639,9	2,4	4,8	– 1,4	63	45	69	4	4	6	SW	SW	SW			
	1. Feb.	641,9	641,9	641,6	0,0	3,0	– 0,4	49	38	78	8	10	0	SW	S	E			
	2. »	644,7	642,1	639,1	– 0,4	5,8	5,7	100	52	42	0	8	8	SW	SW	NE_2	* 5,8 mm		
	3. »	634,1	633,3	634,5	4,8	3,4	– 1,0	44	70	100	10	10	10	SW_2	SW	SW			
			– 0,6			+ 3,4													
Platta (Medels)	30. Jan.	644,8	644,0	643,2	3,4	3,4	2,0	38	49	55	0	5	9	SW_3	SW_4	SW_4			
1379	31. »	640,8	640,9	643,6	1,6	1,4	0,8	55	68	61	9	9	8	SW_4	SW_4	SW_4	—	*	-
	1. Feb.	644,3	644,5	646,3	1,2	3,0	2,6	55	56	62	9	9	5	SW_4	SW_4	SW_4			
	2. »	647,6	646,7	642,0	– 2,0	4,4	4,6	74	51	65	0	7	9	SW_1	SW_4	SW_4	—	—	●
	3. »	636,9	635,3	636,6	3,4	0,6	– 0,8	69	96	100	10	10	10	SW_4	SW	SW	● 7,1 mm	●	●
			+ 0,6			+ 3,3													
Reckingen	30. Jan.	647,0	645,6	645,9	– 9,3	– 3,9	– 2,5	95	98	94	0	4	5	SE_0	SE_0	SE_0			
1313	31. »	643,4	643,4	645,9	2,0	3,5	– 3,0	99	84	96	9	6	5	NW_2	SW_1	SE_0			
	1. Feb.	646,2	646,4	648,6	– 3,1	3,0	– 4,4	92	84	95	9	8	0	SE_0	SE_0	SE_0			
	2. »	650,3	648,7	646,0	– 7,0	4,3	– 6,4	95	84	77	0	8	10	SE_0	NE	SE_2			
	3. »	640,9	637,8	639,6	0,2	0,9	– 1,5	97	99	94	10	10	10	SE_0	W_0	SE_0	*	*	
						+ 3,0													
Braggio	30. Jan.	—	—	—	– 3,2	4,8	0,0	70	43	99	0	2	10	SW_0	SW_0	SE_0			
1313	31. »	—	—	—	0,8	0,0	– 2,0	91	91	92	10	10	10	W_0	W_0	W_0	*		* 5,8 mm
	1. Feb.	—	—	—	– 1,0	0,7	– 0,7	88	88	96	10	10	10	SW_0	W_0	W_0	*		*
	2. »	—	—	—	– 2,0	4,6	2,0	92	87	87	3	6	10	W_0	SW_0	SE_0	—	4,5 mm	*
	3. »	—	—	—	0,4	0,4	– 0,3	90	92	99	10	10	10	SW_0	SW_0	SE_0	*	* 16,4	*

Ort	Datum 1885	Barometer 7	1	9	Temperatur 7	1	9	Feuchtigkeit 7	1	9	Bewölkung 7	1	9	Wind 7	1	9	Bemerkungen 7	1	9
						+ 2,9													
Gäbris	30. Jan.	652,7	652,0	648,0	3,2	9,6	5,3	12	8	19	2	2	9	S_2	S_2	S_4	In der Nacht Sturm		
1253 m	31. »	646,3	648,3	650,5	6,2	8,5	2,8	18	15	23	8	10	4	S_4	S_1	S_2			
	1. Feb.	651,4	651,4	654,7	3,6	8,2	3,6	22	20	39	9	7	3	S_1	S_2	W_1			
	2. »	654,4	652,3	649,3	5,0	8,8	6,8	18	6	13	1	3	9	S_1	S_4	S_4	Orkanartiger Sturm		
	3. »	644,5	643,6	646,7	7,2	3,6	- 2,0	16	50	100	8	9	10	S_2	W_3	W_3	—	—	* 2,2
			+ 0,9			+ 2,6													
Airolo	30. Jan.	664,5	663,3	660,2	- 3,4	0,0	- 2,0	82	85	84	0	0	0	NW	NW	NW			
1154	31.	660,0	661,0	661,9	- 0,4	- 0,4	- 1,2	92	85	84	10	10	10	Wolkenzug NW	NW	NW	[illegible]	[illegible]	[illegible] 1,1
	1. Feb.	663,2	663,5	664,2	- 1,8	1,4	- 3,0	92	66	83	10	10	6	NW/NE_0	NW/NE_0	NW/NE_0			
	2. »	664,9	664,0	662,5	- 5,4	1,4	0,2	78	82	85	1	10	10	NW/NE_0	NW/NE_0	NW/NE_0	—	—	* 4,0
	3. »	655,8	653,1	653,1	- 1,0	1,0	- 0,2	86	79	85	10	10	10	NW/NE_0	NW/NE_0	NW/NW_0	*	*	* 2,8
						+ 2,5													
Beatenberg	30. Jan.	659,9	658,6	655,7	3,2	8,2	4,9	46	48	51	0	10	10	E_1	S_0	W_0			
1150	31. »	654,9	656,5	658,9	3,7	7,4	0,6	60	58	67	8	10	0	S_1	SE_1	SE_1			
	1. Feb.	659,0	659,7	662,6	4,9	8,4	3,6	59	58	72	8	10	2	NE_1	SW_1	NW_1	—	●	1,1 mm
	2. »	664,1	660,1	655,7	4,4	9,8	8,4	59	53	46	10	10	10	NE_1	SW_1	SW_1			
	3. »	651,7	651,7	656,5	5,6	2,8	- 1,0	59	87	100	10	10	10	S_1	N_1	N_1	—	—	*
			+ 0,7			+ 2,4													
Chaumont	30. Jan.	662,3	661,3	660,9	0,9	6,5	1,7	94	93	99	3	6	6	SW_1	SW_1	SW_1			
1128	31. »	658,7	658,4	659,1	1,5	6,7	2,9	99	96	99	6	6	4	SW_1	SW_1	SW_1			
	1. Feb.	661,1	662,3	664,9	2,5	4,9	2,9	100	100	100	10	10	10	W_3	W_3	W_2	●	9,3 mm	—
	2. »	665,1	661,9	653,7	3,5	6,1	2,5	99	99	100	3	6	10	SW_1	SW_1	SW_1			
	3. »	654,2	655,5	658,5	2,1	1,9	- 1,9	100	100	100	10	10	10	NW_1	NW_3	NW_2	*	0,6 mm	—
						+ 2,4													
Göschenen	30. Jan.	665,4	665,4	664,2	2,4	2,8	0,6	—	—	—	0	0	0	S_1	S_2	S_2	—	—	F.
1108	31. »	664,0	664,1	663,2	1,4	2,6	1,4	—	—	—	0	0	3	S_2	S_2	S_2	—	F.	—
	1. Feb.	666,9	668,2	666,8	3,4	4,8	2,6	—	—	—	0	0	0	S_1	S_0	S_0			
	2. »	666,6	666,2	663,3	3,6	6,7	4,6	—	—	—	0	0	0	S_0	S_2	S_2	—	F.	—
	3. »	657,7	657,9	656,6	3,8	1,4	- 1,9	—	—	—	10	10	10	W/N_0	W/N_0	W/N	●	●	*
						+ 2,3													
Wildhaus	30. Jan.	—	—	—	0,8	9,5	7,4	—	—	—	0	0	7	SE_1	SE_2	SE_3	Nachts Sturm		
1096	31. »	—	—	—	8,0	9,5	5,1	—	—	—	9	7	0	SE_4	SE_2	SE_0			
	1. Feb.	—	—	—	5,6	9,5	6,3	—	—	—	10	3	0	SE_3	N_1	NW_0			
	2. »	—	—	—	5,3	9,4	9,0	—	—	—	0	7	9	NW_0	E_2	E_4	Nachts Sturm		
	3. »	—	—	—	9,5	6,7	4,1	—	—	—	10	10	10	NE_4	NW_3	NW_1	—	—	*
						+ 2,2													
Guttannen	30. Jan.	668,0	666,3	666,6	7,4	8,1	6,0	39	32	55	0	4	6	SE_4	SE_4	SE_4	Sturm		
1070	31. »	664,5	665,7	666,9	5,6	4,7	4,2	57	63	56	5	10	0	SE_4	SE_4	SE_4	Sturm		
	1. Feb.	665,7	667,7	667,0	5,0	6,8	6,4	56	57	57	8	7	0	SE_4	SE_4	SE_3			
	2. »	671,2	669,7	665,7	6,0	8,6	6,8	58	49	63	0	1	10	SE_2	SE_4	SE_1			
	3. »	661,7	660,0	663,4	5,2	3,4	0,0	74	91	100	10	10	10	SE_4	SE_2	NW_0	—	●	*

Ort	Datum 1885	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7	Bemerkungen 1	Bemerkungen 9
						+ 2,1													
Sepey	30. Jan.		—	—	1,8	8,5	5,7	73	42	39	0	7	9	0	SW	SW	Heftiger heisser S		
1051 m	31. »		—	—	6,6	7,7	2,4	35	57	55	7	5	0	SW	SW	0			
	1. Feb.		—	—	2,8	4,5	1,3	72	85	67	10	10	3	SW	SW	SW	—	● 10,4 mm	
	2.		—	—	3,2	9,0	9,2	61	28	36	8	5	10	SW	SW	SW	Heisser S abds.		
	3. »		—	—	7,0	2,1	− 1,0	46	99	100	10	10	10	SW	SW	SW	Heft. S	●	⊹
						+ 2,0													
Saanen	30. Jan.	-	—	—	− 7,9	5,7	0,5	97	62	94	1	8	2	NE_0	E_0	—			
1023	31. »	--	—	—	7,5	10*,0	2,0	49	-	68	6	2	3	NE_2		—			
	1. Feb.		—	—	3,8	6,1	2*,0	72	81	--	6	10	5	E_0	W_2	—	—	—	✻
	2. »		—	—	− 0,6	12,3	10*,0	86	33		1	7	8	-	NE	—			
	3. »		—	—	8,9	3,8	1*,5	52	82		10	10	10	E_2	W_1	—		●	
			+ 0,9			+ 2,0													
Engelberg	30. Jan.	670,1	667,8	665,9	− 5,0	4,0	7,2	69	52	42	0	2	2	E	SE	SE_2	Stürmisch		
1021	31. »	663,6	666,0	667,7	6,3	7,5	4,5	41	35	43	3	3	1	$SE_{3\ 4}$	SE_3	SE			
	1. Feb.	668,4	668,9	672,4	3,0	8,4	0,9	54	44	81	10	8	0	E	W	N			
	2. »	673,6	669,8	664,5	0,5	9,0	10,1	80	31	34	0	4	10	E	SE_4	SE_4			
	3.	660,5	662,0	665,3	10,0	5,1	0,3	32	67	100	3	10	10	SE_2	W	W		✻ 6,8	✻
						+ 1,8													
Chateau d'Oex	30. Jan.	671,7	672,2	669,3	− 5,5	3,4	4,4	58	42	40	1	8	10	E_0	SW/SW_0	SW/E_0		—	F.
970	31. »	668,9	669,8	672,2	3,6	7,5	0,7	45	28	40	8	2	0	SW/NW_0	SW/SE_0	E_1	F.	F.	--
	1. Feb.	673,4	674,8	677,1	4,2	4,9	1,8	69	80	90	7	10	5	SW/NE_0	SW/W_2	SW/S_0	●	● F.	F. ●
	2. »	678,5	673,1	668,9	1,0	6,7	8,9	70	46	25	1	3	8	SW/SE_1	SW/S_0	SW/S_0	-	F.	
	3. »	665,0	666,6	670,6	4,3	3,7	− 0,3	49	71	95	10	10	10	SW/NE_1	SW/SW_1	SW/S_0	—	●	● ✻
						+ 1,8													
Elm	30. Jan.	675,6	674,1	673,2	1,8	10,4	7,0	43	27	42	0	0	2	S_1	S_2	S_2	F.	—	F.
961	31. »	672,0	671,6	674,1	6,8	7,0	4,8	40	39	42	4	4	1	SE_3	SE_3	SE_2			
	1. Feb.	674,3	675,0	677,6	6,6	9,0	4,4	38	39	57	4	4	1	SE_2	S_3	S_2	F.	F.	F.
	2. »	679,3	676,6	672,2	1,5	10,0	10,1	60	27	38	0	2	6	S_1	S_3	S_2	F.	F.	F.
	3. »	667,1	665,8	669,8	9,0	6,5	0,2	43	60	97	6	10	10	SE_3	N_1	N_0	F^2	●	✻
			0,1			+ 1,6													
Einsiedeln	30. Jan.	679,9	677,2	675,7	− 8,2	2,6	− 3,5	80	50	80	0	3	8	N_1	NW	SW			
910	31. »	672,4	675,1	677,2	10,0	5,9	− 1,5	25	45	45	9	5	7	$S_{2\ 3}$	NW	SW_1	I. d. Nacht SW_2 St.		
	1. Feb.	677,2	678,0	681,7	2,8	5,6	1,5	52	38	70	6	7	2	SE_2	SE_2	NE	●		
	2. »	682,9	680,1	675,5	− 0,2	10,2	6,8	65	40	20	0	7	6	NE	SW_2	W_2	Stürmisch		
	3.	670,3	672,0	675,6	3,8	4,5	2,0	58	80	90	6	8	10	W_1	W_1	SW_1	—	●	✻
						+ 1,5													
Cuves	30. Jan.	—			− 6,7	3,0	0,5	79	50	75	0	7	9	NE_0	W/E_0	W/E_0	In der Nacht Sturm		
883	31. »				7,1	9,1	2,4	35	33	46	7	0	0	NE_0	$E_{1\ 2}$	$SE_{2\ 3}$			
	1. Feb.			—	7,7	7,3	3,5	62	70	80	10	10	6	$E_{2\ 3}$	$E_{2\ 3}$	E_1	●	—	7,9 mm
	2. »			—	3,9	6,1	4,9	57	61	60	1	8	10	$E_{2\ 3}$	NE_0	NE_0			
	3. »			—	3,9	4,0	− 0,3	67	74	95	9	10	10	ENE_0	$NW_{1\ 2}$	NE_0	—	● 4,7 mm	

Ort	Datum 1885	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7	Bemerkungen 1	Bemerkungen 9
			+ 0,5			+ 1,5													
Trogen	30. Jan.	682,0	680,0	677,8	0,8	9,6	8,8	86	43	63	0	0	0	S_0	S_0	S_4	Nachts Föhn²		
876 m	31. »	675,1	677,7	679,0	9,8	8,4	6,6	63	79	64	10	0	0	S_4	S_0	S_4	Nachts Föhn²		
	1. Feb.	679,3	680,8	683,9	5,8	10,2	3,8	71	60	100	10	0	0	S_4	S_4	S_0			
	2. »	684,6	682,6	678,9	7,2	11,0	10,2	75	54	55	0	0	10	S_2	S_2	S_4	Heftig. Föhn		
	3. »	673,0	673,4	677,3	10,8	7,0	0,6	59	89	100	10	10	10	S_4	S_2	SW_0	—	—	*
						+ 1,2													
Affoltern	30. Jan.	689,6	687,7	684,3	- 1,8	5,5	1,8	87	65	69	1	5	9	W_0	W_0	W_0			
795	31. »	683,0	685,2	687,0	1,8	6,2	1,0	69	69	93	9	9	1	SW_0	SW_0	W_0			
	1. Feb.	686,5	689,0	691,3	0,1	5,0	2,0	91	79	100	10	10	1	W_0	SW_1	SW_0	—	●	9,6 mm
	2. »	692,0	688,6	684,3	2,4	6,6	3,6	77	68	73	0	2	9	SW_0	SW_0	SW_0			
	3. »	679,4	682,0	685,3	3,4	3,1	0,5	68	82	96	9	10	10	SW_0	W_1	SW_0	—	●	● 7,3
			+ 1,0			+ 1,0													
Faido	30. Jan.	698,4	696,4	695,6	- 4,8	2,2	1,0	90	68	85	0	0	10	W_0	W_0	W_0			
759	31. »	693,5	693,3	695,3	- 0,8	0,6	- 0,8	100	92	100	10	10	10	SW_0	S_0	W_0	—	*	*
	1. Feb.	696,5	697,4	698,2	- 0,4	1,2	0,6	100	96	96	10	10	10	SE_0	SW_0	SW_0			
	2. »	699,4	699,3	695,3	- 2,2	4,0	0,2	100	80	100	0	10	10	W_0	W_0	SW_0	—	—	* ●
	3. »	696,8	696,1	694,7	- 1,8	5,2	0,8	92	75	92	10	10	10	W_0	W_0	W_0	*	*	*
						+ 1,0													
Gurtnellen	30. Jan.	694,5	692,5	692,7	7,3	10,0	8,6	22	25	50	0	0	3	S_{3-4}	S_{6-7}	S_{4-5}	Föhn		
742	31. »	690,0	691,2	693,8	8,2	7,2	7,2	37	48	37	3	10	2	S/S_{6-7}	S/S_{5-6}	S/S_{5-6}	Föhn		
	1. Feb.	694,2	693,7	696,2	7,8	9,6	8,6	40	37	46	8	3	0	S/S_{5-6}	S/S_{6-7}	S/S_{2-3}	Föhn		
	2. »	697,2	695,5	692,0	7,9	11,0	10,4	41	32	44	0	5	10	S/S_{3-4}	S/S_{6-7}	S/S_{4-5}	Föhn		
	3. »	686,9	684,9	688,7	8,0	6,5	2,0	62	86	96	10	10	10	S/S_{5-6}	S/S_{2-3}	N/NE_{1-2}	●	●	●
			+ 0,3			+ 0,7													
St. Gallen	30. Jan.	698,6	696,1	693,8	- 6,0	6,0	- 1,2	90	54	91	0	0	5	SW_0	SW_0	SW_0	●		
680	31. »	690,4	694,1	696,0	4,6	9,0	0,6	62	52	78	10	5	0	SW_0	SW_3	SW_1			
	1. Feb.	696,1	696,1	700,9	4,4	10,6	3,4	63	46	83	5	7	0	SW_1	SW_1	SW_3			
	2. »	701,9	697,8	694,5	2,2	13,0	12,4	77	28	31	0	0	10	SW_1	SE_1	SE_1			
	3. »	689,2	689,1	694,9	12,2	7,8	0,8	36	75	95	7	7	5	SE_1	SE_1	SW_1	—	●	9,3 *
						+ 0,8													
Castasegna	30. Jan.	702,3	701,3	700,9	- 2,3	3,2	0,7	68	56	80	0	1	9	E_1	E_0	NE_0			
700	31. »	698,2	698,0	700,1	0,0	0,2	- 0,2	80	98	98	10	10	10	SW_0	W_0	W_0	*		* 5,7 mm
	1. Feb.	701,2	702,1	703,6	- 0,2	1,9	0,4	95	91	96	10	10	10	W_0	NW_0	NW_0	●		● 2,7 mm
	2. »	704,4	704,3	701,0	- 0,5	5,2	1,8	93	80	94	6	10	10	NE_0	SE_0	NE_0			
	3. »	694,4	689,9	690,4	0,9	1,8	1,2	95	95	93	10	10	10	NE_0	NE_0	SW_0	● und * 41,2 mm		
						+ 0,6		Haarhygr.											
Bourguillon	30. Jan.	—	—	—	- 6,0	5,0	- 1,0	90	48	70	0	8	4	NE	SW	SW			
(Freiburg)	31. »	—	—	—	- 0,5	7,5	2,0	80	50	75	5	0	0	SE	SW_1	—			
656	1. Feb.	—	—	—	0,0	5,0	2,0	85	90	95	5	10	0	NNE	—	—	—		● 6,1 mm
	2. »	—	—	—	- 1,0	8,5	2,0	85	55	82	2	5	10	NE	—	SE			
	3. »	—	—	—	1,0	3,0	0,5	85	90	95	10	10	10	SW	SW_2	—			

Ort	Datum 1885	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7 1 9
						+ 0,6											
Linthal	30. Jan.	701,5	698,8	697,5	− 4,2	5,4	7,8	87	85	66	1	0	4	SE_1	SE_0	S/S_2	F. seit 4h p.
656 m	31. »	695,1	696,7	699,0	5,4	8,2	6,4	68	59	73	5	5	4	S/S_1	S/S_1	S/S_2	
	1. Feb.	699,7	699,6	703,5	3,4	10,4	1,4	87	51	86	5	4	5	NW/NE_1	S/S_2	NE_1	
	2. »	704,5	710,4	698,3	0,4	10,4	10,8	80	57	53	0	3	8	NE_0	S/S_1	S/S_2	
	3. »	690,5	691,6	693,7	11,8	7,4	0,6	40	92	100	6	10	10	S/S_3	NE_1	NE_1	
						+ 0,6											
Ebnat	30. Jan.	701,9	699,4	698,1	− 6,2	4,8	− 2,8	—	—	—	0	0	4	SE_0	E_0	E_0	Nachts starker SW
649	31. »	693,8	696,6	698,9	10,2	10,8	− 0,2				8	2	4	SE_2	N_0	NE_0	
	1. Feb.	700,9	698,2	696,0	4,0	10,2	− 0,4				8	4	2	SE_2	E_0	E_0	
	2. »	692,7	694,6	701,6	− 0,6	13,0	8,1			—	0	4	6	N_0	E_2	E_2	
	3. »	701,7	699,0	698,7	11,2	6,8	0,8	—	—	—	8	10	10	SE_1	W_2	NW_1	— ● 5,9 mm
			+ 0,5			+ 0,6											
Lohn	30. Jan.	703,1	701,0	698,0	− 3,0	3,8	3,4	100	47	65	0	0	3	NW_0	N_0	SW/N_0	Alpen sichtb.
645	31. »	695,3	697,9	699,8	4,0	5,4	4,1	64	73	79	9	7	2	SW/NE_0	SW/W_0	SW/NW_0	Alpen klar
	1. Feb.	699,8	700,5	704,1	2,0	5,3	3,7	88	82	100	10	10	2	SW/SW_1	SW/SW_1	SW/SW_0	● ● 4,8 mm
	2. »	705,6	702,4	698,2	3,0	7,5	7,6	95	67	48	0	2	2	NE_0	NE_1	NE_1	
	3. »	692,4	693,3	697,7	8,0	5,4	0,9	46	85	96	4	9	10	NE_2	SW/SW_2	SW/SW_2	— ● *
						+ 0,5											
Wald	30. Jan.	704,7	702,2	699,1	− 1,6	4,1	1,8	100	63	68	0	0	0	N_{1-2}	E_0	—	
621	31. »	697,1	700,0	702,1	8,2	8,5	2,2	38	48	68	6	5	0	S_0	N_1	—	
	1. Feb.	701,5	702,7	706,7	6,9	9,0	2,8	42	56	82	7	10	0	SE_1	S_0	N_1	
	2. »	707,6	703,6	699,6	2,4	8,3	10,3	72	56	40	0	2	2	E_0	SE_0	—	— 4–5h p. E_3
	3. »	693,8	696,2	700,7	3,4	7,2	1,0	76	76	96	6	10	10	NE_0	N_1	—	— ● *
						+ 0,4											
Reichenau	30 Jan.	708,5	706,3	706,2	1,2	10,8	3,8				0	0	7	SW_1	S_1		
597	31. »	703,0	703,6	706,9	3,6	10,5	4,5				6	5	3	S_2	S_1		
	1. Feb.	707,3	707,3	710,0	4,2	10,2	6,0				7	10	8	SW_1	S_1		
	2. »	711,9	709,6	705,6	2,2	11,6	6,0				0	3	7	SW_1	S_1		
	3. »	699,2	697,0	701,0	7,7	8,4	1,9				8	10	10	S_1	S_2		
						+ 0,3											
Bern	30. Jan.	707,5	705,9	703,0	− 4,8	3,6	0,8	92	64	89	2	7	9	S_2	S_1	W_1	≡
572	31. »	701,2	703,2	705,2	0,1	7,6	2,1	88	69	94	8	6	2	W_0	SW_7	SE_2	≡
	1. Feb.	706,1	707,1	710,0	0,8	5,8	2,2	93	91	100	10	10	4	SE_3	WSW_{10}	S_1	● ●
	2. »	710,4	706,8	702,4	1,1	6,6	4,2	98	85	92	2	7	10	SW_0	W_1	NNW_1	
	3. »	698,3	700,3	703,8	2,5	4,9	1,8	88	87	98	9	10	10	N_{10}	WSW_{20}	S_4	— ● —
						+ 0,3											
Interlaken	30. Jan.	—	—	—	− 4,2	− 4,0	− 2,8		—	—		—		—	—	—	
568	31. »	—	—	—	− 4,6	− 1,2	− 3,0						—	—			
	1. Feb.			—	1,4	6,0	3,0	—	—				—				
	2.				2,4	5,0	1,4	—	—								
	3.		—		2,6	3,2	1,2	—									

Ort	Datum 1885	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7	Bemerkungen 1	Bemerkungen 9
			+ 1,0			0,3		Haarhygr.											
Thun	30. Jan.	709,7	707,2	704,0	– 9,7	– 4,2	– 1,2	100	98	96	1	3	7	NW_0	NW_0	NW_0			
565 m	31. »	702,0	704,1	706,1	– 0,3	6,6	0,4	94	71	92	8	5	0	NW_0	N_0	W_0			
	1. Feb.	706,9	707,9	710,5	0,6	5,0	0,8	88	88	99	10	10	3	NW_0	W_1	NW_0		●	2,5 mm
	2. »	711,2	707,4	703,0	1,7	7,1	2,5	85	74	88	1	7	7	WSW_0	WNW_1	NW_0			
	3. »	699,4	700,5	704,9	2,8	6,2	2,0	80	76	99	9	10	10	NW_1	NNW_1	E_1		5,7 mm	●
						+ 0,2													
Sion	30. Jan.	711,7	709,6	708,8	1,0	7,4	6,8	82	44	43	0	6	8	W	N_0	SE_0			
540	31. »	706,3	706,5	709,8	5,2	9,4	4,0	56	41	60	7	6	2	SW_0	SW_0	E_0			
	1. Feb.	711,5	711,9	712,0	3,6	7,6	3,0	65	57	76	9	10	8	W_0	E_0	E_0			
	2. »	715,6	712,1	707,4	1,6	7,6	7,4	82	62	57	3	5	10	W_0	SW_0		K von Mittern. an		
	3. »	702,2	702*,5	705*,5	9,0	5*,0	3*,0	50	*70	*85	9	*10	*10	SW_3	—				
						+ 0,1													
Ragaz	30. Jan.	712,5	710,7	710,4	1,4	12,4	7,2	72	36	42	0	0	6	SE	SE	SW			
517	31. »	710,2	710,5	711,1	9,0	12,0	7,8	48	47	55	6	0	0	SW	SE	SE			
	1. Feb.	712,0	713,6	714,0	11,4	12,0	7,2	50	56	65	0	0	4	SE	SE	SE			
	2. »	713,9	712,9	708,9	11,6	13,0	10,2	50	48	55	0	0	8	SE	SE	SE			
	3. »	707,9	706,9	706,9	10,8	8,4	4,0	70	94	100	6	10	10	SE	N	N			
						0,0													
Sargans	30. Jan.	714,8	712,5	711,3	0,0	12,0	– 3,0	67	43	50	0	0	5	E_1	SE_3	W, SE_3			
501	31. »	708,8	710,0	713,4	5,0	14,0	9,0	39	57	48	3	3	0	SW/S_3	S, S_3	S, S_3			
	1. Feb.	713,6	713,4	716,7	4,8	13,0	6,0	42	53	42	2	2	1	SE_4	SE_3	S_1			
	2. »	719,1	714,9	711,8	5,0	13,4	7,0	39	42	31	2	6	8	S_3	S_4	S_1			
	3. »	707,6	703,3	708,9	6,0	13,0	4,0	39	59	40	8	6	10	S_4	SE_3	W_3			
						0,0													
Lausanne	30. Jan.	712,6	711,5	708,4	– 0,7	4,4	3,3	96	76	74	3	10	10	NW/NW_0	SE, SW_0	SW, NE_0			
507	31. »	706,9	708,7	710,3	2,8	7,3	5,2	75	78	83	10	1	5	SW/NW_0	SW, SW_1	SW, SW_2			
	1. Feb.	711,2	712,4	715,4	4,6	6,5	7,4	87	84	71	10	10	10	SW/NE_0	SW, SE_1	SW/NE_0	● 4,2	● 5,0 mm	
	2. »	715,2	711,3	707,3	6,9	7,9	8,3	56	78	55	4	10	10	NE/NE_3	SW/SW_2	SW, SW_0			
	3. »	703,6	706,6	709,3	4,3	3,3	2,7	84	94	96	10	10	10	SE/N_0	SW/SW_0	SW/SW_0	● 0,1	●	● 7,1
			+ 1,0			0,0													
Sursee	30. Jan.	713,2	711,1	708,0	– 7,0	1,9	– 2,2	100	74	100	2	10	3	W	W/W	S			
502	31. »	705,5	708,3	710,2	– 2,6	7,0	– 0,5	96	62	95	9	10	2	NW_2	W/NW	NW			
	1. Feb.	710,3	711,5	714,8	0,2	5,7	1,0	90	72	96	10	10	0	NE	NW	NW	●		● 13,9 mm
	2. »	715,7	711,3	707,3	– 1,2	5,1	1,8	100	85	96	0	8	9	W	W/W	W			
	3. »	702,4	704,8	708,9	1,0	5,5	2,0	86	78	95	9	10	10	W/W_3	W/W	W	—		● 2,7 mm
			— 1,0			0,1													
Neuchâtel	30. Jan.	715,8	713,5	710,3	– 4,5	2,7	0,4	98	78	89	1	9	10	N_0	SW_1	NW_1			
488	31. »	708,9	710,3	712,3	– 0,1	8,4	4,7	90	68	83	10	7	5	NE_1	SW_1	NW_0	—	3,4 mm	●
	1. Feb.	713,2	714,6	717,3	2,3	5,5	3,9	96	96	100	10	10	10	SW_0	W_1	NW_1	●		● 9,7 mm
	2. »	717,8	714,3	709,6	2,6	5,5	3,9	100	91	87	2	10	10	NE_1	NE_0	NW_0	≡		
	3. »	705,1	707,5	711,2	2,2	4,0	2,7	98	92	87	10	10	10	NW_0	SW_1	SW_2	1,7 mm	●	●

Ort	Datum 1885	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7 1 9
			— 0,6			— 0,1											
Glarus	30. Jan.	717,7	714,6	711,5	- 6,9	2,7	9,5	94	58	36	0	0	5	SW_0	W_0	$S_{3\ 4}$	Cirri F. 6h p.
480 m	31. »	710,2	711,6	714,6	10,6	11,9	9,0	42	41	38	3	1	1	S_3	S/S_4	S_3	Föhn
	1. Feb.	715,5	714,6	719,6	3,9	13,7	2,3	71	40	95	10	7	0	N_0	S_2	N_0	
	2. »	721,1	715,8	712,2	0,1	13,5	13,7	93	28	37	0	0	1	S_0	S_3	S_4	— F. F²
	3. »	705,2	708,0	712,8	13,9	8,8	1,7	38	69	96	2	10	10	S/SE_4	N_2	N_1	— — ●
						0,1											
Muri	30. Jan.	716,9	714,7	710,9	- 6,5	1,0	- 0,7	100	84	100	3	8	0	W/NE	W/NE	W/NE	
483	31. »	708,8	711,7	713,6	- 1,1	5,0	4,5	92	71	82	9	9	7	W/NE	W/SE	W	
	1. Feb.	713,2	715,2	718,6	1,9	7,2	2,4	82	81	100	10	10	0	W/SE	NE	NE	— ● —
	2. »	718,9	714,1	710,9	1,1	8,4	4,3	100	100	81	0	7	6	S	NW	W/W	
	3. »	705,1	708,2	711,9	2,3	6,7	2,4	86	83	94	9	10	10	W/N	W/N	N	— ● ●
						— 0,1											
Martigny	30. Jan.	717,9	715,5	713,1	- 5,8	5,8	5,2	88	80	89	0	10	10	NNW_0	WNW_1	WNW_2	Sturm i. d. Nacht
480	31. »	711,6	712,2	716,5	6,8	10,7	3,5	95	40	70	10	3	0	WNW_1	WNW_1	NNW_1	
	1. Feb.	717,1	718,3	720,9	4,4	6,0	2,2	98	69	84	8	10	6	NNW_0	WNW_1	NNW_1	
	2. »	721,9	716,9	712,5	- 0,3	8,5	8,5	93	41	61	1	7	10	WNW_1	NNW_1	ENE_1	
	3. »	708,6	708,8	712,4	6,3	5,2	1,7	71	88	95	10	10	10	WNW_2	NNW_1	NNW_1	— ● 2,0 mm
						0,1											
Riv. Bironico	30. Jan.	—	—	—	- 5,8	6,4	2,6	90	55	93	5	10	10	SW_2	SW	SW_1	— — ● ✱
475	31. »	—	—	—	- 0,4	1,2	1,2	96	96	69	10	10	10	SW_1	SW_1	SW_1	● ✱ ● ✱ ✱
	1. Feb.	—	—	—	1,1	3,4	2,4	66	83	93	10	10	10	SW_1	SW_1	NE_1	● ● ● ✱
	2. »	—	—	—	1,4	3,4	2,6	93	90	94	3	10	10	SW_1	SW_1	SW_1	12,7 mm 5,5 mm ●
	3. »	—	—	—	1,4	1,4	1,4	96	96	96	10	10	10	SW	SW_1	NE_1	✱ 30,0 ✱ ●
						— 0,2											
Zürich	30. Jan.	717,8	715,3	711,9	- 6,3	2,3	- 0,9	100	68	94	1	4	5	ESE_0	WNW_1	NW_0	≡
470	31. »	709,7	712,8	714,7	- 1,1	7,5	2,9	96	62	88	9	7	5	NW_0	NW_0	E_1	≡ föhnig
	1. Feb.	714,5	715,9	719,0	2,5	8,7	3,5	87	70	100	8	10	0	E_1	W_2	E_0	Föhn ● —
	2. »	719,8	716,0	711,9	2,3	9,3	4,5	88	76	88	0	2	7	E_0	S_0	W_0	Föhn
	3. »	706,0	708,9	712,7	3,3	6,1	2,1	82	87	98	9	10	10	E_0	W_{1-2}	SE_0	— ● ●
						— 0,2											[6h p. Föhn
Altstätten	30. Jan.	719,5	716,6	713,5	- 6,8	- 2,3	11,1	100	90	33	1	1	4	N_0	NE_0	S_3	≡ ≡ seit
470	31. »	711,3	712,7	716,0	11,0	12,6	8,6	31	32	36	7	5	1	S_3	S_3	SW_2	Starker Föhn
	1. Feb.	716,4	716,0	720,8	8,7	14,2	2,6	41	31	93	9	3	0	NW_1	S_3	NW_0	Starker Föhn
	2. »	722,0	718,0	714,3	4,9	15,3	14,2	62	23	30	0	4	9	NW_0	S_3	S_3	Starker Föhn
	3. »	708,8	708,5	713,8	11,2	9,9	2,6	47	62	100	4	6	10	NE_0	NE_1	NW_0	F. 5,8 mm ●
						— 0,2											
Rorschach	30. Jan.	—	—	—	- 2,8	5,4	- 1,2	—	—	—	9	0	0	W_1	S_1	—	
455	31. »	—	—	—	0,7	12,8	1,2	—	—	—	3	0	0	S_1	SW_1	S_2	
	1. Feb.	—	—	—	3,2	12,2	- 1,2	—	—	—	4	1	0	SW_4	SW_1	—	
	2. »	—	—	—	0,4	15,5	16,0	—	—	—	0	0	9	—	S_5	S_5	
	3. »	—	—	—	12,8	11,6	2,3	—	—	—	0	3	9	S_2	S_3	S_2	— — ●

Ort	Datum 1885	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7	Bemerkungen 1	Bemerkungen 9
						— 0,2			Haarhygr.										
Luzern	30. Jan.	718,9	716,6	713,0	- 5,0	2,6	- 0,6	96	65	86	0	4	5	W_0	NE_0	SW_1			
451 m	31. »	711,0	713,9	716,1	0,0	7,0	1,6	86	55	87	6	6	0	N_1	S/S_0	SW_0			
	1. Feb.	715,5	716,6	720,4	2,0	6,9	2,2	80	63	98	10	9	0	SW_1	SW_1	NW_1	●	●	
	2. »	721,0	717,0	712,8	1,0	6,8	3,8	92	88	78	0	2	2	S_0	NE_1	NE_1			
	3. »	707,1	710,0	714,3	3,6	7,0	2,5	72	70	97	4	10	10	NW/NW_1	NE_1	S_1	—	●	
						— 0,1													
Altorf	30. Jan.	716,7	713,9	712,7	- 2,1	13,9	11,5	96	23	36	0	10	2	SE_0	$S_{2\ 3}$	S_3	Stürmisch		
484	31. »	710,8	711,8	714,1	10,5	12,5	8,9	35	30	36	2	5	10	S_3	S_2	S_3	Stürmisch		
	1. Feb.	714,6	715,0	718,6	10,1	12,9	6,7	39	43	63	10	7	0	S_2	S_2	SE_1	Stürmisch		
	2. »	719,7	716,2	713,8	6,7	14,9	13,5	58	28	34	0	8	1	SE_1	S_2	S_3	Stürmisch		
	3. »	706,3	707,2	712,3	12,9	10,5	3,5	38	57	90	4	10	10	S_3	SW_{0-1}	SW_{1-2}	—	2,2 mm ●	—
						— 0,1													
Winterthur	30. Jan.	717,4	714,8	712,0	-10,0	0,6	- 4,3	95	64	92	2	3	5	S_0	S_0	S_1			
475	31. »	709,3	712,1	714,2	- 4,4	7,4	0,0	99	58	90	5	5	5	S_0	SW_1	SW_0			
	1. Feb.	714,0	715,3	718,4	1,8	7,1	1,5	84	63	100	6	8	1	W_2	SW_1	S_1	—	● 11,6 mm	
	2. »	719,7	715,8	711,9	0,2	6,3	2,0	95	65	92	0	2	1	S_0	S_0	S_0			
	3. »	705,8	708,1	712,2	0,3	6,5	1,5	97	72	99	6	9	10	SW_0	SW_2	SW_2	—	5,2 mm	●
						— 0,3													
Vitznau	30. Jan.	719,5	717,4	713,8	- 2,2	3,7	0,4	—	—	—	2	5	5	NE	N	E var.			
440	31. »	710,7	713,3	715,6	13,8	10,0	4,4	—	—	—	6	7	2	E_4	S/NE	S/N	Seit 3^h a. F.		
	1. Feb.	715,6	716,1	720,4	6,0	11,4	3,0	—	—	—	10	6	2	NE	N	NE			
	2. »	721,6	718,1	714,0	2,6	7,0	6,9	—	—	—	0	3	3	NE	N	N	—	—	F.
	3. »	706,7	710,0	714,3	15,0	9,0	4,3	—	—	—	5	8	10	E_4	NE	—	F.	—	●
						0,3													
Gersau	30. Jan.	—	—	—	- 1,3	4,2	6,4	85	65	46	0	0	0	SW	S	—	—	—	F.
440	31. »	—	—	—	12,0	9,3	6,2	27	43	50	0	0	0	SE	SW	–	F^2	F^2	—
	1. Feb.	—	—	—	7,2	12,2	4,0	56	35	89	0	2	0	SW	NW				
	2. »	—	—	—	4,3	15,2	15,0	79	24	30	0	0	0	SW	SE	–	F^2	F^2	—
	3. »	—	—	—	15,0	9,2	4,0	39	55	89	0	10	10	SE	S	—	F^2	●^{2}	—
			Aneroid			— 0,3													
Wallenstadt	30. Jan.	720,6	717,5	716,5	- 2,0	15,0	12,0	—	—	—	0	2	7	S	S	S	—	—	F^2
439	31. »	715,3	715,5	718,4	10,0	14,0	9,0	—	—	—	5	4	5	S	S	S	—	F^2	F^2
	1. Feb.	718,3	717,6	721,6	11,0	15,0	5,0	—	—	—	10	5	0	S/S	SW/SSW	E	F.	—	—
	2. »	722,7	718,9	715,8	7,0	15,0	15,0	—	—		0	1	10	—	S/S	SE/S	—	F^2	F^2
	3. »	708,4	710,1	715,0	14,0	10,0	5,0	—	—	—	3	10	10	SE/S	SW/SW	SW/SW	—	● 10,1 mm	●
						— 0,3													
Schaffhausen	30. Jan.	720,0	717,4	714,4	- 9,8	- 0,2	- 2,4	—	—	—	2	2	10	E_0	SE_0	NE/NE_0			
439	31. »	711,5	713,9	716,2	- 3,6	7,2	- 0,6	—	—	—	8	10	4	NE_0	NE/SW_1	E_0		[8.7 mm bei SW	
	1. Feb.	716,4	717,5	720,8	0,4	4,4	2,4	—	—	—	10	10	8	E_0	NE/NE_1	NE_0	—	●	●
	2. »	721,9	717,6	713,5	- 1,0	7,4	6,2	—	—	—	0	0	10	NE_1	SE_0	NE_0			
	3. »	707,7	709,4	713,3	2,4	7,8	2,6	—	—	—	8	10	10	N/NE_0	NE/SW_{1-2}	SW_1	—	●	●

Ort	Datum 1885	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7	Bemerkungen 1	Bemerkungen 9
						— 0,3													
Linthkolonie	30. Jan.	721,5	719,1	716,7	- 4,7	4,3	8,0	92	90	77	0	0	0	SE_{1-2}	E_1	E_4			F.
434 m	31. »	713,1	711,9	715,5	11,2	15,1	8,6	66	81	92	4	2	3	S/E_{3-4}	S/E_3	S/E_3	F.	F.	F.
	1. Feb.	718,5	720,2	722,2	8,0	15,8	10,5	100	71	99	10	5	4	S/E_3	S/S_1	S/S_3	F.	F.	F.
	2. »	724,7	718,3	713,6	4,4	10,6	10,4	97	80	74	0	3	2	$S_{2\,3}$	S/SE_4	SW/E_4		F.	F.
	3. »	709,4	712,3	717,0	10,8	8,2	3,3	91	97	99	3	10	10	S/NE_{3-4}	S/NE_3	SE/NE_2	F.		●
						— 0,3													
Kreuzlingen	30. Jan.	721,2	718,0	715,6	- 5,2	- 1,6	- 2,6	—	—	—	10	3	3						
431	31. »	712,9	715,3	717,3	- 2,6	5,6	2,4	—	—	—	9	1	4	N_0					
	1. Feb.	717,2	718,7	721,9	1,2	4,2	3,8	—	—	—	10	10	10	NW_2	SW_0		●		●
	2. »	723,1	719,4	715,6	1,6	4,2	4,6	—	—	—	0	4	10	NE_0	NE_0				
	3. »	709,0	710,1	715,2	3,8	6,8	1,6	—	—	—	8	9	10	NW_1	NW_1				●
						— 0,3													
Frauenfeld	30. Jan.	721,9	719,1	716,2	-10,8	0,5	- 4,6	100	76	90	5	1	0	NE_0	SE_0				
427	31. »	713,5	715,8	717,9	- 4,4	6,5	1,2	90	60	87	7	6	0	SW	SW				
	1. Feb.	718,6	718,8	722,3	- 0,5	6,1	1,5	90	68	92	7	5	3	SW	SW/SW_0		●	●	
	2. »	724,0	720,2	715,9	- 1,0	6,0	2,2	95	80	93	0	7	7	SE_0	W_1	E_0			
	3. »	709,7	711,7	716,0	0,3	7,0	1,6	92	80	95	8	10	10	S/S_0	W/W_1	W/W_1		●	●
						— 0,3													
Aigle	30. Jan.	722	720	717	- 0,6	5,2	11,4	71	75	36	0	8	10	E_0	SW/E_0	SW/SE_4		-	Sir.
425	31. »	714	717	720	12,0	12,1	10,2	22	37	26	9	3	0	SW/SE_4	SW/SE_4	SE_4	Sirroco		
	1. Feb.	720	722	724	9,0	9,1	8,0	53	52	56	10	10	8	S/SE_4	SSW/SE_4	SSW/SE_3	●		●
	2. »	725	720	715	6,7	15,1	16,4	56	19	19	0	8	10	SE_1	SSW/SE_4	SSW/SE_5			
	3. »	712	715	718	12,6	6,5	3,4	35	71	85	10	10	10	SSW/SE_3	NW/NW_0	NW_0	-		●
						— 0,4													
Genève	30. Jan.	722,7	720,3	717,0	- 2,4	4,0	1,2	84	69	85	5	10	10	SSE_1	N_1	SSW_1			●
405	31. »	716,5	718,1	719,7	3,2	11,0	7,1	83	66	78	10	1	1	W_1	WSW_1	SSW_1	●	— 0,2 mm	
	1. Feb.	720,3	721,5	724,7	5,3	10,0	11,3	86	76	56	7	10	10	N_1	W_1	WSW_1	●	● 2,1 mm	
	2. »	724,6	721,4	716,9	4,6	8,1	5,3	75	71	87	9	10	10	SW_1	NW_0	SE_1	—	0,1 mm	●
	3. »	712,9	716,2	718,4	4,1	2,6	1,6	93	80	97	10	10	10	SSE_1	SE_1	SW_0	●	● 8,6 mm	
						— 0,4													
Diessenhofen	30. Jan.	722,9	719,8	716,1	-12,4	- 1,8	- 5,3	—	—	—	8	1	3	—					
415	31. »	714,5	716,6	719,0	- 5,4	5,6	- 2,1	—	—	—	4	9	0	—			Föhnwetter		
	1. Feb.	718,9	720,5	723,6	- 0,2	3,7	1,8	91	89	100	10	10	5	W	W_1	S_0	●	13,5 mm	—
	2. »	724,8	720,7	717,0	- 1,8	5,9	1,6	96	91	96	0	2	10	SSW_0	S_0	S_0			
	3. »	710,9	712,3	717,0	0,7	6,9	1,3	92	91	98	9	10	10	WNW_0	W_3	W_0	—	6.4 mm	●
						— 0,4		Haarhygr.											
Aarau	30. Jan.	724,5	721,9	718,7	- 7,6	0,7	- 1,9	96	68	95	4	9	9	W/NW_0	NW_0	SSW/NW_0			
397	31. »	716,5	718,6	720,8	- 1,6	5,4	0,6	96	40	96	9	10	9	SW/NW_0	SW/NW_0	SW/NW_0			
	1. Feb.	720,7	722,2	725,3	0,6	5,8	1,7	96	72	96	9	10	10	W_0	W_0	W_0			
	2. »	726,2	722,4	718,4	- 0,5	4,8	2,4	96	86	95	10	3	4	NW_0	NW_0	SE_0			
	3. »	712,9	714,8	719,0	0,1	6,0	2,3	95	74	95	10	10	10	NW_0	W_1	W_0			●

Ort	Datum 1885	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7	Bemerkungen 1	Bemerkungen 9
						— 0,4													
Olten	30. Jan.	724,0	720,9	717,9	- 6,5	2,4	- 1,0	100	89	100	4	9	9	W_0	W_0	SW_1			
395 m	31. »	716,8	718,8	720,7	- 0,2	6,2	0,5	98	78	—	10	7	9	S_0	—				
	1. Feb.	721,0	—	725,4	0,6	*6,0	2,4	93	—	100	8	10	10	N_0	—	W_0	—	●	
	2. »	726,3	722,0	717,6	0,1	5,8	2,6	100	98	100	10	3	4	SW_0	SW_0	SW_1			
	3. »	712,8	715,2	718,9	1,1	5,8	2,4	96	85	100	7	10	10	SW_1	SW_0	SW_0	—	●	●
						— 0,5													
Böttstein	30. Jan.	728,2	725,4	721,8	- 8,4	0,3	- 1,3	100	82	95	10	0	8	NE_0	NE_0	NE_0			
370	31. »	719,2	721,4	723,3	- 2,4	6,4	- 0,3	96	66	96	7	10	8	W/NE_0	NE_0	W/NE_0			
	1. Feb.	723,8	725,7	727,5	1,6	3,9	2,4	75	93	96	10	10	7	W/NE_0	NE_0	W/NE_1	—	●	—
	2. »	728,2	725,8	721,4	0,0	8,4	2,8	100	79	93	10	3	8	NE_0	W/NE_1	W/NE_0			
	3. »	715,8	716,9	721,3	0,5	5,4	1,4	96	79	96	9	8	10	W/W_1	W/W_3	W/W_1	—	—	●
						— 0,7													
Liestal	30. Jan.	729,2	726,5	723,7	- 4,2	4,9	1,8	—	—	—	1	6	8	SE/SE_0	S/SE_1	SW/SE_0			
325	31. »	722,7	724,2	725,0	2,4	9,2	4,2	—	—	—	8	8	10	SW/N_0	W/NW_1	NW/NW_1	—	—	●
	1. Feb.	726,0	728,1	730,1	5,4	7,2	6,8	—	—	—	10	10	6	W/SW_1	W/SE_0	W/NE_0			
	2. »	731,2	727,2	722,8	1,4	11,3	5,2	—	—	—	—	3	10	NE_1	W/SE_1	SW/SE_1			
	3. »	719,2	721,6	724,4	2,4	6,4	3,0	—	—	—	8	10	10	SW/SE_0	SW/N_2	SW/NW_0	—	—	●
						0,8													
Basel	30. Jan.	733,3	730,8	728,1	- 0,4	6,0	4,6	85	62	66	3	10	10	E_1	E_1	SE_1	≡		
278	31. »	727,0	728,5	730,2	2,6	8,6	3,7	83	73	100	10	8	8	S_1	E_1	SE_2	Abendrot		
	1. Feb.	729,6	732,3	734,2	6,4	7,6	6,6	74	100	88	8	10	5	SE_2	SW_1	E_1	—	● 1,2 mm	
	2. »	735,5	731,4	727,7	3,4	11,2	7,6	90	48	67	1	5	10	SE_1	E_2	E_1			
	3. »	723,4	725,9	728,9	3,8	6,0	3,4	83	79	70	9	10	10	E_1	SW_2	SE_1	—	● 0,2 mm	
						— 0,9													
St. Vittore	30. Jan.	740,3	738,8	738,6	- 4,3	2,0	2,0	95	78	79	0	4	10	SW	SW/S	SW	—	—	●
268	31. »	737,1	736,8	738,5	1,8	1,2	1,3	96	100	100	10	10	10	SW	SW	SW	● ∗	∗	—
	1. Feb.	740,0	740,1	742,4	1,5	1,7	1,7	100	100	100	10	10	10	SE	SE	SE	—	6 mm ●	●
	2. »	743,1	740,7	738,7	0,8	5,1	3,1	99	90	100	10	9	10	SE	SE	SE	—	21 mm ●	∗
	3. »	732,0	728,5	728,4	1,2	1,5	1,0	99	100	100	10	10	10	SE	SE	SE	∗	∗ 55	●
						— 0,9													
Lugano	30. Jan.	740,9	739,6	739,5	- 1,4	3,8	1,6	91	72	80	5	10	10	NW_0	NW_0	NW_0			
275	31. »	738,4	737,7	738,7	0,8	0,8	1,0	94	94	98	10	10	10	SW_0	SW_0	SW_0	∗	∗	● 12,5
	1. Feb.	740,8	740,7	741,6	1,8	3,0	1,8	96	97	96	10	10	10	SW_0	SW_0	SW_0	●	6,3 mm	●
	2. »	743,4	742,2	740,7	2,0	6,0	3,2	96	87	94	10	10	10	SW_0	SW_0	SW_0	—	20,1 mm	●
	3. »	732,8	729,4	728,1	0,6	0,8	0,6	99	96	99	10	10	10	SW_0	SW_0	SW_0	●	● 54 mm	●
						— 1,1													
Locarno	30. Jan.	—	—	—	- 0,3	4,0	3,5	—	—	—	0	10	10	W	W	W			
230	31. »	—	—	—	3,0	1,9	1,9	—	—	—	10	10	10	W	W	E	—	● ∗	●
	1. Feb.	—	—	—	2,0	3,4	2,1	—	—	—	10	10	10	E	E	E	● ∗	6,6 mm	—
	2. »	—	—	—	2,3	5,7	5,5	—	—	—	10	7	10	E	E	E	●	7,7 mm	—
	3. »	—	—	—	2,5	1,7	2,3	—	—	—	10	10	10	W	W	W	—	● ∗	60,2

Ort	Datum 1892	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7	Bemerkungen 1	Bemerkungen 9
						+ 12,0													
Säntis	18. Aug.	572,0	570,9	568,9	14,8	17,8	13,5	41	39	42	0	1	3	SSW_4	SSW_3	SSW_4	—	—	<
2500 m	19. »	567,0	567,3	567,0	11,2	14,5	9,8	55	38	51	2	1	1	SSW_3	SSW_3	SSW_4			
						+ 11,9													
St. Bernhard	18. Aug.	573,7	572,0	570,2	13,6	15,9	12,3	—	—	—	0	1	3	SW_2	SW_3	SW_3			
2478	19. »	568,5	568,6	569,2	8,7	13,2	8,5	—	—	—	6	4	7	SW_2	SW_2	SW_2			
			+ 0,9			+ 10,4													
Julier	18. Aug.	590,6	589,2	588,1	14,0	20,0	15,0	—	—	—	0	0	0	SW_0	SW_0	SW_3			
2237	19. »	586,1	585,6	586,3	13,0	17,0	12,0	—	—	—	0	0	0	SW_3	SW_0	SW_0			
						+ 9,5													
Bernhardin	18. Aug.	602,8	601,7	599,8	16,2	20,0	14,6	—	—	—	0	2	3	SW_1	W/S_3	S_2			
2070	19. »	598,0	597,7	597,6	13,0	15,4	13,2	—	—	—	4	7	9	S/S_2	S/S_2	S_3	Am folg. Tag ●		
						+ 9,4													
Pilatus	18. Aug.	601,0	599,3	598,0	17,2	21,8	17,2	46	28	41	0	0	1	SW_2	SW_3	SW_3	Stürmisch und <		
2067	19. »	596,3	596,2	595,9	14,0	19,6	14,6	52	36	40	0	0	1	SW_2	SSW_2	SW_3	Stürmisch und <		
						+ 8,0		Haarhygr.											
Arosa	18. Aug.	—	—	—	19,5	24,1	18,4	20	11	26	0	1	1	NE	SW_{1-2}	NW			
1835	19. »	—	—	—	17,3	21,9	15,3	22	17	30	0	2	1	S_1	SW_{1-2}	W_1	—	—	<
						+ 7,9													
Sils-Maria	18. Aug.	621,6	620,4	618,3	13,0	23,5	17,2	76	35	57	0	0	1	NE_0	SW_2	SW_1			
1811	19. »	617,1	616,6	616,9	13,0	18,6	14,3	65	50	64	3	5	2	S_2	SW_2	SW_1			
						+ 7,8													
Pontresina	18. Aug.	—	—	—	10,6	22,7	17,0	78	40	55	0	1	0	—	—	—			
1805	19. »	—	—	—	12,7	19,1	12,8	63	43	67	1	2	0	—	—	—			
						+ 7,7													
Rigi-Kulm	18. Aug.	620,8	619,0	616,8	19,0	22,4	18,6	42	38	47	0	0	0	S_{1-2}	S_3	S_3			
1787	19. »	615,7	615,8	615,4	15,6	20,0	15,8	57	43	53	0	0	0	S_2	SE_2	$S_{2\ 3}$			
						+ 7,4		Haarhygr.											
Bevers	18. Aug.	629,4	627,0	625,8	10,6	26,0	15,2	89	24	68	0	1	0	SW_0	SW_1	SW_0	In SW <		
1711	19. »	624,7	623,8	624,6	12,0	21,8	14,0	82	34	63	2	4	3	SW_0	SW_1	S/SW_0			
						+ 6,8													
Grächen	18. Aug.	634,6	633,5	631,0	17,2	24,7	20,6	—	—	—	0	2	3	S_0	SSE_3	S_0	$8^1/_2$–10^h a. S_4		
1632	19. »	630,0	628,9	630,0	13,6	22,2	16,1	—	—	—	1	2	2	S_0	N_{2-3}	N_0			
						+ 6,7													
Zermatt	18. Aug.	635,2	634,4	632,7	16,4	24,0	19,4	—	—	—	0	0	0	SW_0	SW_0	S_2			
1613	19. »	630,9	630,2	631,6	15,6	21,6	16,6	—	—	—	0	0	0	SE_0	S_3	S_2			
						+ 6,6													
Monte Generoso	18. Aug.	636,3	635,8	633,8	20,2	21,4	17,8	41	65	63	0	0	3	SE_{1-2}	SE_{1-2}	SE_{2-3}			
1610	19. »	631,9	632,2	632,0	15,9	19,4	15,8	84	64	82	2	2	3	SE_{1-2}	SE_{0-1}	SE_{1-2}			

Ort	Datum 1892	Barometer 7	1	9	Temperatur 7	1	9	Feuchtigkeit 7	1	9	Bewölkung 7	1	9	Wind 7	1	9	Bemerkungen 7 1 9
			+ 0,6			+ 6,1											
Davos-Platz	18. Aug.	638,8	637,0	635,4	13,5	27,0	16,7	78	24	51	0	1	0	S/W_0	S/S_{1-2}	W_0	In SW <
1557 m	19. »	634,0	633,5	634,4	15,6	24,2	15,0	56	26	48	0	2	0	S/N_0	S/SW_2	SW_0	
			— 0,8			+ 5,9											
Splügen (Dorf)	18. Aug.	647,6	646,6	644,2	17,3	21,3	16,3	—	—	—	0	0	0	SW	SW_1	SW	<
1471	19. »	643,2	642,7	643,0	16,0	21,3	16,3	—	—	—	3	4	5	SW	SW_2	SW	
			+ 0,3			+ 5,7											
Andermatt	18. Aug.	647,4	646,1	644,0	16,8	24,8	21,5	—	—	—	0	0	0	N/SW	N/SW	N/S	Nachts Donner u.
1448	19. »	643,0	642,4	642,4	17,5	22,6	18,1	—	—	—	3	2	2	W/W_2	W/SW_2	W/SW	1,0 mm ●
			+ 0,5			+ 5,5											
Leukerbad	18. Aug.	650,6	649,3	647,9	18,8	26,4	19,2	45	26	48	0	0	0	W_2	SW_4	SW_4	
1415	19. »	646,2	644,7	645,9	15,0	24,4	20,2	53	36	33	0	0	2	SW_2	SW_3	SW_2	
			— 0,6			+ 5,3											
Platta	18. Aug.	653,7	652,2	650,7	15,2	26,2	20,8	62	26	37	0	2	5	SW_{0-5}	SW_2	SW_1	
1379	19. »	649,7	648,8	649,5	14,8	22,6	18,2	76	37	45	5	5	2	SW_{0-5}	S_1	SW_{0-5}	
			+ 0,6			+ 5,1											
Reckingen	18. Aug.	656,1	654,5	652,7	15,3	26,8	19,7	65	29	68	0	0	0	NW_0	W_2	W_{0-1}	
1349	19. »	651,4	650,7	651,9	16,7	22,8	15,2	74	35	58	3	7	0	W_0	W_3	W_0	
						+ 4,8											
Weissenstein	18. Aug.	654,9	652,6	653,2	22,1	29,3	25,4	—	—	—	0	0	0	NW_0	NW_0	NW_0	Alpen hell
1290	19. »	652,2	650,1	652,3	23,4	26,2	18,5	—	—	—	0	0	0	SW_1	SE_1	SW_2	Alpen hell
						+ 4,9											
Braggio	18. Aug.	—	—	—	19,4	26,4	19,6	47	40	49	0	0	0	SE_0	SW_1	E_0	<
1313	19. »	—	—	—	17,0	17,7	17,0	64	—	69	2	4	3	S/NE_0	SW/SW_{1-2}	S/E_1	
						+ 4,5		Haarhygr.									
Gäbris	18. Aug.	662,8	660,7	659,3	24,6	29,2	24,0	5	7	10	0	0	1	S_2	S_3	S_3	
1253	19. »	658,2	657,9	657,7	21,1	25,0	20,0	4	6	21	0	0	1	SE_2	S_2	SE_2	
			+ 0,6			+ 4,5											
Schuls	18. Aug.	663,8	661,1	659,3	16,6	29,8	22,1	58	28	32	0	2	0	N_0	SW/S_0	NE_0	< S
1244	19. »	659,0	657,4	658,2	17,2	26,8	19,9	42	34	46	0	4	2	NE_0	SW/W_1	SW/NW_0	< W
						+ 4,3											
Churwalden	18. Aug.	—	—	—	18,9	27,9	18,2				0	0	0	S	S	-	
1213	19. »	—	—	—	18,8	23,1	17,5				0	2	0	SE	SE	-	
			+ 0,9			+ 4,0											
Airolo	18. Aug.	670,3	668,4	665,9	18,2	30,2	21,2				0	1	1	NW	S/NE_{1-2}	W_3	
1154	19. »	665,8	664,8	664,9	18,3	24,0	17,3				8	6	9	S/NE	S/E_{2-3}	E	
						+ 3,9		Haarhygr.									
Schwäbrig	18. Aug.	—	—	—	24,6	29,0	24,4	78	69	89	0	0	0	S_3	S_4	S_4	
1152	19. »	—	—	—	21,6	26,4	22,0	100	96	100	0	0	0	S_4	S_3	S_3	

Ort	Datum 1892	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7 1 9
						+ 3,9											
Beatenberg	18. Aug.	669,3	666,8	665,8	21,0	27,0	22,0	59	58	35	0	1	2	SW_0	W_2	W_1	
1150	19. »	664,5	663,8	665,3	20,0	27,6	15,6	57	34	63	1	2	0	S_0	E_1	E_1	— — ∢ i.8.
			+ 1,4			+ 3,6											
Göschenen	18. Aug.	671,2	669,1	667,4	21,4	30,2	24,2	43	75	36	0	0	6	S_1	S_1	NW/S_2	
1108	19. »	666,6	665,5	667,1	19,9	22,8	20,0	93	39	52	6	0	0	S/S_1	S/S_1	N_1	
						+ 3,7											
Chaumont	18. Aug.	670,3	668,4	668,0	21,6	30,0	22,2	65	33	47	0	0	0	W_0	E_1	N_2	
1128	19. »	665,2	664,9	666,6	21,8	25,8	14,9	91	88	96	0	0	2	S_2	SE_0	NW_3	
						+ 3,7											
Ober-Yberg	18. Aug.	—	—	—	21,0	29,0	20,6	65	29	48	0	0	0	NE_0	NE_0	NE_0	
1126	19. »	—	—	—	*21,5	27,0	21,2	—	27	36	0	1	0	—	SSE_{1-2}	S_{0-2}	
						+ 3,6											
Wildhaus	18. Aug.	—	—	—	23,0	29,8	24,0	—	—	—	0	0	2	E_1	E_2	E_2	
1096	19. »	—	—	—	21,8	26,8	21,0	—	—	—	0	0	4	E_1	E_{1-2}	E_2	
						+ 3,5											
Guttannen	18. Aug.	676,0	674,2	673,5	25,5	30,0	24,9	30	28	37	0	0	8	SE_2	SE_4	SE_3	In der Nacht 0,4 ●
1070	19. »	672,2	671,4	672,6	21,6	26,4	22,0	51	45	46	2	1	1	SE_2	SE_3	W_0	
			+ 0,9			+ 3,1											
Engelberg	18. Aug.	678,1	675,4	674,4	17,0	29,0	24,7	60	26	27	0	0	1	W_0	W_2	SE_2	Zeitw. ∢, F. i. d. H.
1021	19. »	673,0	672,9	673,1	22,4	27,2	22,0	36	28	31	1	1	0	E_{2-3}	S_{1-2}	SE_{2-3}	Süd-Ost-Sturm
						+ 3,0		Haarhygr.									
Brünnig	18. Aug.				20,6	29,0	26,1	67	56	30	0	1	9	NE_1	S_1	S_2	V. 2h p. an F² ∢
1010	19. »				23,2	27,6	23,1	45	32	37	1	1	0	SW_3	SW_3	SW_3	— F. ∢
						+ 2,9		Haarhygr.									
Les Avants	18. Aug.	681,8	679,8	678,2	16,6	24,4	22,6	35	40	35	0	0	0	N_0	S_0	S_0	
978	19. »	676,9	676,0	678,9	16,2	24,4	16,4	32	40	45	0	0	1	NE_0	S_0	S_0	
						+ 2,8											
Elm	18. Aug.	683,5	681,4	680,0	19,4	30,3	25,2	51	23	26	0	0	0	S_0	SE_2	SE_2	F. 1h beginnend F.
961	19. »	679,0	678,6	680,0	22,8	27,5	22,0	38	27	33	0	0	0	SW_1	SW_2	S_1	F. F. F.
			— 0,1			+ 2,5		Haarhygr.									
Einsiedeln	18. Aug.	688,0	685,6	682,6	17,0	27,0	16,8	73	50	60	0	0	0	E	NW	SW_2	
910	19. »	682,6	682,4	685,7	18,6	26,8	23,8	64	34	91	0	0	0	NE	SW_2	SW_3	
						+ 2,0											
Auen	18. Aug.	694,0	691,4	691,5	19,2	31,2	24,7	50	23	33	0	0	2	E_1	S_2	S/SE_2	
830	19. »	689,3	689,1	690,1	21,8	28,2	21,7	43	28	35	1	3	1	S/SE_1	S/S_2	S/S_3	
						+ 1,8		Haarhygr.									
Heiden	18. Aug.	696,3	693,9	692,5	25,4	33,1	27,0	29	15	18	0	0	0	E_0	S_3	S_{1-2}	
797	19. »	691,8	690,8	692,2	25,6	30,4	25,0	23	13	19	0	0	0	S_{2-3}	S_2	S_{2-3}	— — ∢ n.

Ort	Datum 1892	Barometer 7	1	9	Temperatur 7	1	9	Feuchtigkeit 7	1	9	Bewölkung 7	1	9	Wind 7	1	9	Bemerkungen 7 1 9
			+ 0,5			+ 1,8											
Affoltern	18. Aug.	695,6	693,0	691,6	22,0	29,4	22,3	72	52	78	0	1	3	SW_0	NE_0	NE_0	
795 m	19. »	690,6	689,5	691,8	21,1	28,3	18,6	76	59	77	0	1	1	NE_0	SW/NE_1	SW_1	Sehr stürmisch
			+ 1,0			+ 1,6											
Faido	18. Aug.	701,5	698,0	696,8	21,4	28,4	19,0	64	82	100	0	0	0	W_0	W_0	W_0	— — ●
759	19. »	696,9	696,2	695,7	21,0	26,1	21,0	74	77	91	1	5	3	W_0	SW_1	SW_0	2,2 mm
						+ 1,4											
Gurtnellen	18. Aug.	654,7	652,4	651,5	19,0	34,0	28,4	93	90	77	0	1	10	S	$SE/SW_{5\ 6}$	S/S_{1-2}	Föhnig
742	19. »	651,1	650,1	648,8	24,0	28,5	19,4	98	38	80	3	5	3	S/SW_{2-3}	S/SW_{3-4}	S, SW_{1-2}	Föhnig ● 2,5 mm
						+ 1,3		Haarhygr.									
Marsens	18. Aug.	—	—	—	16,6	26,2	18,2	90	63	76	0	0	0	S_0	E_1	SW_0	
727	19. »	—	—	—	16,2	26,2	17,4	90	58	75	0	0	1	S_0	N_0	S_0	6^h p. SW_8
						+ 1,3											
Langenbruck	18. Aug.	—	—	—	19,5	29,2	18,0	—	—	—	0	0	0	—	W_2	—	
718	19. »	—	—	—	19,2	28,6	17,8	—	—	—	0	0	0	S_1	SE_2	W_3	
			+ 0,3			+ 1,2											
St. Gallen	18. Aug.	703,5	701,3	699,7	21,6	29,3	28,6	60	52	42	0	0	0	⊙ still	NW_1	SE_2	< — F^2
703	19. »	698,9	698,0	698,1	22,5	30,1	24,8	55	14	25	1	1	0	⊙	SE_2	⊙	
						+ 1,2											
Castasegna	18. Aug.	706,2	704,6	702,8	20,7	27,7	21,8	59	41	62	0	1	0	E_0	SW_1	NE_1	— — <
700	19. »	702,1	701,0	701,7	20,2	25,8	20,2	67	55	65	2	4	4	NE_0	NW_0	NE_1	
						+ 1,2		Haarhygr.									
Haidenhaus	18. Aug.	704,2	702,0	700,1	22,2	30,2	25,6	87	66	48	0	0	0	SE_0	E	S_1	
695	19. »	699,3	698,8	698,8	23,0	29,2	23,8	66	49	47	0	0	0	SE_0	SE	SE_{1-2}	— — < am folgend. T. ●
						+ 0,9											
Ebnat	18. Aug.	708,4	705,6	704,6	19,2	33,2	23,2	—	—	—	0	0	2	E	SW	W	
649	19. »	703,5	702,6	702,8	19,0	33,6	23,4	—	—	—	0	0	1	SW	SE	S	
			+ 0,5			+ 0,9											
Lohn	18. Aug.	709,0	706,1	704,9	22,3	31,5	25,3	67	30	41	0	0	1	SW_0	SW_0	SW_0	
645	19. »	704,1	703,3	704,2	25,0	31,6	20,3	58	31	72	0	1	1	SW_0	SW_2	SW_1	— — < i. W.
						+ 0,6											
Chur	18. Aug.	712,6	709,7	708,3	20,2	34,5	23,4	58	21	46	0	0	0	SE_1	S_2	S_1	
610	19. »	707,8	706,8	709,2	21,0	29,9	22,0	50	24	45	0	0	0	SW_2	S_2	SW_1	
						+ 0,6											[Nacht ●
Meyringen	18. Aug.	711,4	708,3	707,6	18,2	30,1	27,6	78	37	—	0	1	8	S_0	E_{0-3}	SE_{0-2}	V. 10^h an F., i. d.
600	19. »	706,2	705,7	707,0	25,8	29,4	25,6	—	—	—	1	1	0	SE_{0-3}	SE_{0-3}	SE_{0-3}	F. bis 3^h p.
						+ 0,6											
Reichenau	18. Aug.	—	—	—	20,1	34,1	24,4	—	—	—	0	0	0	S_1	S_1	—	
597	19. »	—	—	—	20,6	30,2	21,5	—	—	—	0	1	0	SW_1	S_1	—	

Ort	Datum 1892	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7 1 9
						+ 0,5											
Bern	18. Aug.	704,4	711,4	710,0	18,9	28,5	23,8	77	48	75	0	0	1	SE_0	N_1	SW_0	Stürmische Winde
572 m	19. »	709,7	707,8	711,1	18,6	26,7	20,4	73	48	60	1	1	3	SE_0	N_1	NE_1	Stürmische Winde
			+ 1,0			+ 0,4											
Thun	18. Aug.	714,4	711,0	710,0	18,7	30,7	22,8	82	40	76	0	0	0	N_0	N_{0-1}	SE_0	
565	19. »	709,4	707,2	710,1	19,0	28,6	22,2	78	46	55	0	0	2	NW_0	SW_0	NW_{1-2}	
						+ 0,3											
Siders	18. Aug.	715,8	712,4	712,1	19,8	33,8	28,0	68	29	35	1	1	4	SE_0	NE_3	NE_{2-3}	— — F.
551	19. »	711,6	709,6	711,3	21,8	30,7	25,4	51	36	41	1	2	1	S_0	NE_3	NE_2	
						+ 0,3											
Lausanne	18. Aug.	715,9	713,5	712,0	20,6	29,2	21,0	—	—	—	0	0	0	NE_0	W_9	W_0	Nachts < ●
553	19. »	711,0	709,8	712,5	19,6	29,8	18,2	—	—	—	0	0	0	N_1	W_7	W_{16}	Nachts K ●
						+ 0,4											
Schwyz	18. Aug.	715,8	712,7	711,3	20,0	28,8	26,4	65	55	100	0	0	4	W	E	F.	
558	19. »	710,4	709,8	710,6	25,8	30,6	26,4	84	28	98	0	0	0	F^2	F^2	F^2	
						+ 0,2											
Sitten	18. Aug.	716,9	713,2	712,4	22,0	34,8	28,0	82	—	—	0	0	4	NE_0	E_1	E_2	
540	19. »	712,5	715,1	711,4	22,4	30,8	27,4	—	—	69	0	1	0	NE_0	E_1	E_3	
						+ 0,2											
Campro V.	18. Aug.	—	—	—	16,4	29,2	19,4	—	—	—	0	1	2	SE_0	SE_0	N/SE_0	In der Nacht ● 2,9
541	19. »	—	—	—	16,6	27,2	19,0	—	—	—	2	4	3	N/SE_0	N/SE_1	N/SE_0	
						+ 0,1		Haarhygr.									
Ragaz	18. Aug.	—	—	—	26	35	23	46	32	40	0	0	0	SW_3	SW_2	SW_2	
517	19. »	—	—	—	24	32	20	54	35	40	2	0	0	SW_2	SW_2	SW	
						0,0											
Sargans	18 Aug.	720,5	717,3	716,0	21,2	35,9	29,8	59	15	32	0	0	2	SE_{1-2}	S_{2-3}	S_2	Seit 7^h a. F.
507	19. »	715,2	714,2	715,4	23,0	32,4	25,7	54	30	40	0	1	0	S_2	S_2	S_2	Ganz.T. F. Alp. hell
						0,0											
Valeyres	18. Aug.	723,8	721,9	720,0	20,0	30,8	19,9	68	25	48	0	0	2	NW	SE	W	
505	19. »	719,2	718,8	720,0	18,0	30,5	20,5	70	32	60	0	2	9	SW	SE	W_4	— ↗ K —
			+ 0,4			0,0											
Sursee	18. Aug.	719,4	716,6	715,8	17,6	32,0	22,3	80	44	77	0	1	0	W_{0-1}	SE_{0-1}	N_1	
502	19. »	714,7	712,9	715,9	18,7	31,2	21,5	83	37	59	0	0	0	W_1	S_{0-1}	SW_3	— — föhnig
						— 0,1											
Glarus	18. Aug.	722,5	718,6	717,6	17,5	32,9	28,6	75	41	37	0	1	0	SW_0	S_2	S_1	F. seit 1^h p.
481	19. »	717,2	716,5	717,4	22,2	31,1	26,8	62	35	35	1	1	1	SW_0	S_2	S_2	F. F. F.
						— 0,1											
Martigny	18. Aug.	721,6	719,5	717,7	19,6	33,0	25,6	85	48	65	0	1	0	N_1	NE_1	S_1	— — < S
480	19. »	717,3	718,3	716,9	21,5	33,5	24,4	68	50	74	4	1	2	NE_1	SE_3	NW_4	— — K

Ort	Datum 1892	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7 1 9
						0,0											
Zürich	18. Aug.	721,1	718,1	716,1	21,4	31,0	26,4	75	37	25	0	0	2	E_0	E_0	SE_1	Stürmisch
493 m	19. »	715,8	714,8	716,6	20,0	31,8	22,7	72	24	36	0	1	2	NW_1	S_1	N_3	<
						0,0											
Neuchâtel	18. Aug.	721,3	718,4	716,5	20,3	30,4	24,3	83	49	58	0	0	1	NE_1	S_1	NE_1	Abends <
488	19. »	716,3	715,6	718,5	20,0	30,0	19,5	81	38	66	0	0	5	NE_1	NE_1	W_2	Abds. Sturm
						— 0,1											
Muri	18. Aug.	722,4	719,3	718,8	20,0	31,0	23,8	93	90	97	0	0	3	S	S	W, S	
483	19. »	717,4	716,0	718,1	19,4	30,9	22,2	96	95	98	0	1	0	S	W S	NW_3	
						— 0,2											
Altstätten	18. Aug.	722,9	719,7	718,2	21,6	32,2	30,2	63	33	26	0	0	0	W_0	E_1	S_3	Stürmisch
470	19. »	717,8	717,0	717,8	26,7	32,5	27,1	37	19	29	0	0	0	S_1	S_3	S_2	Stürmisch
						- 0,2											
U.-Hallau	18. Aug.	724,6	721,4	719,6	17,8	31,6	22,6	85	40	65	0	0	1	WSW_0	WSW_0	WSW_0	
465	19. »	719,5	718,2	719,8	18,6	30,5	21,3	78	27	62	0	0	0	WSW_0	SW_0	$W_{2\ 3}$	Abds. stürm. < W
						— 0,2											
Rorschach	18. Aug.	—	—	—	20,8	28,0	20,2	—	—	—	1	1	1	SW_1	SW_1	SW_1	
455	19. »	—	—	—	20,8	32,0	29,2	—	—	—	1	1	1	NE_1	NE_1	SW_3	
						— 0,3											
Buus	18. Aug.	723,0	720,4	718,7	19,2	30,6	20,7	90	40	78	0	0	0	S_0	NW_1	SE_1	
450	19. »	718,0	716,8	720,5	17,3	31,3	20,3	84	33	62	0	0	1	SE_0	S_1	W_1	Sturm 8-8½h p. <
						— 0,3		Haarhygr.									
Luzern	18. Aug.	724,7	721,4	720,0	19,3	29,4	26,1	73	39	18	0	0	3	SW_0	S_0	S_0	5–7h p. F² —
451	19. »	719,5	718,2	720,1	21,0	29,0	23,9	67	27	24	0	1	0	SW_1	SE_1	SW_2	n. F², Nm. F²
						— 0,3											
Altorf	18. Aug.	722,3	718,3	717,7	19,5	33,9	29,5	68	22	26	0	0	0	SW_0	S_3	$S_{2\ 3}$	
484	19. »	716,9	715,6	717,2	25,7	30,5	26,9	40	42	30	2	5	0	S_2	S_2	$S_{2\ 3}$	— 0,3 mm ● —
						— 0,4											
Winterthur	18. Aug.	724,9	721,6	719,9	20,0	29,9	21,7	70	51	71	0	0	0	SW_0	$NE_{0\ 1}$	SE_0	
445	19. »	719,6	718,5	719,6	21,2	30,8	27,0	66	33	29	0	0	0	SE_0	SE_1	S_3	< SW
						— 0,4											
Gersau	18. Aug.	724,5	721,2	721,0	19,5	26,6	26,2	79	64	43	0	0	0	NE	W		3½–5h p. F.
440	19. »	719,3	718,3	719,2	23,5	30,3	27,6	60	25	26	0	0	0	S	S_3		F. F.
						— 0,4											
Schaffhausen	18. Aug.	725,9	721,9	720,1	18,0	32,2	21,6	—	—	—	0	0	0	NW_0	SE_0	SE_0	
439	19. »	720,9	718,8	719,1	19,6	32,4	22,2	—	—	—	0	0	1	SE_0	SW_2	SW_1	
						— 0,4											
Kreuzlingen	18. Aug.	727,2	723,9	721,4	19,3	30,7	26,4	79	57	44	0	0	1		N_0	$SW_{1\ 2}$	F.
431	19. »	721,0	718,6	719,8	21,0	31,2	25,8	79	65	54	0	1	0	SW_0	N_0	S_1	F.

Ort	Datum 1892	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7 1 9
						- 0,5											
Frauenfeld	18. Aug.	727,3	724,5	722,3	22,0	32,0	23,0	70	33	65	0	0	0		S_1	S_0	Fohnig
427	19. »	722,2	721,1	721,2	23,0	32,0	22,0	66	33	50	0	0	0		S_2	SW_4	Fohnig — <
						0,6											
Genf	18. Aug.	727,9	725,0	723,5	19,4	28,1	25,8	78	52	46	0	0	0	S_0	N_1	SSW_1	
405	19. »	722,9	720,9	724,6	20,8	27,7	20,2	70	49	74	0	0	5	S_0	NW_0	S_0	3,6 5-6 p. ● K
						— 0,6											
Diessenhofen	18. Aug.	727,6	724,3	722,5	17,2	31,8	21,0	91	40	79	0	0	0	NE_0	ESE_1	NE_0	
400	19. »	722,3	721,2	721,8	19,0	31,6	21,0	82	28	58	0	0	0	SE_0	S_1	W_{0-1}	Wolkenrand in W
						— 0,6											
Aarau	18. Aug.	729,3	725,7	724,1	17,6	27,9	21,8	90	53	84	0	0	0	SW_0	S_0	S_0	
397	19. »	723,8	722,4	724,8	18,9	26,6	21,6	88	60	57	0	0	0	SW_0	NE_{0-1}	N_{2-3}	— — <
						— 0,6											
Olten	18. Aug.	728,7	724,9	723,6	20,3	32,2	22,5	83	49	74	0	0	0	SW_0	SW_0	SW_0	
395	19. »	723,7	721,9	724,9	21,3	30,5	22,9	79	53	66	0	0	6	S_1	SE_1	N_2	
						— 0,7		Haarhygr.									
Territet	18. Aug.	729,9	727,2	725,2	19,8	25,4	24,2	81	66	58	0	0	0	NE_0	SW_0	—	
389	19. »	724,8	722,6	725,9	19,2	25,4	22,5	74	58	57	0	0	0	E_0	S_0	—	
						— 0,7											
Montreux	18. Aug.	730,5	727,7	726,0	21,4	27,7	23,7	65	49	53	0	0	0	S_0	W_0	SE	— — < SE
380	19. »	725,5	723,9	726,9	21,4	27,0	22,9	65	43	50	0	0	0	NW_0	W_{0-1}	SE	K SE
						— 0,8											
Böttstein	18. Aug.	—	—	—	17,3	30,6	23,7	94	54	67	10	0	0	NE_0	NE_1	NE_0	
370	19. »	—	—	—	20,0	30,2	22,8	85	46	61	0	0	0	NE_0	NE_1	W_3	
						— 1,1											
Liestal	18. Aug.	733,9	730,8	729,1	20,7	32,2	24,0	—	—	—	0	0	0	E_1	W_0	SE_1	stösse < W
325	19. »	728,9	727,2	732,0	20,0	30,9	19,1	—	—	—	0	0	0	E_1	SE_1	E_0	8–9h heft. Wind-
						— 1,3											
Basel	18. Aug.	739,1	736,0	734,4	22,8	32,1	24,2	73	31	61	0	0	0	SE_1	SW_0	S_0	
278	19. »	733,7	732,2	736,3	21,0	31,3	20,6	73	34	68	0	0	2	E_1	E_2	S_2	● <
						— 1,3											
Lugano	18. Aug.	741,4	739,5	738,0	21,6	32,0	23,4	81	44	59	0	0	0	SE_0	SE_0	SE_0	
275	19. »	737,7	736,6	737,0	23,2	31,2	23,5	73	47	70	0	5	1	SE_0	SW_0	SW_0	3,6 mm K ●
			— 1,2			— 1,3											
S. Vittore	18. Aug.	742,4	739,2	738,0	21,0	33,6	23,4	62	41	65	0	0	0	E_0	NE_1	E_0	
270	19. »	738,6	735,8	737,0	22,0	32,6	22,8	73	45	74	0	4	0	E_0	W	E	
						— 1,6											
Locarno	18. Aug.	745,3	743,3	741,3	23,2	30,5	24,6	—	—	—	0	0	0	SW_0	S_0	SW_0	Sturm i. d. N. < SW
237	19. »	741,6	740,2	740,5	22,7	28,8	24,2	—	—	—	3	3	0	N_0	S_0	S_0	● 1,8 mm — —
						— 1,6											
Bellinzona	18. Aug.	745,6	743,3	741,7	19,9	30,3	24,7	70	49	64	0	0	0	NE_0	S_1	N_1	
232	19. »	741,6	740,2	740,7	21,0	28,9	24,3	80	55	70	0	2	1	NE_0	S_1	N_0	

Ort	Datum 1892	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7	Bemerkungen 1	Bemerkungen 9
						+ 8,8													
Säntis	28. Okt.	563,4	562,9	563,7	2,4	3,0	4,6	54	54	43	2	5	0	SSW_3	S_3	ESE_2			
2500 m	29. »	563,2	563,2	563,4	3,8	4,7	3,5	60	62	86	1	8	7	ENE_3	S_2	SSW_4			
	30. »	563,0	563,4	563,6	4,2	5,3	6,4	79	80	76	9	7	9	SSW_3	SSW_3	SSW_1			
	31. »	563,3	562,7	562,3	5,0	5,4	4,6	80	76	81	3	9	10	SSW_4	ESE_3	SSW_4			
	1. Nov.	559,8	559,2	559,7	4,9	3,8	1,4	80	85	80	9	6	1	SSW_5	SSW_4	SSW_4			
						+ 8,8													
St. Bernhard	28. Okt.	566,2	566,0	566,6	- 5,1	- 4,3	- 4,9	—		—	10	10	10	SW_1	SW_1	SW_1	≡		
2478	29. »	566,4	566,5	565,9	- 4,6	- 1,9	- 0,6			—	10	10	10	SW_1	SW_1	SW_2	≡ u. stürm.		
	30. Nov.	565,3	565,5	565,5	- 0,7	0,8	1,1	—			10	10	10	SW_2	SW_1	SW_1	≡ und Wind		
	31. »	564,9	564,1	564,1	0,5	0,9	- 0,6	—			10	10	10	SW_1	SW_1	SW_1	≡		
	1. »	561,7	561,4	561,8	- 2,4	- 1,3	- 1,6	—		—	10	10	10	SW_1	SW_1	SW_2	⋆		* 18,0 mm
			+ 0,9			+ 8,3													
Julier	28. Okt.	582,8	582,8	583,1	- 5,0	2,2	- 1,4	—			0	0	0	E_4	W_1	S_1			
2237	29. »	583,0	583,2	583,7	- 0,2	4,0	2,0	—			0	4	5	E_1	$N W_1$	N/W_0			
	30. »	582,8	583,3	582,4	2,0	5,3	2,0	—			10	7	2	$N E_1$	N/W_0	S/E_4	≡		
	31. »	581,1	581,2	581,1	0,0	3,0	7,0	—			6	6	3	$W E_2$	$W E_2$	S/SW_1			
	1. Nov.	579,4	578,8	578,1	5,0	1,0	1,0	—			10	10	2	$N E_4$	$N E_2$	S/E_2	≡	●	—
						+ 7,5													
Bernhardin	28. Okt.	595,8	596,1	596,1	- 2,0	1,4	0,0	—	—		10	6	5	S_2	S_2	S_2			
2070	29. »	596,1	596,1	596,1	0,4	2,8	1,8	—			10	10	10	S_1	S_1	S_1			●
	30. »	595,2	595,6	595,5	2,2	4,2	3,8	—			10	10	10	S_1	S_1	S_1	● 10,0 mm		●
	31. »	594,5	594,7	593,9	2,6	4,2	2,2	—			10	9	9	S_1	S_1	S_3	● 4,6 mm		
	1. Nov.	592,4	591,5	591,6	0,8	1,0	1,4	—			10	10	10	S_3	S_1	S_1	8,0 mm	*	*
						+ 7,5													
Pilatus	28. Okt.	592,8	592,6	592,9	6,8	3,4	6,2	38	85	38	4	2	0	NE_1	SW_1	SW_1			
2067	29. »	592,7	592,9	592,9	7,2	7,2	6,2	37	58	61	2	8	8	NE_1	SW_1	$SW_{2\ 3}$			
	30. »	592,2	591,6	592,1	6,4	7,8	8,4	61	64	57	5	3	8	SW_3	$SW_{2\ 3}$	SW_4	Stürmische Winde		
	31. »	592,3	591,3	591,4	8,4	9,2	7,2	60	57	62	3	8	7	SW_2	SW_4	SW_4	Stürmische Winde		
	1. Nov.	589,0	588,9	589,6	6,8	7,0	4,0	70	69	72	8	6	2	SW_2	SW_2	SW_2			
						+ 6,9													
Arosa	28. Okt.			—	3,6	10,2	2,1	35	22	54	0	1	0	NW	$SW_{1\ 2}$	NE			
1835	29. »	—	—	—	5,9	10,3	7,1	49	39	48	0	4	8	NE_{1-2}	$SW_{1\ 2}$	SE_1			
	30. »	—	—	—	7,6	9,7	9,6	31	50	52	8	9	9	NE	NE_1	SW_1			
	31. »	—	—	—	5,9	12,3	7,3	61	47	56	1	4	6	NW	SW_1	NE_1			
	1. Nov.	—	—	—	9,9	7,1	5,1	40	66	58	8	9	1	SW_1	SW_1	NE_1			
						+ 6,3													
Sils-Maria	28. Okt.	616,1	615,9	616,4	- 1,8	3,7	- 0,1	100	72	82	10	2	0	S_0	S_2	S_0			
1811	29. »	616,3	615,9	615,8	- 2,6	6,0	1,7	100	73	95	2	3	3	S_1	S_2	S_0			●
	30. »	615,3	615,0	615,2	2,7	9,4	4,2	95	69	88	8	10	10	S_1	S_2	S_0	≡		
	31. »	614,2	614,3	613,3	3,3	7,5	3,8	95	78	90	10	6	6	S_0	W_1	S_3	≡		
	1. Nov.	611,2	611,5	611,1	6,0	1,4	0,1	83	94	98	10	10	6	SW_3	S_1	S_1	● und *		

Ort	Datum 1892	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7	Bemerkungen 1	Bemerkungen 9
						+ 6,2													
Rigi-Kulm	28. Okt.	613,0	613,2	613,5	5,2	5,8	5,5	52	66	—	2	1	0	S_1	SW_1	—			
1787 m	29. »	613,0	612,7	613,0	6,7	7,0	6,0	48			3	1	3		SE_2	-			
	30. »	612,5	612,3	612,2	7,5	10,7	11,2		50	53	6	8	9		SE_3	SW_2			
	31. »	612,0	610,6	611,3	11,4	11,2	10,0	53	53	55	8	9	5	S_3	S_4	S_4			
	1. Nov.	609,4	608,6	608,7	9,2	8,0	6,2	66	69	84	10	6	1	S_2	S_2	S_1			
						+ 5,9													
Bevers	28. Okt.	623,9	623,5	624,1	− 3,6	5,7	1,9	92	54	77	1	2	2	W_1	$SW\ SW_2$	SW_1			
1711	29. »	624,3	623,3	623,8	− 3,8	7,9	2,1	100	66	100	2	3	7	SW/SW_0	SW/SW_2	SW_0			
	30. »	622,6	623,0	623,1	3,3	8,6	2,8	100	81	100	4	9	3	SW/W_1	SW_1	SW_0			
	31. »	622,2	621,7	621,2	0,3	10,1	4,3	100	67	99	3	3	4	SW_0	SW_1	SW_1			
	1. Nov.	618,4	619,0	619,1	9,5	3,7	− 0,2	59	100	100	8	10	5	S/SW_1	S_0	S_0	St. 8-9h a. ●	—	
						+ 5,4													
Grächen	28. Okt.	627,6	628,8	629,3	2,7	8,2	1,8				3	1	0	N_0	N_0	N_0			
1632	29. »	628,7	628,1	628,4	3,0	8,4	6,4	—	—	—	3	10	4	N_0	N_0	N_1			
	30. »	627,6	627,8	627,8	6,0	12,2	7,8	—	—	—	4	9	6	N_0	N_0	N_0			
	31. »	626,7	626,0	626,5	7,5	11,9	6,2	—	—		7	7	10	E_0	NE_1	NE_0			●
	1. Nov.	625,1	624,2	624,2	4,0	6,0	4,0	-	-		10	4	3	NE_0	NE_1	NE_1	●	- -	
						+ 5,3													
Zermatt	28. Okt.	628,9	628,8	630,5	0,0	8,0	− 1,0	—	—	—	0	0	0	SW_0	SW_0	—			
1613	29. »	629,8	629,2	629,6	0,0	8,4	9,0				0	10	10	NW_0	NW_0	-			
	30. »	628,6	628,5	629,0	10,2	11,8	7,4	-			8	10	8	S_2	NW_0	S_0	F²		
	31. »	628,2	626,3	627,4	8,2	10,8	6,0		—		10	10	8	NW_0	NW_0				
	1. Nov.	626,6	625,5	625,6	4,4	6,4	2,2	—			10	8	2	SW_0	SW_0	—	—	heft. F.	●
						+ 5,3													
Monte Generoso	28. Okt.	631,9	631,8	631,4	1,6	3,8	3,4	81	76	88	10	10	10	NW_1	NW_1	$E_{0\ 1}$			
1610	29. »	631,3	631,4	631,3	3,4	5,2	4,8	97	94	88	10	10	10	$E_{0\ 1}$	E_{1-2}	$E_{0\ 1}$		●	●
	30. »	630,1	630,4	630,4	5,8	6,8	6,6	97	97	97	10	10	10	$SE_{1\ 2}$	$E_{1\ 2}$	SE_0	●		●
	31. »	629,5	629,0	629,0	5,0	9,6	4,2	100	79	100	10	10	10	SE_0	$SE_{1\ 3}$	SE_{0-1}			
	1. Nov.	629,0	626,0	626,9	3,4	4,0	3,0	100	100	100	10	10	10	SE_{3-4}	SE_4	SE_4	●	●	●
			+ 0,6			+ 4,8													
Davos-Platz	28. Okt.	632,5	632,4	633,9	− 1,2	12,1	4,4	83	43	69	0	2	0	SE/SE_0	S/SW_0	SW_0			
1557	29. »	633,5	633,0	633,4	3,7	13,0	3,5	78	44	95	0	3	8	S/SW_{0-1}	S/SW_{0-1}	SW_0			
	30. »	632,8	632,7	632,0	6,6	11,9	5,2	73	55	81	8	10	7	SE/S_0	S/SW_0	SW_0			
	31. »	631,5	631,3	630,7	1,1	15,4	4,6	87	50	90	1	6	8	S/S_0	S/SE_0	N_0			
	1. Nov.	627,9	628,6	628,8	1,2	7,8	1,4	53	81	82	9	10	0	SE/S_{0-1}	SE/S_0	S_0	●	föhnig	●
			0,8			+ 4,6													
Splügen (Dorf)	28. Okt.	642,8	643,0	643,3	3,2	6,2	6,0	—	—	—	1	5	3	S/S_2	SW/SW_2	SW/SW_3			
1471	29. »	642,8	642,3	642,2	6,0	8,2	6,1	—	—	—	4	8	8	SW/SW_2	SW/SW_2	SW/SW_2			
	30. »	641,9	641,6	641,5	5,8	9,7	7,0	—	—	—	10	10	5	SW/SW_0	SW/SW_1	SW/SW_1			
	31. »	641,1	640,7	639,8	7,7	10,3	9,0	—	—	—	4	2	4	SW/SW_2	SW/SW_1	SW/SW_1			
	1. Nov.	639,0	638,5	637,9	5,4	4,4	4,7	—	—	—	10	10	10	SW/SW	SW/SW	SW/SW	●	●	

Ort	Datum 1892	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7	Bemerkungen 1	Bemerkungen 9
			+ 0,3			+ 4,5													
Andermatt 1448 m	28. Okt.	642,7	642,9	642,5	2,8	5,8	5,1	—	—	—	1	0	0	W/SW_{3-4}	W/SW_5	SW_5			
	29. »	642,7	643,5	642,5	5,1	7,8	2,5	—	—	—	0	8	2	W/SW_1	W/SW_1	W_2			
	30.	641,6	642,3	641,7	8,1	10,1	9,3	—	—	—	4	8	9	W/SW_1	W/SW_1	SW_2			
	31.	640,5	641,1	640,4	10,1	11,5	7,1	—	—	—	3	8	10	E/NE	SE/SW_1	SW/W_{3-4}			
	1. Nov.	638,2	638,3	637,7	5,5	6,1	6,1	—	—	—	10	10	8	W/SW_{1-2}	W/SW_{2-3}	W/W_{2-3}	●		
			+ 0,5			+ 4,4													
Leukerbad 1415	28. Okt.	645,1	644,8	647,3	4,6	10,2	4,2	52	52	56	2	0	0	NE	NE	NE_2			
	29. »	645,6	644,9	644,8	4,2	15,0	8,0	56	13	62	0	0	0	NE_2	SW	NE			
	30.	643,7	643,8	643,6	13,0	14,5	12,4	46	48	53	3	2	4	SW	SW	SW_2			
	31.	642,0	641,4	642,0	12,2	15,8	10,4	53	46	57	4	5	5	SW_2	SW_2	SW			●
	1. Nov.	642,0	641,0	641,0	10,2	12,0	8,0	44	47	87	10	0	2	SW	SW_3	SW_2			
			— 0,6			+ 4,2													
Platta 1379	28. Okt.	649,0	649,5	649,7	4,4	6,8	7,0	59	50	50	5	3	3	W/SW_4	W/SW_4	W/SW_4			
	29. »	649,3	649,3	648,5	7,6	9,0	9,6	57	59	61	6	8	9	SW_3	SW_2	SW_3			
	30. »	648,4	648,1	648,0	8,6	11,8	11,4	75	62	59	9	9	8	SW_2	SW_3	SW_3			
	31.	647,3	647,0	646,1	10,2	11,8	10,6	61	47	61	8	9	9	SW_3	SW_2	SW_2			
	1. Nov.	644,6	644,2	644,5	6,4	7,0	7,6	76	71	68	10	8	7	SW_3	SW_3	SW_1			
			+ 0,6			+ 4,0													
Reckingen 1349	28. Okt.	650,5	650,6	652,3	1,4	9,8	0,6	73	47	80	5	0	0	NW_0	W_{0-1}	W_0			
	29. »	651,6	650,9	650,9	- 0,7	11,4	6,4	87	63	81	0	10	10	NW_0	W_0	W_0			
	30. »	649,5	649,9	650,2	7,2	14,0	8,9	82	58	81	9	10	9	NW_0	W_{0-1}	NW_0			
	31.	648,9	648,7	649,2	7,6	14,4	6,9	78	51	94	5	10	10	NW_0	SW_1	W_0			
	1. Nov.	647,8	646,9	646,7	6,8	7,9	5,8	92	84	94	10	10	10	NW_0	W_{0-1}	W_0	●		
						+ 3,7													
Weissenstein 1290	28. Okt.	653,1	652,1	652,3	7,4	9,2	6,3	—	—	—	5	4	0	NW_3	NW_3	NW_1			
	29. »	653,1	652,7	652,8	7,2	14,6	12,0	—	—	—	5	7	2	SW_1	SW_1	SW_1			
	30.	651,8	651,5	651,8	14,7	18,4	14,8	—	—	—	8	7	2	SW_1	SW_1	SW_1			
	31.	650,8	650,5	648,8	11,9	19,5	14,4			—	6	5	2	SW_1	SW_1	SW_1			
	1. Nov.	645,7	646,0	646,7	14,6	18,7	14,0			—	7	5	4	SW_1	SW_1	SW_1	Alpen hell		
						+ 3,9													
Braggio 1313	28. Okt.		—		2,0	6,0	4,7		—	—	10	10	10	N_0	—	NE_0			
	29.			—	5,2	7,3	6,3		—	—	10	10	10	NE_0	N_0	NE_0			●
	30.			—	6,2	8,2	6,8			—	10	10	10	SE_0	NE_0	NE_0		●	
	31.			—	5,8	10,2	6,0				5	10	10	NE_0	N_0	SE_0			●
	1. Nov.			—	5,5	5,6	5,1			—	10	10	9	NE_1	N_0	NE_0	●	●	-
						+ 3,5													
Gäbris 1253	28. Okt.	655,0	655,8	655,9	9,0	11,0	9,0	28	27	29	0	0	0	W_3	W_0	SW_5			
	29. »	655,1	655,6	655,7	11,0	14,0	12,0	30	29	30	0	5	6	SW_8	SW_6	SW_8			
	30.	654,9	655,4	654,8	13,0	15,5	13,0	33	34	32	10	6	8	SW_{10}	S_8	S_{10}			
	31.	655,0	653,3	653,4	15,0	18,0	15,0	30	28	30	4	8	8	SW_8	S_8	S_{10}			
	1. Nov.	651,6	650,6	652,5	15,0	14,0	11,0	28	29	30	7	8	0	SW_8	SW_8	S_{10}			

Ort	Datum	Barometer			Temperatur			Feuchtigkeit			Bewölkung			Wind			Bemerkungen		
	1892	7	1	9	7	1	9	7	1	9	7	1	9	7	1	9	7	1	9
			+ 0,6			+ 3,4													
Schuls	28. Okt.	659,3	657,2	659,0	– 1,8	11,3	2,8	89	66	82	0	0	0	SE_0	W_2	NW_0			
1244 m	29. »	659,5	657,3	658,7	– 0,4	11,5	4,2	93	68	88	0	2	6	NW_0	SW/NE_0	W/NW_0			
	30. »	658,1	657,0	658,1	3,0	9,8	5,0	90	78	94	8	8	0	W/E_0	SW/E_0	E_0			
	31. »	657,6	656,3	656,1	1,4	10,9	5,8	100	75	89	1	3	3	S/E_0	SW/E_0	S/E_0			
	1. Nov.	653,3	653,8	654,0	6,7	9,0	5,8	84	87	92	5	10	4	SW/SE	NW	SW/N		—	●
						+ 3,4													
Churwalden	28. Okt.			—	6,7	12,2	7,8	—	—	—	0	2	0	SE	S				
1213	29. »			—	7,5	13,4	9,4	—			0	2	3	SE	SE	—			
	30. »				12,0	14,6	10,4		—		5	8	5	E	S	—			
	31. »			—	9,2	15,0	11,6		—		0	2	5	W	W	—			
	1. Nov.	—			14,4	9,5	6,0	—			5	8	0	SE	SE	—			
			+ 0,9			+ 3,1													
Airolo	28. Okt.	667,8	667,6	668,3	4,7	7,8	5,6	—	—		10	10	10	W E	E	W			
1154	29. »	666,8	666,9	667,0	5,4	6,8	6,4	—			10	10	10	SE E	E	W			●
	30. »	665,8	665,8	666,8	6,6	8,2	7,8				10	10	10	ENE	E	W	●	≡	●
	31. »	664,7	664,9	664,7	8,0	8,2	7,3		—		10	10	10	E	S/NNE	S NE	≡	●	●
	1. Nov.	662,8	662,4	662,8	7,0	7,1	6,0	—			10	10	10	E	W/W	W	●	●	●
						+ 3,1													
Schwäbrig	28. Okt.	—	—	—	6,2	11,4	9,2	73	99	68	0	1	0	0	0	S_3			
1152	29. »	—	—	—	10,6	14,4	13,0	71	64	70	0	6	6	S_3	W/S_3	E_3			
	30. »	—		—	13,8	16,4	16,2	70	72	68	10	0	10	S_2	S_3	S_3		föhnig	
	31. »			—	15,8	18,4	15,8	68	58	63	1	10	10	W S_3	S_4	W_4		F^2	F^2
	1. Nov.	—	—	—	15,4	15,2	11,4	67	79	100	10	4	0	0	S_4	S_4	—	F^2	
						+ 3,0													
Beatenberg	28. Okt.	663,7	663,5	663,7	6,0	11,8	7,4	68	55	52	3	2	0	NW_0	SE_1	NW_1			
1150	29. »	662,7	663,0	662,2	8,8	11,8	12,6	52	59	51	3	9	6	W_1	SSE_0	SW_1			
	30. »	661,8	661,4	661,6	12,8	17,5	16,0	58	52	39	2	9	6	NW_0	SW_0	SW_2			
	31. »	661,3	660,2	660,2	15,4	19,0	13,2	43	49	47	8	6	3	NNE_0	SW_0	NW_1			
	1. Nov.	658,3	658,6	659,8	12,4	15,7	8,2	62	40	67	8	4	2	E_2	SW_2	NE_1			
			+ 1,4			+ 2,9													
Göschenen	28. Okt.	667,1	667,6	667,9	6,6	9,9	8,8	97	100	100	0	0	0	S_2	S_2	S_2			
1108	29. »	667,3	680,0	666,1	9,0	12,2	11,6	100	100	100	0	6	7	S_1	SE S_1	S S_1			
	30. »	666,2	666,1	665,0	12,1	14,6	13,6	57	50	52	5	8	10	SE/S_1	SE S_1	SE S_2			
	31. »	664,7	664,9	663,9	12,8	12,9	11,2	57	58	64	8	10	9	SE/S_1	SE S_1	SE S_1			
	1. Nov.	662,2	662,5	661,8	10,0	10,2	9,8	68	72	67	10	6	8	S_2	S_1	SE/S_1			
						+ 3,0													
Chaumont	28. Okt.	664,4	664,0	664,3	7,5	11,4	8,8	67	49	49	1	2	0	W_2	SW_1	W_1			
1128	29. »	663,4	664,2	662,6	9,8	10,7	10,6	47	44	50	7	10	4	SW_2	W_1	NE_0			
	30. »	663,2	662,0	662,1	12,6	17,1	14,0	48	43	49	10	6	9	NW_0	E_1	E_1			
	31. »	662,0	661,3	661,2	14,8	17,7	14,9	44	48	44	9	8	8	E_1	NE_0	NE_0			
	1. Nov.	659,2	659,4	660,9	12,0	15,7	10,0	57	43	87	10	3	7	N_0	W_2	N_1	0,6 mm		●

Ort	Datum 1892	Barometer 7	1	9	Temperatur 7	1	9	Feuchtigkeit 7	1	9	Bewölkung 7	1	9	Wind 7	1	9	Bemerkungen 7	1	9
						+ 3,0													
Ober-Yberg	28. Okt.	–		–	1,8	10,2	3,4	72	61	71	2	0	0	NE_0	NE_0	NE_0			
1126	29. »				4,2	14,3	14,6	66	56	44	0	10	8	E_0	NE_0	SE_{0-4}			
	30. »	—	—	—	15,0	18,0	15,6	43	35	46	6	8	7	S_{0-4}	S_{0-4}	S_{0-3}			
	31. »	—	--	—	16,8	17,9	14,0	34	35	49	3	5	2	S_{0-4}	S_{0-3}	S_{0-2}			
	1. Nov.		-		14,0	15,8	8,8	50	44	56	9	2	0	S_{0-2}	S_{0-3}	S_0			
						+ 2,9													
Wildhaus	28. Okt.	—	—		5,0	11,2	10,0				10	2	5	W_2	W_1	E_{1-2}			
1096	29. »				9,8	15,6	14,6				0	5	6	E_1	W_1	E_2			
	30. »	—	—	—	13,2	17,2	15,2	—	—		10	5	2	E_{2-3}	E_{1-2}	E_1			
	31. »	—			14,0	19,0	14,2	—	—	—	0	4	0	E_0	E_0	E_1			
	1. Nov.	—	-	—	17,2	17,4	10,6	—		--	10	4	0	E_{3-4}	SW_2	NW_1			
						+ 2,8													
Guttannen	28. Okt.	671,7	669,3	671,6	5,4	11,1	10,4	75	40	43	4	2	0	SE_1	SE_4	SE_4			
1070	29. »	671,6	671,8	671,8	11,4	13,7	13,7	33	43	51	0	8	10	SE_4	SE_4	SE_3			
	30. »	671,2	671,1	670,6	14,8	16,4	15,7	46	47	49	6	7	8	SE_3	SE_3	SE_3			
	31. »	669,9	668,8	669,3	16,4	15,6	14,2	49	47	51	9	9	6	S_2	SE_4	SE_4			
	1. Nov.	667,8	667,7	667,3	10,0	11,9	12,6	67	55	50	10	5	5	SE_4	SE_3	SE_3	●		
			+ 0,9			+ 2,6													
Engelberg	28. Okt.	673,1	672,9	672,3	1,0	11,3	3,4	81	47	80	5	0	0	S	S_1	S_0			
1021	29. »	672,5	672,6	671,8	3,3	10,8	15,0	69	58	37	0	10	7	E_0	W_0	SE_{3-4}			
	30. »	671,2	671,2	671,5	16,0	17,7	16,8	36	40	39	5	9	5	SE_4	SE_{3-4}	SE_3			
	31. »	670,7	670,9	670,6	14,0	16,5	14,8	48	43	43	5	8	5	E_1	SE_4	SE_1			
	1. Nov.	667,8	667,8	668,8	11,6	15,4	11,0	80	37	47	9	8	1	SE_0	SE_4	SE_0	●	–	
						+ 2,5		Haarhygr.											
Brünnig	28. Okt.	—	—	—	3,4	11,1	12,2	80	57	56	3	1	0	NE_1	NE_2	SW_2			F.
1010	29. »	—	—	—	13,0	15,3	15,8	56	56	48	1	10	7	SSW_3	SW_3	S_4	F.	F.	F²
	30. »	—		–	16,5	19,3	17,2	47	45	50	1	7	9	SSW_2	SSW_3	SW_2	F²	F.	F.
	31.		–	—	17,3	17,6	15,2	47	47	51	6	8	3	S_2	SSW_2	SW_2	F²	F.	F.
	1. Nov.		—		14,8	16,3	13,2	52	48	54	9	1	2	SSW_4	NE_4	WSW_1	F²		
						+ 2,3		Haarhygr.											
Les Avants	28. Okt.	676,9	676,5	675,9	6,9	11,1	9,5	40	30	26	0	0	0	N_0	N_0	N_0			
978	29. »	675,2	675,7	675,4	11,0	15,5	13,2	26	23	26	3	2	2	N_0	S_0	S_0			
	30. »	674,8	673,7	673,5	11,4	18,5	15,6	28	25	21	3	0	2	NE_0	S_1	S_1			
	31. »	673,3	672,8	673,0	12,8	18,2	13,6	20	22	27	4	2	2	NEE_0	S_1	S_1			
	1. Nov.	671,0	671,4	672,7	12,2	16,4	9,8	48	35	46	3	0	0	N_1	S_1	E_1			
						+ 2,2													
Elm	28. Okt.	678,6	678,0	679,0	2,3	14,5	9,7	73	23	35	0	2	1	SW_0	SE_1	SE_2	—	F.	F.
961	29. »	678,6	678,7	679,0	12,7	16,1	15,5	37	31	34	0	4	6	SE_1	SE_2	SE_{2-3}	F.	F.	F.
	30. »	678,4	677,7	677,8	15,9	18,3	16,2	34	33	37	7	5	4	SE_2	SE_2	S_1	F.	F.	F.
	31.	678,2	678,1	677,0	14,9	18,6	15,7	38	32	35	1	5	5	S_1	S_2	S_{2-3}	F.	F.	F.
	1. Nov.	673,2	673,6	674,8	17,2	14,4	12,6	34	42	40	8	7	1	SE_1	SE_3	SE_1	F.	F. ●	F.

Ort	Datum 1892	Barometer 7	1	9	Temperatur 7	1	9	Feuchtigkeit 7	1	9	Bewölkung 7	1	9	Wind 7	1	9	Bemerkungen 7	1	9
			— 0,1			+ 1,9													
Einsiedeln	28. Okt.	683,2	682,8	682,9	0,2	9,4	3,0	95	56	70	2	4	0	N	NE	NE			
910 m	29. »	681,9	682,1	682,1	1,2	12,2	9,0	88	58	65	0	10	10	NE	NW	NW			
	30. »	680,5	679,5	679,5	10,4	17,7	17,5	78	34	34	10	8	5	NW	SE_2	SW_3			
	31. »	679,7	679,3	677,4	17,2	19,4	15,0	34	34	50	1	10	8	SW_3	SW_2	SW			
	1. Nov.	676,9	675,9	677,3	12,6	16,8	10,2	60	43	70	10	5	0	SW	S	S	In der Nacht Sturm		
						+ 1,6													
Auen	28. Okt.	689,8	689,4	689,6	3,4	12,8	9,7	79	46	45	0	2	0	NE_0	N_0	NE_1			
830	29. »	689,0	688,4	688,7	9,1	18,0	17,2	51	35	36	0	6	8	SE_1	SW, SW_3	$SW\ S_3$			
	30. »	688,2	687,8	687,4	17,6	19,8	18,2	38	38	38	8	8	10	S_3	S_3	S_1			
	31. »	687,9	687,4	686,6	13,0	20,1	15,7	57	33	47	3	9	8	SW/SE_1	S_3	$S\ N_1$			
	1. Nov.	683,1	684,0	685,0	16,7	16,6	13,4	44	37	41	9	6	3	SSE/N_1	SSE/SE_3	NE_1			
						+ 1,4		Haarhygr.											
Heiden	28. Okt.	691,5	691,6	690,7	2,0	14,1	13,0	80	32	22	0	2	0	S_0	N_1	S_3	Föhnsturm		
797	29. »	690,2	690,6	690,2	14,0	19,0	16,6	24	17	25	0	4	3	S_3	S_2	S_{3-4}	Föhnsturm		
	30. »	689,7	689,3	688,9	17,4	20,5	19,0	24	22	23	8	3	7	S_{3-4}	S_3	S_3	Föhnsturm		
	31. »	688,9	688,0	688,3	19,0	21,6	18,7	21	16	18	1	7	7	S_3	S_3	S_3	Föhnsturm		
	1. Nov.	686,3	685,6	687,3	16,9	17,8	14,6	24	24	24	4	5	1	S_1	S_3	S_3	Föhnsturm		
			+ 0,5			+ 1,4													
Affoltern	28. Okt.	691,1	690,5	690,4	3,9	13,7	6,9	91	64	87	7	1	0	SW_0	SW_0	SW_0			
795	29. »	689,6	689,9	688,4	6,2	12,5	9,7	80	72	85	4	9	9	SW_0	SW_0	SW_0			
	30. »	688,1	687,6	687,8	10,6	18,4	12,7	76	65	80	8	6	10	SW_0	SW/NW_0	NW_0			
	31. »	687,3	686,4	687,0	11,0	19,7	12,9	76	65	79	3	5	2	SW/NW_0	NW_0	SW_0			
	1. Nov.	684,6	685,2	686,7	11,6	18,1	9,6	77	61	87	8	4	1	SW_0	SW_0	SW_0			
			+ 1,0			+ 1,2													
Faido	28. Okt.	700,5	699,8	699,7	5,0	8,1	5,0	100	100	100	10	6	0	W_0	W_0	W_0			
759	29. »	699,5	699,0	698,8	6,2	9,2	7,2	100	90	100	10	10	10	SW_0	SW_0	SW_0	—	—	●
	30. »	697,4	697,8	697,0	7,3	9,1	9,1	97	97	97	10	10	10	SW_0	W_0	W_0	●	●	●
	31. »	697,0	696,1	696,1	8,1	10,0	8,2	100	93	100	10	10	10	W_0	W_0	E_1	●	●	●
	1. Nov.	694,7	694,2	694,0	8,1	8,1	7,0	97	93	95	10	10	10	W_0	W_0	W_0	●	●	●
						+ 1,2													
Gurtnellen	28. Okt.	—			12,0	14,2	13,4	44	39	44	5	2	1	SW/SW_6	SW/SW_6	SW/S_{5-6}	Föhnig		
742	29. »				14,2	15,5	16,2	48	48	50	2	6	10	SW/SW_{4-5}	SW/SW_4	S_{2-3}	Föhnig		
	30. »	—		—	15,8	18,6	17,0	53	53	70	5	10	9	SW_{2-3}	SW/S	SW	Föhnig		
	31. »	—	—		18,0	17,8	15,8	98	92	55	5	8	10	$S\ SW_{1-2}$	$S\ SW_{3-4}$	S_{3-4}	Föhnig		
	1. Nov.			—	12,8	14,5	14,0	79	59	58	10	6	6	S/SW_{3-4}	$S\ SW_{5-6}$	S_{3-4}	● Föhnig	—	
						+ 1,0		Haarhygr.											
Marsens	28. Okt.			—	0,0	11,2	2,6	100	85	85	3	1	0	SE_0	SW_2	SW_0			
727	29. »				1,4	10,8	5,0	95	86	91	7	9	4	S_0	S_0	SE_0			
	30. »				5,0	15,2	6,2	98	80	95	5	4	5	S_0	SE_0	SE_0			
	31. »				3,4	16,0	9,2	99	76	89	9	5	4	S_0	N_0	N_0			
	1. Nov.				7,2	15,0	5,8	95	75	80	9	3	3	S_0	E_0	S_0			

Ort	Datum 1892	Barometer 7	1	9	Temperatur 7	1	9	Feuchtigkeit 7	1	9	Bewölkung 7	1	9	Wind 7	1	9	Bemerkungen 7	1	9
						+1,0	−0,1												
Langenbruck	28. Okt.	—	—	—	0,5	13,7	5,0	—	—	—	4	2	0	0	S_2	0			
718	29. »	—	—	—	3,2	10,0	12,6	—	—	—	3	10	10	0	0	0			
	30. »	—	—	—	11,9	18,4	11,1	—	—	—	10	2	5	SW_1	SW_1	0			
	31. »	—	—	—	7,0	19,6	11,3	—	—	—	1	6	1	0	S_1	0			
	1. Nov.	—	—	—	11,1	17,2	6,2	—	—	—	5	5	0	0	0	0			
			+0,3			+1,0													
St. Gallen	28. Okt.	699,4	699,2	698,7	2,0	11,9	6,0	74	79	67	1	3	0	NW_1	N_1	NW_1			
703	29. »	698,2	698,3	697,5	6,8	16,0	12,4	62	49	52	1	7	8	W_2	0	NW_1	F²	—	
	30. »	696,7	696,8	696,2	14,9	20,2	20,0	47	41	37	9	7	9	SE_1	S_1	SE_4			
	31. »	696,2	695,1	695,5	14,3	23,1	17,0	54	31	43	2	8	9	NW_1	S_1	0			
	1. Nov.	693,3	693,0	694,6	19,4	19,2	12,9	32	38	64	8	4	1	SE_2	SE_3	SE_{1-2}			
						+1,0													
Castasegna	28. Okt.	706,4	705,6	705,8	5,8	8,4	5,5	77	76	90	9	9	10	N_0	W_0	NE_0			
700	29. »	705,3	704,8	703,8	6,4	9,1	8,0	86	84	92	9	9	9	NE_0	NW_0	NE_0	—		0,1 mm ●
	30. »	703,3	703,5	703,3	8,0	10,2	8,5	99	94	100	10	10	10	NE_0	W_0	W_0			
	31. »	702,8	701,6	702,2	7,5	12,8	8,2	100	82	100	10	9	10	W_0	NE_0	SW_0	—		4,1 mm ●
	1. Nov.	700,0	699,9	698,7	8,3	8,5	8,0	100	99	91	10	10	3	SW_0	NE_0	NE_0	—		23,8 mm ●
						+1,0			Haarhygr.										
Haidenhaus	28. Okt.	700,3	699,9	699,5	−1,0	8,0	6,6	100	83	87	2	4	0	SE_0	W/SE_{0-1}	SE_0			
695	29. »	698,9	699,1	697,9	8,4	10,1	13,0	68	70	60	1	9	9	NE_0	SW/NE_0	SE_{1-2}			
	30. »	697,5	697,4	696,9	12,6	18,8	15,6	60	55	58	9	3	10	SW/E_0	SW/E_{0-1}	E_0	Föhnig		
	31. »	696,8	696,0	696,2	14,8	18,6	15,8	56	57	51	1	8	6	SE	SE_1	SE_0			
	1. Nov.	693,5	693,8	695,2	17,6	17,0	13,4	48	62	63	8	3	0	SW/E_1	SW_1	S_0			
						+0,7													
Ebnat	28. Okt.	—	—	—	0,8	5,2	2,4	—	—	—	0	3	0	NE	SE	SW			
649	29. »	—	—	—	2,2	6,6	5,8	—	—	—	0	10	7	W	N	S			
	30. »	—	—	—	8,4	20,2	14,0	—	—	—	4	3	4	S	E	E			
	31. »	—	—	—	11,0	21,6	20,2	—	—	—	2	10	6	N	S	S			
	1. Nov.	—	—	—	10,0	21,8	7,4	—	—	—	8	6	2	S	E	S			
			+0,5			+0,7													
Lohn	28. Okt.	705,3	704,3	704,3	1,0	7,8	8,4	100	89	69	10	2	0	N_0	NE_0	NE_0			
645	29. »	703,6	703,7	702,7	9,0	11,2	9,8	59	66	72	2	2	2	SW/S_0	SE_0	NW_0			
	30. »	702,8	702,3	701,8	12,0	16,4	13,0	61	59	73	5	2	9	S/N_0	N_0	N_1			
	31. »	701,5	700,4	700,8	12,6	17,6	14,9	66	57	54	1	1	2	S/N_1	S/N_0	S/N_0			
	1. Nov.	698,3	698,3	699,6	12,7	19,1	11,0	65	41	81	5	2	2	N_1	SW/SW_2	SW_0			
						+0,5													
Chur	28. Okt.	708,6	708,5	710,5	6,0	16,0	8,7	63	34	54	0	1	0	SE_1	W_2	—			
610	29. »	710,0	708,9	709,0	7,7	17,8	12,2	63	37	61	0	5	7	SE_0	SW_3	SW_0			
	30. »	708,0	707,6	707,3	13,9	18,2	12,5	59	48	69	9	10	10	SW_0	W_1	W_1			
	31. »	706,9	706,5	706,0	9,9	19,5	12,2	71	39	65	1	7	1	SE_1	S_0				
	1. Nov.	701,8	704,6	704,6	14,8	14,2	9,4	55	60	86	9	10	1	SE_2	SW_1	SW_1	●		

Ort	Datum 1892	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7	Bemerkungen 1	Bemerkungen 9
						+ 0,5													
Meyringen	28. Okt.	708,7	706,5	706,4	2,1	10,8	8,0	100	70	71	10	1	0	SE_0	SW_0	SE_{0-4}	—	—	F.
600 m	29. »	705,9	706,1	705,7	15,2	17,8	16,5	85	41	57	4	9	4	SE_{0-4}	SE_{0-4}	SE_{0-4}	Föhn		
	30. »	705,1	704,7	704,2	18,2	21,1	19,8	47	40	58	2	9	7	SE_{0-4}	SE_{0-4}	SE_{0-4}	Föhn		
	31. »	703,9	703,5	702,5	19,8	21,0	18,7	72	75	64	3	2	4	SE_{0-4}	SE_{0-4}	SE_{0-4}	Föhn		
	1. Nov.	701,4	701,6	702,3	17,2	19,1	17,0	73	73	69	8	2	3	SE_{0-4}	SE_{0-4}	SE_{0-4}	Föhn		
						+ 0,5													
Reichenau	28. Okt.	—	—	—	5,3	16,5	8,5	—	—	—	0	5	0	SW_2	S_2	SW_1			
597	29. »	—	—	—	7,1	17,2	12,2	—	—	—	1	5	8	SW_1	S_1	S_1			
	30. »	—	—	—	11,4	15,5	12,6	—	—	—	9	9	8	S_1	S_1	S_1			
	31. »	—	—	—	10,9	20,1	12,7	—	—	—	3	5	2	SW_1	S_1	S_1			
	1. Nov.	—	—	—	15,3	14,8	9,2	—	—	—	7	10	0	S_1	S_2	SW_1			
						+ 0,4													
Bern	28. Okt.	711,2	710,1	710,1	2,9	9,7	5,8	100	67	95	10	2	4	SE_0	SE_0	SW_0			
572	29. »	709,1	709,5	707,9	1,7	8,9	7,8	97	77	93	7	10	7	SW_0	NE_1	W_1	—	—	●
	30. »	707,6	706,3	706,7	7,3	15,1	9,8	95	74	97	7	8	9	N_0	N_1	W_1			
	31. »	706,5	705,8	706,2	6,2	14,7	11,2	98	73	92	4	7	4	N_0	NW_0	SE_1			
	1. Nov.	704,0	704,2	705,9	9,0	15,4	9,5	89	58	89	7	5	3	S_{0-1}	NW_0	S_0			
			+ 1,0			+ 0,3													
Thun	28. Okt.	711,3	709,9	709,8	3,6	11,8	5,2	97	76	89	10	1	0	NNE_0	SE_0	NW_0			
565	29. »	709,4	709,4	707,1	2,4	11,0	14,4	93	79	55	2	9	9	ENE_0	SE_0	SE_{1-2}			
	30. »	707,1	706,2	706,0	7,6	18,5	13,6	91	60	70	7	8	8	NW_0	NNW_{0-1}	SE_0			
	31. »	706,4	705,0	705,3	7,2	18,9	13,8	92	62	63	8	4	5	N_0	SE_{0-1}	SE_1			
	1. Nov.	704,0	703,7	705,6	8,4	17,8	8,6	88	57	91	7	1	2	NW_0	SE_0	NW_0			
						+ 0,2													
Siders	28. Okt.	713,7	712,7	714,8	3,7	15,4	10,0	92	58	67	3	0	0	NE_0	NE_2	SW_0			
551	29. »	714,3	712,8	712,3	3,7	14,3	10,5	91	73	77	3	6	9	E_0	SW_1	SW_0			.
	30. »	710,9	710,3	710,4	10,8	19,4	17,2	78	59	67	4	6	6	SW_0	NE_2	NE_3	—	F.	F^2
	31. »	709,7	708,0	709,5	14,2	20,0	15,2	60	58	67	7	6	6	SE_1	NE_4	NE_2	F^2	F^2	F^2
	1. Nov.	708,2	706,3	708,3	12,8	15,2	13,0	80	87	77	6	6	5	NE_{3-4}	NE_3	NE_1	●	F^2	F^2
						+ 0,2		Haarhygr.											
Lausanne	28. Okt.	712,7	711,5	711,1	5,2	15,5	11,2	95	56	56	10	4	0	NE_0	S_4	N_9			
553	29. »	710,4	710,6	708,7	8,4	15,0	10,4	71	60	81	6	8	9	NE_0	S_0	E_0	—	●	—
	30. »	708,5	707,3	707,9	10,6	16,4	16,0	70	58	56	4	9	3	E_1	SE_5	E_6			
	31. »	707,4	706,6	707,4	12,3	18,4	14,7	64	60	60	6	4	4	SE_0	SE_0	SE_2			
	1. Nov.	705,3	705,9	707,7	13,1	19,3	10.6	70	49	86	7	8	5	NW_8	SW_8	NE_0	●	—	—
						+ 0,2													
Schwyz	28. Okt.	712,5	711,9	711,4	2,0	11,0	13,2	100	80	44	5	1	0	NW	N	F.			
558	29. »	711,0	711,0	709,8	13,6	16,1	17,8	80	55	76	0	10	8	F.	NW_1	F.			
	30. »	708,9	709,0	708,5	18,8	18,5	21,4	100	60	87	8	10	0	F^2	F^2	F^4			
	31. »	708,7	708,4	708,2	18,2	21,8	18,8	96	59	100	5	5	3	F^1	F^3	F^2			
	1. Nov.	704,8	705,5	707,1	19,0	19,6	16,2	100	76	98	10	4	1	F^4	F^2	—			

Ort	Datum 1892	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7	Bemerkungen 1	Bemerkungen 9
						+ 0,2													
Sitten	28. Okt.	713,6	713,0	715,3	5,4	16,4	8,6	79	40	66	3	2	0	SW_0	SE_0	0			
540 m	29. »	714,3	713,8	712,8	7,6	16,8	11,8	70	51	76	2	3	9	SW_0	E_0	0			
	30. »	711,1	710,1	712,2	10,2	20,0	14,2	80	49	66	4	6	5	SW_0	SE_0				
	31. »	709,9	708,6	710,5	13,6	21,8	16,0	65	35	—	8	7	6	SW	W_3				
	1. Nov.	707,4	706,8	709,0	13,4	17,4	11,4	84	68	78	8	1	6	S_0	SE_0	—	●	—	-
						+ 0,2													
Campro V.	28 Okt.	—	—	—	6,0	9,8	6,4	—	—	—	10	10	8	S_0	S_0	S_0			
541	29. »	—	—	—	6,9	9,4	7,8	—	—	—	10	10	10	SW/S_0	SW/S_0	SE			
	30. »	—	—	—	8,4	10,2	9,6	—	—	—	10	10	10	S_0	S_0	SE	●	—	—
	31. »	—	—	—	8,7	11,0	9,6	—	—	—	10	10	10	W_0	SW_0	SW_0	●	—	—
	1. Nov.	—	—	—	9,6	8,4	8,2	—	—	—	10	10	10	S_1	N_0	W_0	●	—	—
						+ 0,1		Haarhygr.											
Ragaz	28. Okt.	—	—	—	9	15	13	55	37	45	1	2	1	SE_1	S	SW_2			
517	29. »	—	—	—	12	19	16	52	40	50	1	5	6	S_2	S_2	S_2			
	30. »	—	—	—	17	19	17	55	50	55	9	8	9	SE_2	S_2	SW_2			
	31. »	—	—	—	12	22	15	72	45	45	3	7	6	SE_2	E_2	SE_2			
	1. Nov.	—	—	—	18	17	14	52	60	68	8	4	2	SE	SE	S			
						0,0													
Sargans	28. Okt.	717,0	715,7	716,9	3,5	15,5	13,2	95	43	45	4	1	0	W_{1-2}	S_3	S_3	Seit 9h a. F.		
507	29. »	716,8	715,2	716,2	11,3	19,4	15,8	51	39	50	0	5	8	S_2	S_{2-3}	$S_{2\ 3}$	F.	F.	F.
	30. »	714,8	714,7	714,9	16,3	20,0	17,4	50	45	52	7	7	5	S_{2-3}	$S_{2\cdot3}$	S_2	F.	F.	F.
	31. »	715,0	714,0	714,0	12,7	22,6	16,6	62	38	50	1	5	5	SW_{1-2}	S_2	S_{1-2}	F.	F.	F.
	1. Nov.	710,3	710,8	712,9	15,4	16,4	13,6	70	55	60	4	3	3	S_{1-2}	S_3	S_{1-2}	Föhnig, Alpen klar		
						0,0													
Valeyres	28. Okt.	715,3	714,6	714,5	2,0	9,8	4,0	95	90	95	10	9	9	W	E	NW			
505	29. »	713,4	714,0	712,8	4,0	9,3	9,0	95	90	80	9	9	7	W	SE	W			
	30. »	712,8	711,8	711,9	8,2	15,9	10,0	—	—	—	8	6	8	—	—	—			
	31. »	711,1	—	711,1	7,0	16,0	10,0	85	—	—	5	7	10	—	—	W			
	1. Nov.	709,0	709,9	711,0	9,8	19,2	9,0	95	42	75	9	4	7	NW	W	W			
			+ 0,4			0,0													
Sursee	28. Okt.	716,7	714,8	714,8	0,6	12,7	3,6	88	68	99	10	1	0	NW_0	$S_{0\ 1}$	E_1			
502	29. »	714,8	714,6	712,7	0,8	9,6	7,7	96	82	90	1	10	3	W_{0-1}	W_1	NW_2			
	30. »	712,1	711,8	711,5	6,7	15,6	9,4	96	68	95	6	9	10	W_{0-1}	SE_{0-1}	W_2			
	31. »	711,1	710,0	711,1	6,0	16,6	8,2	97	74	94	3	8	8	W_{0-1}	SW_1	SW_1			
	1. Nov.	708,7	708,7	710,8	8,6	17,8	7,8	94	66	93	10	8	1	S_0	W_0	SW_2	—	—	●
						— 0,1													
Glarus	28. Okt.	719,4	718,1	718,4	1,8	10,6	6,1	96	73	87	10	3	0	W_0	W_1	SW_0			
484	29. »	718,0	716,2	716,2	4,8	20,2	19,8	84	37	40	0	8	7	SW_0	SE_3	SE_3	Von 10h a. F.		
	30. »	715,8	715,3	714,8	20,2	23,0	21,3	39	38	76	3	8	8	SE_4	SE_{3-4}	SE_3	F^2	F^2	F^2
	31. »	716,1	714,8	714,3	13,8	22,8	20,0	72	34	46	1	7	7	SW_0	S_3	S_1	—	F^2	F^2
	1. Nov.	711,4	712,0	713,3	14,6	20,2	16,2	71	40	51	8	6	1	SE_1	SE_3	S_1	Föhnig, F.		

Ort	Datum 1892	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7	Bemerkungen 1	Bemerkungen 9
						— 0,1													
Martigny	28. Okt.	720,3	719,0	721,4	2,4	16,5	9,0	96	74	74	0	1	0	W_0	SW_1	SW_3			
480 m	29. »	720,7	719,1	718,4	5,5	17,8	13,8	89	61	82	5	7	10	SW_1	S_2	S_1			
	30. »	716,9	715,8	715,3	12,7	20,0	19,6	89	62	61	2	10	5	S_1	NE_2	S_5			
	31. »	715,6	713,8	715,2	16,0	22,4	15,6	74	59	83	5	5	2	NE_2	S_4	SE_2	—	K	—
	1. Nov.	713,7	713,6	714,6	13,9	17,6	12,4	79	75	79	5	4	5	SE_2	SE_2	SW_2	Gewitterhaft		
						0,0													
Zürich	28. Okt.	718,1	717,0	716,6	1,2	11,6	5,4	100	61	96	10	2	1	E_0	W_0	SE_0	≡	-	
493	29. »	716,1	716,3	714,3	2,4	9,6	7,8	100	86	95	2	10	7	N_0	NW_0	E_0	≡	-	
	30. »	714,6	713,8	713,4	9,2	18,2	13,2	80	56	72	8	2	10	N_1	W_1	NE_0			
	31. »	713,4	712,4	712,6	9,1	19,8	14,4	93	45	52	2	7	6	SE_1	S_2	N_1			
	1. Nov.	710,1	710,7	712,3	14,2	16,8	8,8	56	58	97	7	6	1	SW_0	$NW_{0\ 1}$	$NE_{0\ 1}$			
						0,1													
Neuchâtel	28. Okt.	718,3	717,3	716,9	2,5	6,1	5,2	100	99	100	10	10	2	NE_1	NE_0	NE_0	≡		—
488	29. »	716,3	716,2	714,9	3,5	8,3	7,1	100	97	94	9	9	7	NE_1	NE_1	N_1	≡	—	
	30. »	714,5	713,6	713,9	7,1	15,6	9,9	100	69	95	8	6	8	E_0	NE_0	NE_0	≡		
	31. »	713,5	712,6	712,5	7,0	13,8	11,2	100	82	94	5	7	9	W_1	SW_0	NE_0	≡		
	1. Nov.	710,8	710,8	712,9	9,1	17,1	9,9	100	71	93	9	3	7	NE_1	E_1	SW_0	0,5 mm	—	—
						— 0,1													
Muri	28. Okt.	719,2	718,3	717,8	2,2	7,2	5,6	96	97	92	10	10	0	NE	N	N			
483	29. »	717,6	717,8	720,8	1,2	8,4	8,0	87	97	92	4	10	8	W	W	W			
	30. »	715,9	714,9	714,4	6,9	13,5	13,4	97	98	81	10	6	10	W/W	W/W	W/W			
	31. »	714,4	713,4	713,9	9,6	16,8	13,2	88	82	85	4	9	7	W/S	W/NW	W/NW			
	1. Nov.	711,5	711,9	713,4	9,4	16,9	9,7	90	87	94	10	9	2	W/NW_1	W/NW	W/NW			
						— 0,1													
Altstätten	28. Okt.	720,1	719,5	718,2	1,2	6,1	11,7	96	89	45	10	8	0	W_0	W_0	S_2	Stürmische Winde		
470	29. »	717,9	717,4	717,4	15,7	20,3	18,7	35	31	32	0	4	3	S_2	S_2	S_3	Stürmische Winde		
	30. »	716,6	716,3	716,4	19,3	22,3	19,3	35	31	38	9	3	9	S_2	S_3	S_2	Stürmische Winde		
	31. »	715,8	714,8	715,3	19,3	23,5	20,6	35	26	30	5	9	9	S_1	S_1	S_2	Stürmische Winde		
	1. Nov.	712,7	713,3	714,3	14,5	19,4	17,1	59	42	34	6	4	1	SW_0	S_2	S_1			
						— 0,2													
U.-Hallau	28. Okt.	721,7	720,7	720,3	1,5	7,5	2,7	96	84	97	10	1	0	NE	NE	NE			
465	29. »	719,6	719,9	718,6	1,5	6,7	9,0	96	90	77	4	10	10	NE	NE	NE			
	30. »	718,3	717,4	717,2	6,4	16,0	14,1	91	70	68	8	4	10	NE	NE	NE	●	—	—
	31. »	717,0	716,0	716,5	8,8	8,0	11,1	89	56	86	2	6	5	NE	NE	NE			
	1. Nov.	713,8	714,3	716,1	10,6	14,8	7,7	80	56	92	9	4	0	SE	SE	SE			
						— 0,2													
Rorschach	28. Okt.	—	—	—	2,4	5,6	5,6	—	—	—	10	10	1	SW_1	NE_1	NE_1			
455	29. »	—	—	—	5,4	14,2	8,8	—	—	—	1	5	5	SW_1	NE_{1-2}	SW_{1-2}			
	30. »	—	—	—	8,8	14,2	21,0	—	—	—	8	3	1	NE_1	SW_1	S_5	—	—	F^2
	31. »	—	—	—	11,0	16,2	20,6	—	—	—	3	6	3	SE_{2-5}	SE_2	S_5	—	—	F^2
	1. Nov.	—	—	—	19,6	21,4	10,2	—	—	—	5	4	1	S_{2-5}	S_4	S_1			

Ort	Datum 1892	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7	Bemerkungen 1	Bemerkungen 9
						0,2													
Buus	28. Okt.	719,7	718,3	718,7	2,3	13,5	7,3	98	68	85	7	1	0	E_1	E_1	N_1			
450 m	29. »	718,1	718,3	717,2	6,7	10,4	11,0	86	83	68	6	10	10	SW/E_1	E_1	S_1		●	
	30. »	715,8	715,9	716,0	11,5	18,0	15,0	77	60	74	8	2	10	S_1	E_1	S_1			
	31. »	715,3	714,3	715,4	11,8	19,1	11,1	77	58	93	1	6	7	E_1	$SW\ E_1$	NE_1		●	
	1. Nov.	713,4	713,2	715,1	7,9	14,5	8,0	94	80	94	10	9	2	E_0	SW_0	E_0			
						— 0,2		Haarhygr.											
Luzern	28. Okt.	722,2	720,8	720,5	2,6	8,9	4,8	100	84	98	10	0	0	S_0	SE_{0-1}	SW_0			
451	29. »	720,0	720,2	717,8	1,8	9,4	8,3	98	84	86	0	10	4	S_0	SW_0	S_0			
	30. »	718,3	717,1	716,7	7,5	15,7	13,6	91	57	55	3	7	10	S_0	SW_{0-1}	NW_1	Föhnig 2h p. 40%		
	31. »	717,1	715,3	716,3	7,8	20,4	14,1	97	23	54	3	8	3	SW_{0-1}	$S\ E_4$	$S\ NW_1$	Heft. F. 12½-5½		
	1. Nov.	713,9	714,3	716,2	12,2	17,2	10,3	65	53	77	2	4	1	NW_1	SW	SW	1½ 30% F^2		
						— 0,1													
Altorf	28. Okt.	719,4	717,6	718,3	4,0	17,1	14,9	95	40	37	5	1	0	W_0	S_3	S_3	Stürmische Winde		
484	29. »	718,3	718,1	717,4	15,7	16,7	19,1	40	50	37	0	10	8	S_{2-3}	S_3	S_3	Stürmische Winde		
	30. »	716,8	716,1	716,1	18,9	20,9	20,5	43	40	38	7	9	9	S_{2-3}	S_3	S_3	Stürmische Winde		
	31. »	716,0	716,1	715,5	20,1	21,3	19,2	38	39	41	4	10	5	S_{2-3}	S_2	S_{2-3}	Stürmische Winde		
	1. Nov.	713,1	712,6	714,1	18,5	19,4	17,3	43	35	41	8	5	3	S_{2-3}	S_3	S_3	Stürmische Winde		
						— 0,3													
Winterthur	28. Okt.	722,3	721,4	720,8	1,8	8,3	2,8	87	75	86	10	1	3	S_0	S_0	S_0			
445	29. »	720,5	720,4	718,8	0,8	8,9	5,9	85	84	90	1	10	10	SW_0	SW_0	SW_0			
	30. »	718,9	718,1	717,9	6,2	15,8	8,8	88	69	92	8	1	10	SW/E_0	SW_0	SW_0			
	31. »	717,8	716,4	716,8	6,3	15,6	9,8	90	76	85	1	8	5	SW_0	SW_0	SW_0			
	1. Nov.	714,1	714,7	716,4	7,9	17,4	7,7	88	58	90	6	4	0	SW_0	SE/SW_1	SW_0			
						— 0,3													
Gersau	28. Okt.	721,9	720,3	722,0	5,2	9,6	9,0	94	81	84	10	0	0	NW	W				
440	29. »	719,9	719,9	717,7	8,2	13,4	19,4	83	67	36	0	10	6	SE	SE		—	—	F.
	30. »	718,0	717,6	717,0	20,1	21,9	22,0	35	35	43	2	4	9	S_3	S_4		F.	F.	F.
	31. »	717,1	717,2	716,3	16,1	22,1	19,4	69	32	39	3	6	3	S_1	S_1	–	F.	F.	F.
	1. Nov.	714,3	714,3	715,7	20,4	19,4	12,5	36	37	74	5	7	0	S_4	S_1	-	F.	F. b. 7hp.	
						0,3													
Schaffhausen	28. Okt.	723,0	721,7	721,5	2,0	6,6	1,2		—		10	3	0	SW_0	SE_0	SE_0			
439	29. »	721,2	720,9	720,1	0,0	7,6	7,4		—	–	10	10	8	SE_0	SW_0	NW_0			
	30. »	719,6	718,3	718,5	5,6	17,6	12,4	—	—	- -	9	3	10	SE_1	NE_0	NE_0			
	31. »	718,4	717,0	717,5	7,2	17,2	9,6		—	—	7	7	2	E_0	SE_1	NW_0			
	1. Nov.	715,0	715,6	717,0	9,8	17,0	7.0	—	—	—	9	6	0	E_0	NE_0	NW_0			
						- 0,3													
Kreuzlingen	28. Okt.	724,0	723.7	721,6	4,2	5,1	3,9	93	100	97	10	10	0	E_1					
431	29. »	723,4	720,0	720,6	3,8	6,3	4,9	93	91	97	6	0	0	—	-	-			
	30. »	719,4	718,9	719,0	7,5	10,9	6,9	97	87	91	10	0	0	W_0					
	31. »	718,1	717,1	716,4	10,3	15,9	14,6	93	90	67	3	6	5	—	–				
	1. Nov.	715,2	714,9	715,5	10,9	16,8	14,9	93	75	87	7	3	1	—		—			

Ort	Datum 1892	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7	Bemerkungen 1	Bemerkungen 9
						— 0,4													
Frauenfeld	28. Okt.	724,7	722,2	723,3	1,1	7,6	2,6	93	62	95	10	4	9	E_0	E_1	E_1			
427 m	29. »	722,8	722,9	722,9	0,0	4,4	6,7	100	77	91	8	10	2	—	SW_0	SW	Föhnbeleuchtung		
	30. »	721,6	720,6	720,3	6,0	16,0	11,0	92	79	96	5	5	5	S_0	S_1	SW	—	föhnig	—
	31. »	720,2	719,1	719,3	7,2	16,0	10,0	97	89	87	3	8	10	S_0	—	—			
	1. Nov.	716,7	716,8	718,6	9,3	19,0	9,5	84	85	93	8	3	0	SW_2	SW_0	N_0			
						— 0,4													
Genf	28. Okt.	725,9	723,9	723,6	2,4	7,8	7,0	100	91	94	10	3	0	S_0	E_1	S_0			
405	29. »	723,3	723,2	721,8	5,0	11,3	8,0	100	86	97	10	10	10	S_0	S_0	S_0	●	—	—
	30. »	721,8	719,9	720,1	8,6	16,0	9,8	86	59	84	10	10	1	S_0	S_0	S_0			
	31. »	720,0	719,0	718,9	6,8	19,6	12,6	91	54	86	10	6	10	S_0	S_0	S_0	—	—	●
	1. Nov.	718,2	718,1	720,0	9,6	16,4	11,8	92	77	83	6	10	10	S_0	S_0	S_0	1,0 mm	—	●
						— 0,5													
Diessenhofen	28. Okt.	725,2	724,2	723,7	1,7	5,8	1,2	100	90	100	10	1	10	S_0	SE_{0-1}	E_0			
400	29. »	723,3	723,2	721,9	— 0,4	7,2	6,6	100	95	96	6	10	10	E_0	SW/NW_0	NE_0			
	30. »	721,7	720,8	720,5	5,0	15,2	10,0	95	73	96	8	0	10	NE_0	SW/NE_1	NE_0			
	31. »	720,5	719,2	719,6	6,4	16,2	9,0	98	74	97	1	2	6	N_0	NE_0	NE_0			
	1. Nov.	717,1	717,0	718,8	7,8	18,3	6,0	95	61	96	9	0	0	N_0	SW_0	NW_0			
						— 0,5													
Aarau	28. Okt.	726,5	725,4	724,9	3,0	7,2	3,7	97	83	100	10	1	0	SW_0	NW_0	NW_0			
397	29. »	724,8	724,9	722,9	2,9	6,6	6,9	97	92	94	10	10	10	W_0	SW/NW_1	NW_0			
	30. »	722,7	721,9	721,3	6,7	14,3	9,9	94	75	97	10	9	10	SW/NW_0	SW/NNE_1	SW/W_0			
	31. »	721,7	720,2	720,8	6,1	13,5	11,1	100	80	97	10	9	1	NW_0	SW/W_0	SW/W_0			
	1. Nov.	718,7	718,7	720,6	8,1	14,4	8,3	96	79	97	9	10	0	SW/W_0	SW/W_0	WNW			
						— 0,5													
Olten	28. Okt.	726,3	725,4	724,9	3,4	8,3	4,5	97	87	97	10	2	10	SW_0	W_0	—			
395	29. »	724,8	724,9	722,8	3,0	7,4	7,4	97	94	95	9	10	10	—	—	—			
	30. »	722,6	721,8	721,1	7,4	15,8	10,1	95	74	95	8	4	10	—	SW_0	SW_0			
	31. »	721,7	720,1	720,6	7,4	15,0	11,0	97	80	94	10	7	6	—	—	—			
	1. Nov.	718,7	718,2	720,5	8,3	15,9	8,8	96	77	96	9	7	0	SE/S_1	S_0	—			
						— 0,5		Haarhygr.											
Territet	28. Okt.	727,0	725,4	724,8	5,2	9,2	16,6	96	96	36	2	2	0	SE_0	SW_0	—			
389	29. »	724,0	724,0	722,8	15,4	13,0	17,2	40	82	48	7	8	8	NE_1	W_0	—			
	30. »	723,1	720,0	721,6	10,3	20,2	19,4	93	50	46	5	10	3	E_0	E_1	—	—	F^2	F^2
	31. »	721,0	720,2	722,7	19,0	15,6	18,4	47	66	50	4	8	3	W_0	W_0	—	F.	—	—
	1. Nov.	719,3	718,9	722,0	16,6	18,9	14,6	58	48	71	3	4	7	E_0	E_1	—			
						— 0,6		Haarhygr.											
Montreux	28. Okt.	728,0	726,8	725,5	5,0	9,5	15,1	92	84	36	0	1	0	NW_0	SW_0	—	—	—	F^2
380	29. »	725,1	725,4	723,4	14,5	13,1	18,0	37	67	36	9	9	10	S_{1-2}	SW_0	—	F^2 F. 6-10h p.		
	30. »	723,6	724,6	723,4	10,3	19,3	19,3	81	46	38	3	5	5	N_0	S_1	—	—	F.	F.
	31. »	721,9	721,4	721,6	16,3	16,3	18,1	45	54	38	8	2	3	W_0	W_1	—	V. 9h a. F.		
	1. Nov.	719,7	720,1	722,5	17,3	17,9	12,7	44	41	65	4	1	10	S_{1-2}	S_{2-3}	—	F. bis 2h p.		

Ort	Datum 1892	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7	Bemerkungen 1	Bemerkungen 9
						0,6													
Böttstein	28. Okt		—	–	3,2	9,0	3,4	97	81	79	10	1	0	NE_1	S_0	S_0			
370 m	29. »				2,2	7,1	8,2	96	94	89	10	10	10	NE_0	NE_0	SW_0			
	30. »				7,2	15,3	11,2	94	67	95	10	6	10	SW S_1	SW S_1	S_1			
	31. »				7,5	18,0	11,2	83	66	93	0	0	2	W_1	NE_0	NE_0			
	1. Nov.				8,8	15,3	7,9	92	78	97	10	10	0	W_1	NE_0	NE_1			
						0,8													
Liestal	28. Okt.	731,3	729,1	729,5	2,1	13,0	5,4				8	1	0	E_0	W_1	W_0			
325	29. »	729,5	729,6	727,8	5,5	9,6	12,0				5	10	10	SW E_1	SW, W_0	SW_1			
	30. »	727,1	727,2	726,7	12,0	17,8	11,0				9	3	10	SW_0	E_0	E_0			
	31. »	726,5	725,0	726,1	8,7	19,2	9,4				3	5	3	E_1	W_1	E_0			
	1. Nov.	724,5	724,2	726,2	7,7	14,1	8,7				10	9	2	SE E_0	SW_1	E_1			
						1,0													
Basel	28. Okt.	735,9	734,1	734,2	3,6	13,2	9,5	92	68	78	4	1	0	E_2	SE_1	E_1			
278	29. »	734,1	734,6	732,7	5,9	9,8	13,1	84	78	61	4	10	10	SE_1	SE_1	SE_1	0,3 mm	—	●
	30. »	732,2	731,8	731,8	11,5	16,8	10,4	82	78	95	9	0	10	SE_1	N_0	N_1	—	—	●
	31. »	731,5	730,6	731,6	7,3	16,4	11,2	98	63	96	3	5	10	SW_1	N_1	SW_1			
	1. Nov.	729,5	729,4	731,1	8,2	14,0	9,0	100	84	100	10	7	3	E_1	SE_1	SE_1	Abends <		
						1,0													
Lugano	28. Okt.	743,8	742,8	742,8	7,4	10,8	8,6	93	81	95	8	9	10	SE_0	SE_0	SE_0			
275	29. »	742,6	742,1	741,5	8,6	11,0	10,4	95	87	90	10	10	10	SE_0	SE_0	SE_0	2,8 mm	—	●
	30. »	740,5	740,4	740,3	8,6	11,2	10,0	98	99	99	10	10	10	SE_0	SE_0	SE_0	●	●	●
	31. »	739,7	739,2	739,5	10,8	12,0	10,8	97	91	97	10	10	10	SE_0	SE_0	SE_0	18,3 mm	—	●
	1. Nov.	737,0	736,0	735,7	10,8	10,6	9,7	97	95	95	10	10	10	N_0	SW_0	SW_0	● 39,1	●	●
			1,2			1,1													
S. Vittore	28. Okt.	743,8	742,8	743,2	6,8	11,2	8,6	100	85	100	6	9	10	E	NE	E			
270	29. »	743,3	742,3	741,8	8,6	11,2	9,6	97	90	100	10	10	10	E	E	E			
	30. »	740,5	740,7	740,1	9,8	12,8	10,8	97	88	100	10	10	3	E	E	E	●	—	
	31. »	740,1	739,6	739,6	11,4	12,6	12,0	97	93	90	10	10	10	E	E	E	●		
	1. Nov.	737,7	738,6	736,6	10,4	11,0	10,0	100	97	100	10	10	10	E	E	E	●	●	●
						1,3													
Locarno	28. Okt.	747,8	747,1	746,9	8,2	10,8	9,0				8	8	8	N_0	N_0	N_0	●		—
237	29. »	746,5	746,0	745,1	9,4	10,7	10,0				9	10	10	E_0	E_0	E_0			
	30. »	744,4	744,3	743,9	9,7	11,2	10,7				10	10	10	E_0	E_0	E_0	●	—	—
	31. »	743,5	742,7	743,3	11,2	11,7	10,2			—	10	10	10	E_0	S_0	W_0	●	—	—
	1. Nov.	740,4	740,7	740,0	11,0	10,5	9,8				10	10	10	E_1	E_0	E	Regnerisch		
						1,3													
Bellinzona	28. Okt.	747,7	747,0	746,9	7,5	9,5	9,0	90	84	89	8	10	10	S NE_0	N_0	N_0	●	—	
232	29. »	746,6	746,0	745,0	8,2	10,4	10,0	94	88	87	10	10	10	NE_0	NE_0	N_0			
	30. »	744,3	744,4	744,0	9,5	10,6	10,4	91	97	97	10	10	10	N_0	N_0	N_0	●		
	31. »	743,4	743,0	743,2	10,8	12,3	11,4	96	82	90	10	10	10	SW_0	SE_0	SE_0	●	-	●
	1. Nov.	740,8	740,5	740,1	11,2	10,3	9,6	94	95	97	10	10	9	SE_0	SE_0	N_0	●	●	

Ort	Datum 1897	Barometer 7	1	9	Temperatur 7	1	9	Feuchtigkeit 7	1	9	Bewölkung 7	1	9	Wind 7	1	9	Bemerkungen 7	1	9
Säntis	8. Dez.	560,3	557,4	553,1	-4,0	-4,1	-3,5	53	100	100	7	10	10	WSW_6	SW_6	WSW_4	—	*	*
2500 m	9. »	550,4	549,5	550,4	-10,5	-10,2	-11,8	100	100	100	10	10	10	WSW_4	WSW_3	WSW_1	—	*	*
St. Bernhard	8. Dez.	564,3	562,0	558,3	-3,9	-2,4	-3,4	—	—	—	7	10	10	SW_1	SW_1	SW_1	—	*	*
2478	9. »	554,5	553,0	553,2	-7,8	-8,7	-11,9	—	—	—	10	10	10	NE_2	NE_1	NE_1	*	*	*
Julier	8. Dez.	579,7	578,4	573,7	-0,4	-1,8	-2,4	—	—	—	10	10	10	N/SW_2	N/NW_1	N/NW_1			
2243	9. »	572,8	571,1	569,9	-8,0	-8,6	-10,2	—	—	—	10	5	10	N/SW_3	N/SW_1	N/SW_1			
Bernhardin	8. Dez.	592,3	589,7	586,9	-1,8	-1,6	-4,0	—	—	—	8	10	10	S_1	S_2	S_2	—	—	*
2070	9. »	582,6	581,7	582,1	-3,8	-4,2	-8,0	—	—	—	10	8	10	S_1	N_1	N_1	*	—	*
Pilatus	8. Dez.	591,2	588,1	585,2	-2,3	-2,6	-1,5	—	—	—	5	10	10	SSW_3	SSW_4	SSW_5	—	*	*
2067	9. »	582,0	580,8	582,3	-8,0	-8,2	-8,4	—	—	—	6	10	10	SSW_4	SSW_3	SSW_2	—	*	*
Sils-Maria	8. Dez.	612,4	609,9	605,7	-5,7	0,6	-2,3	85	76	98	10	10	10	SE_1	S_2	S_3	—	—	*
1809	9. »	601,5	600,4	601,8	-3,4	-1,0	-7,3	100	54	93	8	3	10	SW_2	S_2	E_2	—	—	*
Rigi-Kulm	8. Dez.	612,6	609,2	605,8	-0,2	-1,4	0,0	55	75	95	9	10	10	SW_2	NW_2	W_4	—	—	*
1787	9. »	603,3	602,1	603,4	-5,6	-6,0	-7,5	95	100	100	6	10	10	W_4	NW_3	NW_2	—	*	*
Grächen	8. Dez.	627,6	624,6	620,8	-0,4	2,3	-0,6	—	—	—	7	10	10	S_0	S_0	S_0	—	*	*
1632	9. »	618,5	616,3	617,1	-2,2	-1,7	-4,5	—	—	—	10	10	8	E_{3-4}	S_4	S_3	*	—	—
Monte Generoso	8. Dez.	672,8	625,2	623,2	0,8	0,4	-1,6	89	93	96	6	10	10	SE_1	SE_1	SE_1	—	—	*
1610	9. »	617,4	616,0	615,8	-2,4	-0,4	-5,2	100	60	91	10	0	5	NW_1	NW_2	NW_3	*	—	—
			+0,9																
Splügen (Dorf)	8. Dez.	639,7	637,1	633,4	-0,2	3,7	1,1	—	—	—	3	10	10	SW/SW_2	SW/SW_3	SW/SW	—	—	*
1471	9. »	630,0	628,5	630,1	-1,3	0,0	-5,3	—	—	—	10	3	10	NE/NE_1	NE/NE_1	NE/NE	*	—	—
								Haarhygr.											
Leysin	8. Dez.	—	—	—	-2,1	-3,2	-2,1	80	45	100	5	10	10	N_0	N_0	W_1	—	—	●
1450	9. »	—	—	—	-2,0	-3,1	-5,1	100	100	100	10	10	10	W_1	W_1	W_0	*	*	—
			+0,3																
Andermatt	8. Dez.	639,4	638,3	635,4	0,0	2,8	0,5	—	—	—	3	7	10	NW/S_1	W/SW_2	W/SW	—	—	● *
1448	9. »	631,1	630,0	630,1	-3,5	-1,4	-5,1	—	—	—	10	10	10	N/NE	N/NE_2	N/NE	● *	—	—
			+0,5																
Leuk Bad	8. Dez.	645,4	642,7	638,3	-1,4	3,4	2,2	89	87	83	2	10	10	NE	SE	SE			
1415	9. »	636,4	634,8	634,0	-2,5	-2,6	-4,4	90	96	98	10	10	10	NE	SW	SW	● *	—	—

Ort	Datum 1897	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7	Bemerkungen 1	Bemerkungen 9
			— 0,5																
Platta	8. Dez.	646,9	643,3	640,1	4,6	4,6	2,6	43	48	59	7	9	9	SW/SW_3	SW/SW_4	SW/SW_5			
1379 m	9. »	637,5	635,7	637,1	- 2,6	- 0,2	- 4,0	96	80	95	7	10	9	SW/SW	SW/SW_1	SW/N_1	*	*	*
			0,6																
Reckingen	8. Dez.	649,4	641,8	641,7	- 8,2	0,5	- 0,6	99	100	96	4	10	10	0	0	0	—	*	*
1349	9. »	639,8	637,4	639,0	- 0,2	- 1,7	- 4,2	75	94	93	10	10	10	W_9	W_2	0	—	—	*
			0,0																
Braggio	8. Dez.	651,8	649,2	646,1	1,4	3,1	0,3	70	66	93	10	10	10	SE_0	S_0	S_0	—	—	*
1313	9. »	640,7	639,3	640,5	- 1,1	3,9	- 1,2	100	60	64	10	7	9	SE_0	NW_0	W_0			
			0,6																
Schuls	8. Dez.	656,7	652,6	650,1	- 5,0	1,2	- 0,3	91	78	100	7	10	10	SW/N_0	N_0	SW/N_0			
1243	9. »	646,2	645,3	646,9	- 0,7	0,8	- 2,8	96	87	94	10	3	1	N_0	NE/NE_0	NE/N_0	*	—	—
			0,9																
Airolo	8. Dez.	664,6	661,5	658,1	- 1,4	3,4	0,5	—	—	—	0	10	10	NW	W_1	NW	—	—	*
1154	9. »	654,6	753,0	654,3	1,2	0,6	- 0,9	—	—	—	10	10	10	W	W	W_2	*	*	—
									Haarhygr.										
Schwäbrig	8. Dez.	—	—	—	- 3,6	- 2,4	- 2,4	100	100	100	10	10	10	E_2	E_2	E_2			
1152	9. »	—	—	—	- 2,0	0,0	0,2	100	100	86	10	8	10	NW_2	NW_2	NW_2			
Beatenberg	8. Dez.	664,7	661,6	656,8	- 1,8	1,1	2,4	93	81	90	7	10	10	W_0	SW_1	0	—	—	●*
1150	9. »	656,5	655,0	656,4	1,2	0,0	- 2,6	60	90	96	10	10	10	W_1	W_1	SW_1	—	*	—
Göschenen	8. Dez.	666,2	663,4	659,5	- 2,2	4,0	4,0	100	100	78	5	8	10	NE/NNE_1	$S/S_{2\ 3}$	$SW/S_{3\ 4}$	—	—	●
1108	9. »	658,0	656,5	658,2	- 0,4	0,0	- 2,2	100	92	91	10	10	10	NNE_1	S/SSW_2	NW_2	—	—	*
Chaumont	8. Dez.	664,6	661,8	657,2	- 0,3	0,6	1,0	94	93	96	7	10	10	NW_3	NW_3	NW_3	—	●	*
1128	9. »	657,6	654,8	656,4	- 2,0	- 2,0	- 3,3	92	92	88	10	10	10	NW_3	NW_2	NW_1	*	⊹	*
Wildhaus	8. Dez.	667,1	663,9	659,1	- 0,4	1,7	3,2	—	—	—	10	10	10	E_1	W_3	W_2	—	—	●
1094	9. »	657,8	657,2	659,1	0,8	- 0,9	- 3,0	—	—	—	5	10	10	NW_3	SW_3	SW_4	—	*	*
			+ 0,5																
Guttannen	8. Dez.	671,8	668,9	664,2	- 4,8	4,8	4,2	95	63	65	4	8	7	SW_0	SE_2	SE_2	—	F.	F.
1070	9. »	664,3	662,3	664,1	0,6	1,2	- 1,6	88	86	100	10	10	10	SW_0	SW_0	W_0	●*	*	*
			+ 0,9																
Engelberg	8. Dez.	673,8	670,4	666,4	- 4,9	1,1	2,6	95	91	100	5	10	10	SE_0	SE_0	SE	—	—	●
1021	9. »	665,8	664,1	665,6	0,8	1,3	- 1,9	89	98	98	10	10	10	SE_2	SE_1	W_1	—	*	*
									Haarhygr.										
Brünnig	8. Dez.	675,3	672,5	667,6	- 3,6	- 0,4	1,0	90	85	90	9	10	10	SW_1	SW_0	SW_1	—	*●	●
1010	9. »	667,0	665,5	667,5	- 0,4	- 0,2	- 2,4	95	97	95	10	10	9	NE_1	NE_1	NE_1	—	*	—

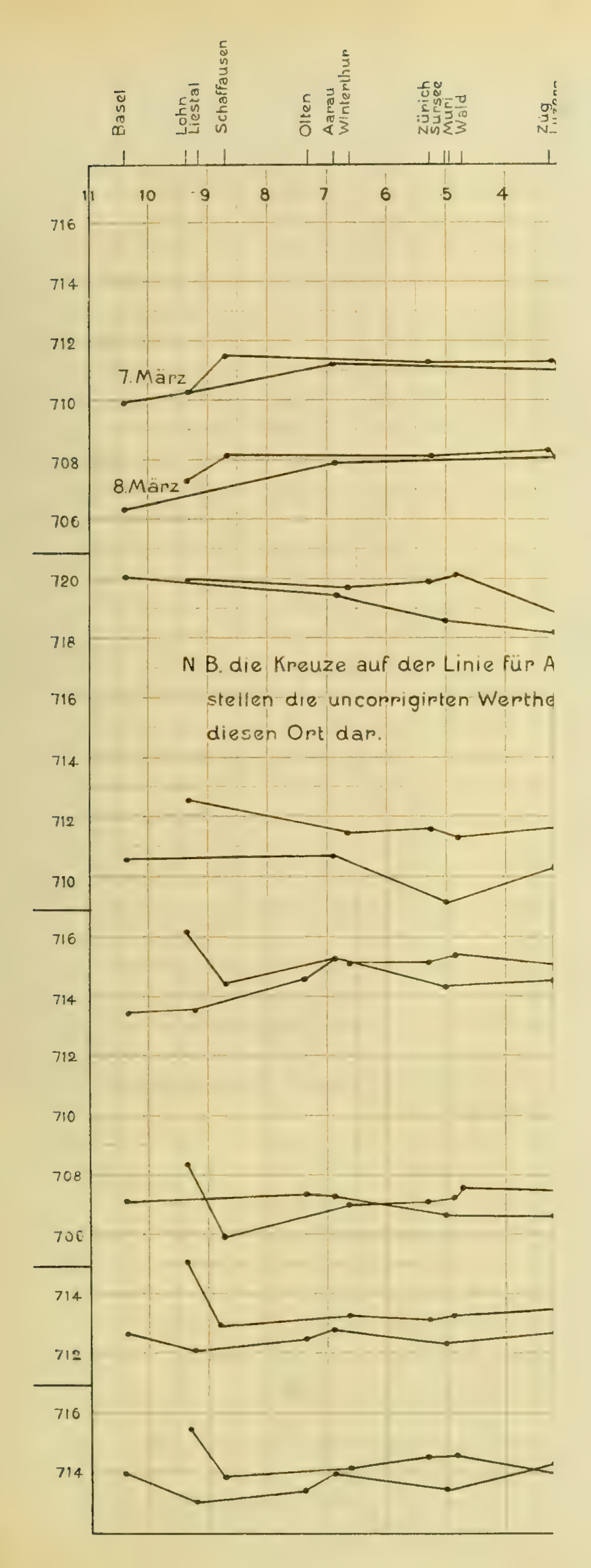
Ort	Datum 1897	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7	Bemerkungen 1	Bemerkungen 9
Elm	8. Dez.	679,0	676,0	671,1	-4,0	1,6	2,2	86	73	95	8	10	10	SE	S_0	S_1	F. in der Höhe		●
961 m	9. »	670,5	668,8	671,3	1,1	1,8	-1,3	86	82	100	10	10	10	S	NE_0	N_0	—	—	⊣
Seewis	8. Dez.	679,8	676,4	672,8	-2,6	2,4	2,0	Haarhygr. 95	89	90	7	10	10	NW_0	NW_0	SSE_0			●
950	9. »	670,9	669,6	671,5	0,3	2,3	-1,4	95	79	95	3	10	10	W/SE_0	W/S_0	SE_0	●	*	*
Grindelwald	8. Dez.	672,6	669,2	664,7	-4,1	0,3	1,2	89	81	97	10	10	10	0	$NE_{0\ 1}$	$NE_{1\ 2}$			●
950	9. »	665,1	662,7	663,0	0,0	0,4	2,4	92	85	95	10	10	10	NE_2	SW_2	0			*
Einsiedeln	8. Dez.	684,0	— 0,1 680,8	675,8	-5,6	2,0	3,4	Haarhygr. 98	81	88	10	10	10	E	SE	SW	—	●	—
910	9. »	674,7	673,7	675,8	2,8	0,9	-1,0	48	90	75	2	8	9	SW	SW	SW	● *	*	*
Auen	8. Dez.	690,1	687,0	682,0	-2,8	1,2	2,4	98	72	100	10	10	10	E_1	SE_0	S_1	—	—	●
830	9. »	681,6	680,1	682,4	1,0	1,7	-1,2	98	98	100	10	10	10	S_1	N_1	N_0	—	*	*
Heiden	8. Dez.	691,9	688,9	684,1	-2,6	4,1	3,7	Haarhygr. 93	61	84	7	10	10	E_0	SW_1	SW_0		●	●
797	9. »	683,6	683,0	684,9	1,2	1,0	-0,4	80	92	90	3	7	10	S_0	SW_1	W_0			*
Affoltern	8. Dez.	693,0	+ 0,5 688,8	684,1	-0,5	3,4	2,8	100	90	100	10	10	10	SW_2	SW_2	SW_2	—	—	●
797	9. »	683,4	682,1	684,8	2,8	0,8	-0,5	86	96	98	10	10	9	SW_3	SW_3	SW_0	●	÷	
Faido	8. Dez.	696,4	+ 0,7 693,5	690,5	0,6	4,0	2,0	87	84	90	3	10	10	N_0	N_0	N_0			
759	9. »	685,5	684,4	691,5	1,3	4,0	1,0	90	70	86	4	10	0	W_0	W_0	W_0			
Gurtnellen	8. Dez.	—	—	—	-1,8	1,4	7,2	93	90	70	2	10	10	N_0	W/W	W/N_2	—	—	●
742	9. »	—	—	—	2,4	3,0	1,0	90	87	89	10	10	10	S/0	W/SW	S	●	*	*
Marsens	8. Dez.	699,6	696,9	692,1	-1,8	4,2	3,6	Haarhygr. 80	61	75	10	10	10	W_0	SW_2	SW_2	—	●	—
727	9. »	691,2	690,2	691,4	3,0	1,8	-0,2	74	75	80	10	10	10	W/SW_1	W/SW_2	SW_0	*	*	*
Langenbruck	8. Dez.	—	—	—	0,2	5,2	4,6	—	—	—	10	10	10	0	W_3	W_2		●	●
718	9. »	—	—	—	2,0	2,2	-0,2	—	—	—	8	10	8	W_1	W_1	0	● *	*	*
St. Gallen	8. Dez.	700,3	+ 0,3 696,4	691,8	-2,4	4,0	2,5	93	69	98	6	10	10	0	SW_3	0	—		●
703	9. »	691,6	690,6	692,7	1,6	0,8	-0,6	86	96	98	8	7	9	W/0	W/SW_1	0	—	*	*
Castasegna	8. Dez.	702,0	699,6	695,4	1,6	2,5	2,9	77	83	82	10	10	10	N_0	NW_0	NE_0			
700	9. »	690,3	689,0	691,1	2,1	3,1	2,4	92	92	72	10	8	10	NE_0	NW_0	NE_1	●	—	—

Ort	Datum 1897	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7	Bemerkungen 1	Bemerkungen 9
								Haarhygr.											
Haidenhaus	8. Dez.	703,4	696,9	692,4	-0,8	2,4	2,6	95	82	100	10	10	10	SW	SW_2	SW_3	—	—	●
695 m	9. »	693,2	691,9	693,0	1,4	1,4	-0,6	90	95	100	9	10	10	S_1	S_1	S	●	*	*
Brig	8. Dez.	—	—	—	-7,0	1,4	0,2	100	80	99	3	10	10	NW_0	N_0	—	—	—	*
678	9. »	—	—	—	2,4	3,2	1,1	83	69	84	10	10	10	SW_3	SW_3	—	—	●	●
Ebnat	8. Dez.	705,5	702,7	699,0	-4,6	3,0	4,6	—	—	—	7	10	10	NW	SE	SE	—	—	●
649	9. »	696,2	695,4	697,1	2,5	3,3	1,3	—	—	—	4	10	10	W	W	W	—	*	*
			+0,5																
Lohn	8. Dez.	705,2	701,3	697,4	0,4	3,7	4,0	100	89	97	10	10	10	SW_2	SW_2	SW_2	—	●	●
645	9. »	696,9	696,0	698,3	1,5	3,0	0,2	93	86	96	10	10	8	SW_2	SW_2	SW_0	●	*	
Wald	8. Dez.	708,4	703,9	700,2	-0,6	2,4	2,4	—	—	—	10	10	10	E_0	E_0	0	—	—	●
621	9. »	699,3	698,7	701,0	1,8	1,7	0,0	—	—	—	7	10	10	E_0	E_0	0	●	*	*
Chur	8. Dez.	707,7	705,1	699,8	-2,6	2,2	3,7	93	86	81	10	10	10	SW_1	SW_1	SW_1	—	Föhn	—
610	9. »	699,3	698,2	700,7	2,6	4,3	0,7	87	70	89	5	10	10	SE_1	W_1	—	F^2	—	*
Meyringen	8. Dez.	710,3	709,6	701,5	-2,8	2,2	1,4	96	100	100	10	10	9	E_0	NE_0	NE_0	—	● *	●
600	9. »	701,6	699,6	701,8	2,7	2,9	0,6	91	96	96	10	10	10	NE_0	N_0	NW_0	●	*	*
Reichenau	8. Dez.	—	—	—	-2,6	2,8	2,9	—	—	—	9	10	10	SW_1	S_1	—	—	●	●
597	9. »	—	—	—	2,4	5,0	0,6	—	—	—	9	8	10	N_0	NE_1	NE_1	—	—	● *
Bern	8. Dez.	712,8	708,9	704,4	0,9	4,1	3,5	86	85	91	10	10	10	S_0	NW_0	S_0	—	●	—
572	9. »	701,5	702,4	704,4	4,2	4,6	1,1	82	82	87	10	8	9	SW_2	W_3	NE_0	●	●	—
			+1,0																
Thun	8. Dez.	712,9	709,3	703,8	1,2	3,7	4,0	93	82	93	10	10	10	SE_1	SE_1	NNW_1	—	—	●
565	9. »	703,1	702,3	703,3	5,4	6,0	2,8	70	71	86	10	10	10	ESE_1	WNW_1	ESE_0	●	●	—
			+0,1					Haarhygr.											
Siders	8. Dez.	716,6	712,8	708,0	-6,0	1,1	1,2	95	79	99	3	7	10	W_0	SW_0	NE_0	—	—	●
551	9. »	705,9	704,5	705,6	3,2	2,5	0,6	79	88	95	8	10	6	SW_1	SW_1	SW_1	●	●	—
Lausanne	8. Dez.	715,7	712,3	707,3	0,6	3,0	4,8	100	86	100	7	9	10	S_7	S_0	SW_0	—	●	●
553	9. »	706,3	705,1	705,7	5,0	2,6	1,6	68	88	90	9	10	9	WSW_{30}	WSW_{21}	E_0	●	● *	—
Schwyz	8. Dez.	714,7	710,7	705,3	0,2	1,8	4,4	92	77	83	10	10	10	NW	NW	—	—	—	●
558	9. »	704,6	703,1	705,7	4,7	3,7	0,6	71	83	96	10	10	10	SE	NW	—	—	—	*

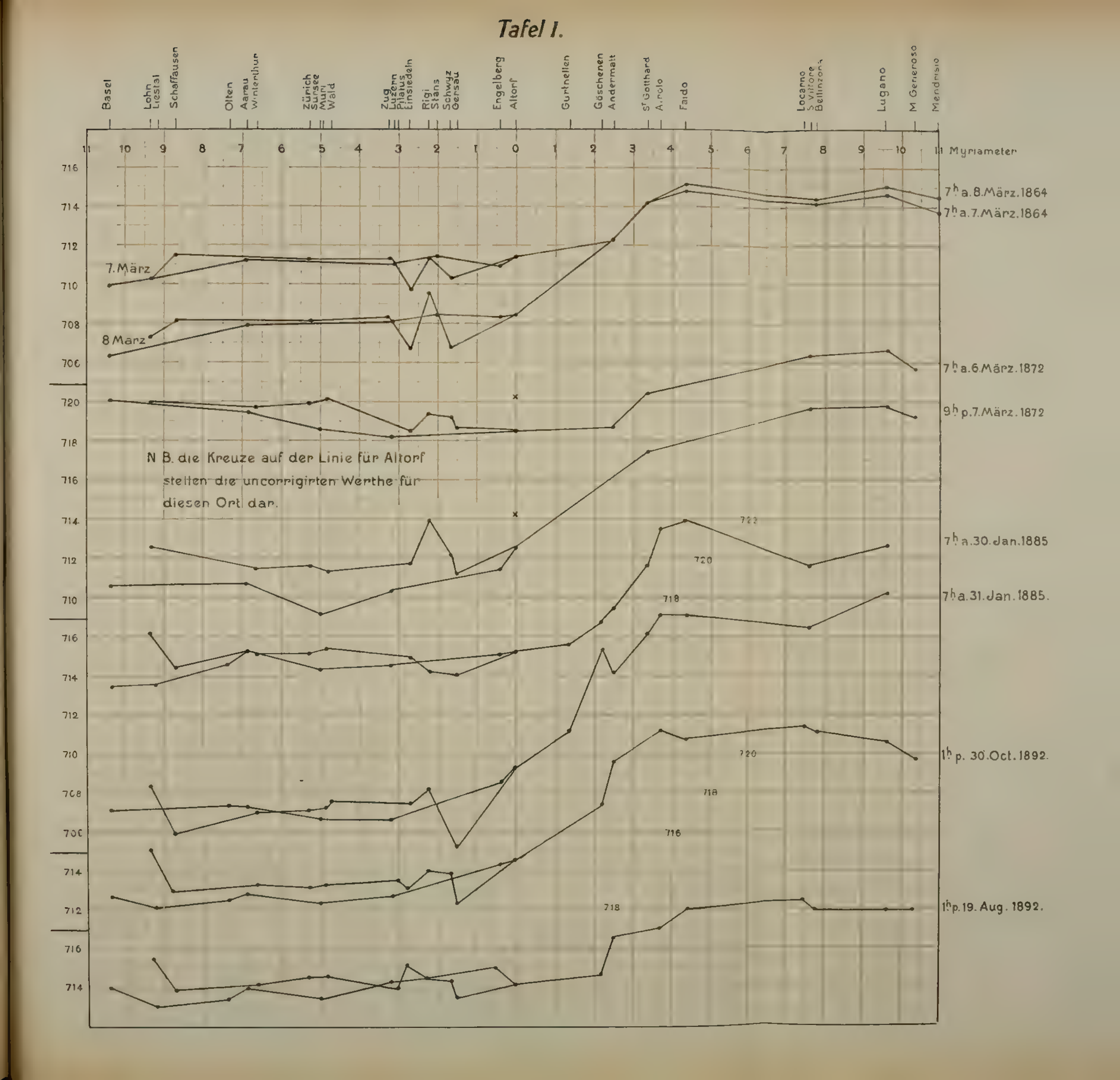
Ort	Datum 1897	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7	Bemerkungen 1	Bemerkungen 9
Sitten	8. Dez.	—	—	—	- 4,0	1,0	1,5	—	—	—	8	10	10	NE	NE	NE	—	—	●
540 m	9. »	—	—	—	3,0	3,8	0,7	—	—	—	10	10	9	W	W	W	●	●	*
Campro V.	8. Dez.	716,5	714,1	710,1	1,2	3,6	2,6	82	81	87	9	10	10	S_0	SW_1	SW_0	—	—	●
541	9. »	705,3	703,0	705,1	1,6	8,0	4,2	96	50	54	10	10	6	S_0	NW_1	NW_1			
Ragaz	8. Dez.	718,4	714,5	709,3	- 3,4	2,2	6,4	—	—	—	—	—	—	—	–				
517	9. »	706,8	707,0	709,3	4,1	5,1	0,2	—	—	—	—	—	—	—					
Sargans	8. Dez.	718,3	714,7	709,7	- 1,8	1,7	5,0	98	84	78	10	10	10	0	W_2	W_1	—	—	●
507	9. »	708,2	708,0	710,0	4,4	3,8	1,0	68	85	92	5	10	10	W_1	W_1	W_1	—	●	●*
Valeyres	8. Dez.	717,2	713,2	709,1	1,0	6,3	6,0	94	62	80	10	10	10	SW	SW	SW	●	●	—
505	9. »	708,4	707,1	708,2	4,0	4,8	2,8	71	66	81	10	10	10	W	W	W	●	●	—
			+ 0,6					Haarhygr.											
Sursee	8. Dez.	718,6	714,4	709,7	0,4	4,3	3,4	87	74	95	10	10	10	W/W_1	W/NW_2	NE_1	●	●	●
502	9. »	708,8	707,9	710,5	2,8	2,0	0,9	77	93	90	10	10	10	N_1	W/N_1	SW/SW_1	●	*	*
								Haarhygr.											
Sarnen	8. Dez.	720,6	716,6	710,5	- 0,7	1,4	3,7	90	89	95	10	10	10	SE	SW_1	NE_2	—	—	●
490	9. »	710,4	709,4	712,1	5,0	4,5	0,7	68	75	93	5	7	10	SW/SW_3	SW/SW_3	NE_2	—	●	●*
Zürich	8. Dez.	719,6	714,8	710,2	1,8	5,8	5,8	80	62	79	10	10	10	SW_1	SW_3	W_3	—	●	●
493	9. »	709,5	708,9	711,1	4,6	2,2	1,4	63	90	86	8	10	10	W_2	W_3	SW_1	—	*	
Neuchâtel	8. Dez.	720,5	716,3	711,5	1,9	4,2	5,8	89	97	94	10	10	10	SW_2	SW_2	SW_3	—	●	●
488	9. »	710,9	709,9	711,7	4,3	3,2	1,2	80	93	95	10	10	10	SW_3	SW_3	SW_1	—	●	
Glarus	8. Dez.	721,2	717,2	711,6	- 2,8	2,0	2,0	96	68	96	10	10	10	SE_0	SE_0	SE_0	—	—	●
482	9. »	711,2	710,4	712,5	2,8	2,6	0,4	93	96	96	10	10	10	SE_1	NW_2	NW_0	—	●*	*
Muri	8. Dez.	—	—	—	2,6	4,4	5,0	68	54	72	10	10	10	W	W	W/W_2	—	—	●
483	9. »	—	—	—	4,5	3,0	2,1	80	89	91	8	10	10	W/W	W/W	W/W	●	●*	●*
Rivera B.	8. Dez.	—	—	—	1,2	5,0	5,8	82	84	68	8	10	10	W	W	W	—	—	●
475	9. »	—	—	—	3,8	5,2	6,4	87	94	57	10	10	10	W	W	NE	●	—	—
			+ 0,2																
Altstätten	8. Dez.	721,4	716,9	711,8	- 2,0	1,0	5,9	94	81	82	10	10	10	W_0	W_0	W_0	—	●	●
470	9. »	711,8	710,8	713,0	3,3	4,5	0,7	87	72	93	7	8	10	SW_0	W_0	W_0	●	●	●

Ort	Datum 1897	Barometer 7	Barometer 1	Barometer 9	Temperatur 7	Temperatur 1	Temperatur 9	Feuchtigkeit 7	Feuchtigkeit 1	Feuchtigkeit 9	Bewölkung 7	Bewölkung 1	Bewölkung 9	Wind 7	Wind 1	Wind 9	Bemerkungen 7	Bemerkungen 1	Bemerkungen 9
U.-Hallau	8. Dez.	722,3	717,7	713,1	1,1	4,4	5,7	92	83	92	10	10	10	SW/SW_2	SW_0	SW/SW_2	—	—	●
465 m	9. »	713,1	712,0	714,6	2,2	3,7	0,8	91	79	94	10	10	9	SW/SW_1	W/SW_2	W/SW_1	●	—	✱
Porrentruy	8. Dez.	721,3	715,7	712,8	4,6	6,6	6,8	70	91	92	10	10	10	W_3	W_5	SW_5	—	●	●
460	9. »	712,4	711,9	713,3	4,2	1,3	1,6	69	93	85	8	10	8	SW_{3-5}	S_{3-5}	S_{2-5}	●✱	✱	
Rorschach	8. Dez.	—	—	—	0,6	5,1	3,9	—	—	—	3	10	10	NE_0	W_3	SW_0	—	—	●
455	9. »				3,6	4,2	2,1			-	8	10	10	W_1	SW_2	W_2	●✱	●✱	●✱
Buus	8. Dez.	721,4	716,6	712,8	1,4	8,1	7,6	93	67	78	10	10	10	S_0	S_1	SW_2	—	●	●
450	9. »	712,4	711,8	713,6	3,4	1,3	1,6	87	96	87	10	10	9	W_1	W_1	SW_1	●	●✱	✱
								Haarhygr.											
Luzern	8. Dez.	723,6	719,3	714,6	−0,6	2,0	2,6	93	85	99	7	10	10	S_0	SE_1	W_0	—	●	●
451	9. »	713,5	712,5	715,3	5,3	6,8	1,2	50	49	95	2	5	8	SW_1	SW_2	NW/S	●	●	●✱
Altorf	8. Dez.	723,6	719,6	713,7	−0,5	1,9	4,9	87	91	91	10	10	10	NE_0	SE_0	SW_0	—	—	●
450	9. »	713,8	712,2	715,5	4,7	5,5	1,3	82	77	94	10	10	10	SE_{0-1}	SE_{0-1}	W_0	●	—	—
			+ 0,2																
Winterthur	8. Dez.	723,1	718,4	714,1	2,3	6,4	5,7	78	63	81	10	10	10	S_0	S_1	SE_0			
445	9. »	713,5	712,6	715,3	4,4	4,4	2,0	70	73	82	8	10	9	S_1	S_{2-3}	S_2	—	●	●✱
Gersau	8. Dez.	—	—	—	1,0	2,8	4,4	90	89	100	10	10	10	N	E	—	—	—	●
442	9. »	—	—	—	6,6	6,8	1,4	58	60	98	2	10	9	NW_2	NW	—	—	●	✱
Vitznau	8. Dez.	723,3	718,9	714,1	0,5	2,6	4,0	—	—	—	10	10	10	N_0	NE_0	E_0	—	—	●
440	9. »	714,1	712,1	715,2	7,3	6,4	1,0	—	—	—	5	10	10	NW_3	N_{0-1}	NNE_0	—	✱	—
Weggis	8. Dez.	—	—	—	1,2	2,8	3,8	—	—	—	10	10	10	SE_2	SE_3	SE_0	—	F.	●
450	9. »	—	—	—	5,4	5,8	1,4	—	—	—	7	10	6	SW/NNE_0	NE_{1-2}	SE_0	—	●✱	✱●
Schaffhausen	8. Dez.	722,7	718,2	714,1	1,2	5,4	6,4	—	—	—	10	10	10	SW_{3-4}	SW_{3-4}	SW_3	●	●	●
445	9. »	714,2	712,8	715,5	2,5	3,8	1,0	—	—	—	10	10	10	SW_{3-4}	SW_0	SW_1	●	—	—
Interlaken	8. Dez.	718,0	713,5	708,5	−1,0	1,6	2,0	—	—	—	10	10	10	SW_{0-1}	SW_0	SW_0	—	—	●
568	9. »	708,0	706,5	708,0	3,5	4,0	−4,8	—	—	—	10	10	10	W_{1-2}	W_0	S_0	—	●	—
Kreuzlingen	8. Dez.	—	—	—	1,8	5,0	4,4	—	—	—	9	10	10	NW_1	SW_2	SW_1	—	●	●
431	9. »	—	—	—	2,6	3,8	1,4	—	—	—	9	8	8	S_1	SW_1	SW_1	●✱	●✱	●✱
			+ 1,0																
Frauenfeld	8. Dez.	725,3	720,6	716,5	2,1	5,4	5,6	82	75	87	10	10	10	W/W_1	S_0	W/W_2	—	●	●
427	9. »	716,0	714,8	717,2	3,5	4,4	4,0	83	77	83	9	8	8	W/W_1	W/W_1	W/W_1	●	●✱	—

Ort	Datum	Barometer			Temperatur			Feuchtigkeit			Bewölkung			Wind			Bemerkungen		
	1897	7	1	9	7	1	9	7	1	9	7	1	9	7	1	9	7	1	9
Bex	8. Dez.	727,6	723,1	718,2	- 2,3	2,4	4,0	90	80	89	10	10	10	S_0	S_0	S_0	—	—	●
126 m	9. »	717,2	715,7	716,6	4,6	6,0	0,7	78	68	94	10	10	10	NNW_1	NW_1	NW_0	●	—	*
Genf	8. Dez.	728,9	725,7	720,3	1,2	4,8	5,8	85	74	91	10	10	10	E_0	N_1	WSW_2		●	●
405	9. »	719,5	718,4	719,2	5,0	5,4	2,2	81	67	89	9	9	10	SSW_2	SSW_2	SSW_1	—	—	●
Aarau	8. Dez.	728,2	723,3	718,9	1,9	4,7	5,8	100	95	100	10	10	10	SW/SW_1	SW/SW_2	SW/SW_3	—	●	—
397	9. »	718,6	717,3	719,9	3,5	3,5	1,9	100	100	100	10	10	10	SW/SW_1	SW/SW_1	SW/SW_0	●	●	●
Olten	8. Dez.	727,4	723,5	718,6	2,4	4,7	6,1	89	92	94	10	10	10	SW_2	SW_3	SW_3	—	●	●
395	9. »	718,1	716,9	720,4	4,3	4,4	2,4	91	93	96	9	10	10	W/SW_2	W_2	W_1	●	●	—
Territet	8. Dez.	731,2	727,1	722,3	0,9	3,7	4,3	80	75	85	0	10	10	SW_0	NE_0	—	—	—	●
387	9. »	720,8	720,0	720,2	6,5	5,1	3,1	61	66	78	8	10	10	NW_0	NW_{0-1}		—	●	●
Montreux	8. Dez.	731,6	728,1	723,0	0,9	3,4	4,2	92	75	96	10	10	10	NW_0	SW_0	S_0	—	●	●
380	9. »	721,5	720,7	721,4	6,7	4,7	2,9	65	74	83	10	10	10	S_0	NW_1	NW_0	—	● *	—
									Haarhygr.										
Villeneuve	8. Dez.	731,8	727,3	722,7	- 1,6	3,0	3,5	90	75	92	10	10	10	S_1	—	—	—	*	—
380	9. »	721,2	720,2	721,2	5,2	5,0	1,7	73	74	87	10	10	10	W/W_1	W/NNE_3	—	—	—	*
Böttstein	8. Dez.	730,1	725,4	720,9	2,2	8,2	8,6	89	73	73	10	10	10	SW_1	SW/SW_4	SW_4	—	●	●
360	9. »	720,7	720,1	722,0	4,1	4,2	2,0	83	81	89	10	10	10	SW/SW_1	SW_1	SW/SW_0	●	● *	—
Grono	8. Dez.	733,7	731,6	727,2	2,4	4,6	3,2	85	87	95	2	10	10	SW_0	SE_0	SW/SW_0			
335	9. »	722,7	720,2	722,1	3,3	8,0	3,6	98	77	79	10	4	10	NW/NW_0	NW/NW_0	NW/SW_0			
Liestal	8. Dez.	732,8	727,8	723,6	2,7	9,9	8,3	—	—	—	9	10	10	SW_0	W_3	W_1	—	●	—
325	9. »	723,5	723,0	725,1	5,8	2,2	2,2	—	—	—	9	10	10	W_1	W_1	E_1	●	● *	—
Basel	8. Dez.	737,4	732,4	728,6	3,6	8,6	7,8	83	79	91	10	10	10	S_1	W_1	SW_1	—	●	●
278	9. »	728,1	727,8	729,5	5,0	2,0	2,8	78	93	83	8	8	8	W_3	W_2	W_1	●	*	—
Lugano	8. Dez.	740,3	737,3	733,4	1,1	5,0	3,8	99	92	95	3	10	10	W_0	W_0	W_0	—	—	●
275	9. »	728,4	725,9	727,0	3,6	6,6	3,4	95	76	87	10	3	8	W_0	SW_0	NW_0			
			— 0,3																
Locarno	8. Dez.	743,5	741,1	736,6	3,5	6,0	4,6	—	—	—	0	10	10	S_0	S_0	S_0	—	—	●
237	9. »	731,9	729,6	730,9	4,6	8,6	4,9	—	—	—	10	2	7	S_0	S_0	N_0	●	—	—
Bellinzona	8. Dez.	—	—	—	1,9	4,8	3,5	87	85	90	5	10	10	NE	N	NE			
232	9. »	—	—	—	3,8	7,2	6,8	87	74	51	10	2	10	NE	SW	NE			

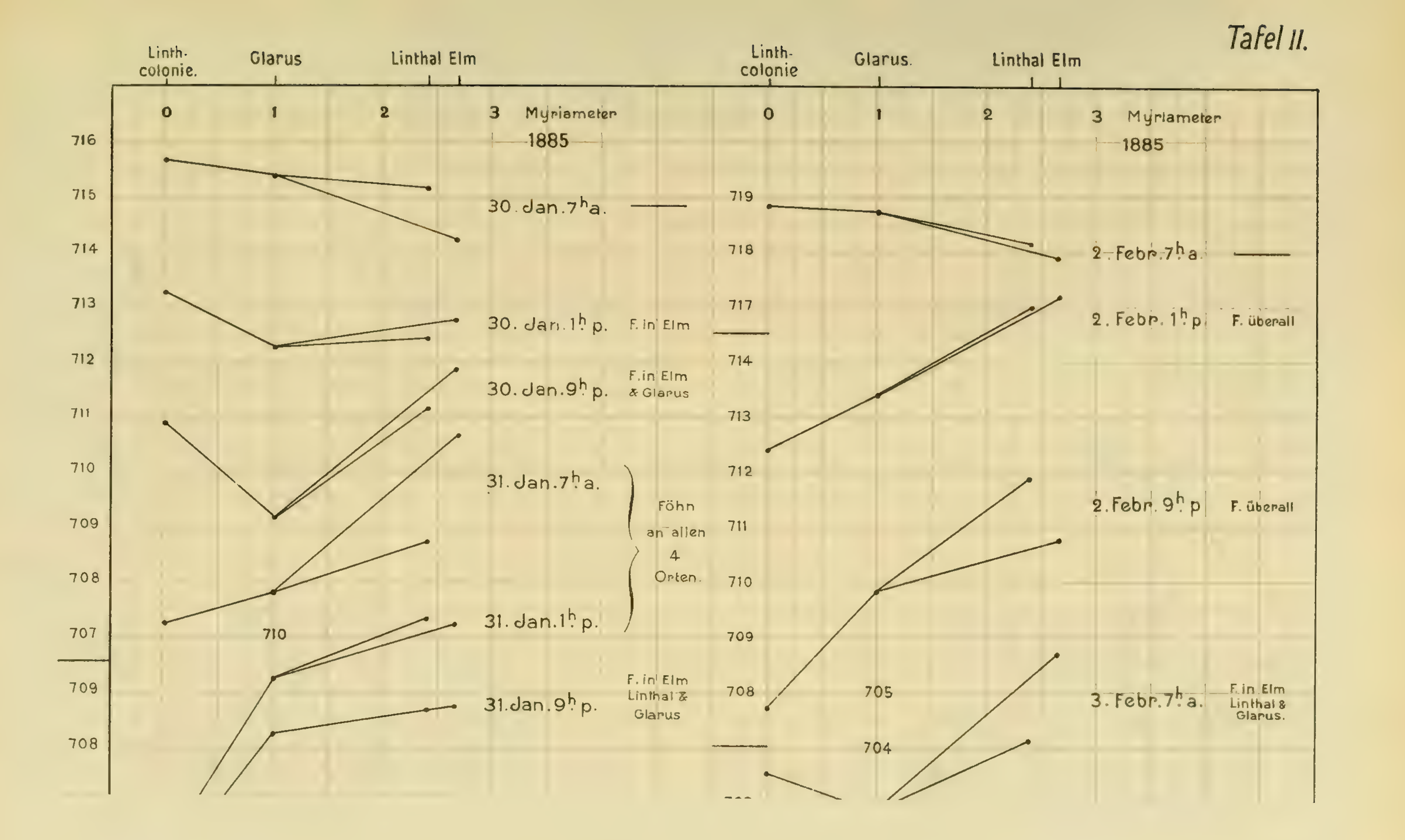

Basel
Lohn
Liestal
Schaffausen
Olten
Aarau
Winterthur
Zürich
Sursee
Muri
Wald
Züg
10
9
8
7
6
5
4
716
714
712
710
708
706
720
718
7. März
8. März
N B. die Kreuze auf der Linie für A
stellen die uncorrigirten Werthe
diesen Ort dar.

Tafel I.



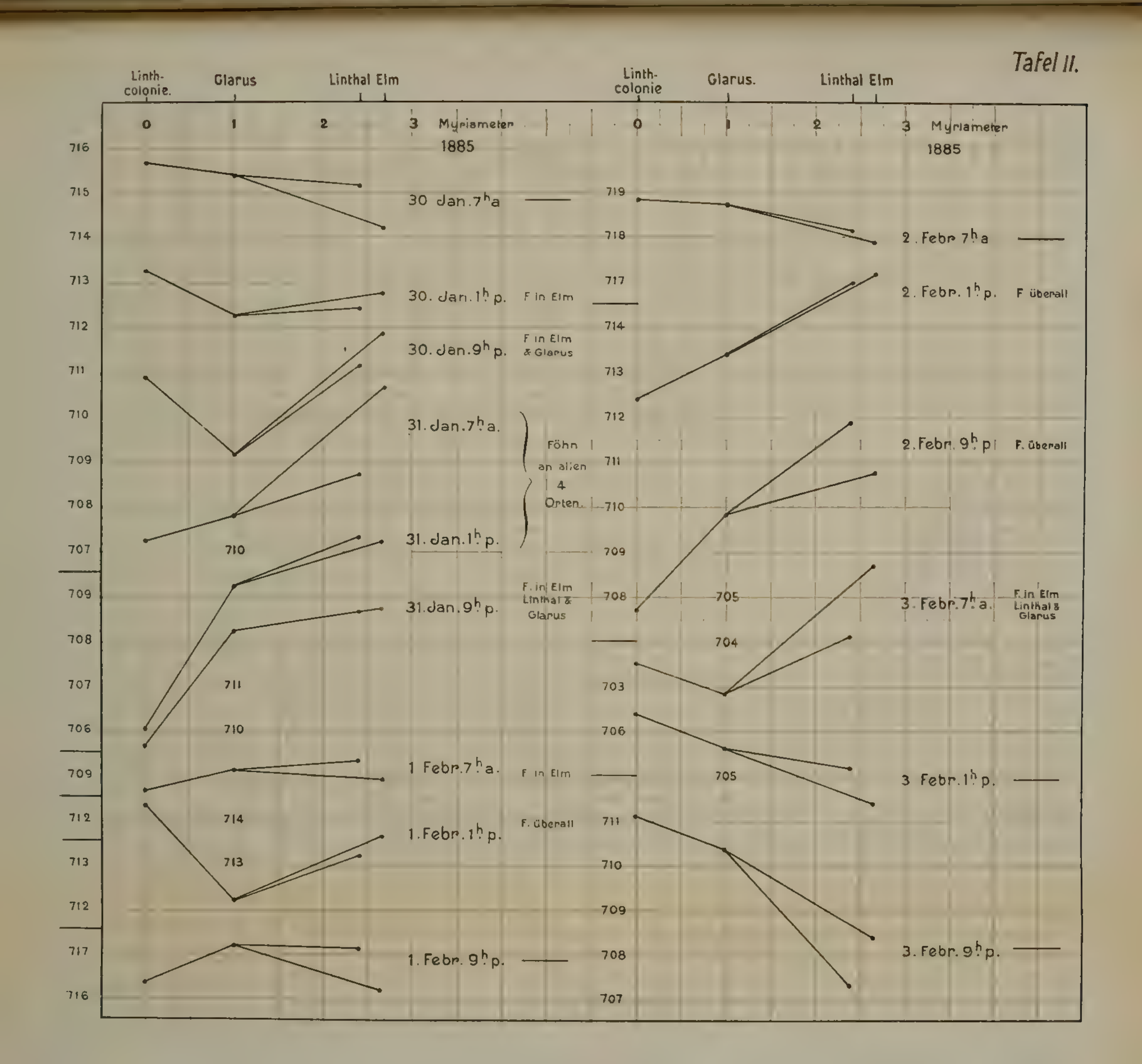
Basel
Lohn
Liestal
Schaffausen
Olten
Aarau
Winterthur
Zürich
Sursee
Muri
Wald
Zug
Luzern
Pilatus
Einsiedeln
Rigi
Stans
Schwyz
Gersau
Engelberg
Altorf
Gurtnellen
Göschenen
Andermatt
St Gotthard
Airolo
Faido
Locarno
S Vittore
Bellinzona
Lugano
M Generoso
Mendrisio
Myriameter
7h a. 8. März. 1864
7h a. 7. März. 1864
7. März
8 März
7h a. 6. März. 1872
9h p. 7. März. 1872
N B. die Kreuze auf der Linie für Altorf stellen die uncorrigirten Werthe für diesen Ort dar.
7h a. 30. Jan. 1885
7h a. 31. Jan. 1885.
1h p. 30. Oct. 1892.
1h p. 19. Aug. 1892.

Tafel II.



Linth-colonie.
Glarus
Linthal Elm
0
1
2
3 Myriameter
1885
716
715
714
713
712
711
710
709
708
707
709
708
710
30. Jan. 7h a.
30. Jan. 1h p.
F. in Elm
30. Jan. 9h p.
F. in Elm & Glarus
31. Jan. 7h a.
Föhn an allen 4 Orten.
31. Jan. 1h p.
31. Jan. 9h p.
F. in Elm Linthal & Glarus
Linth-colonie
Glarus.
Linthal Elm
719
718
717
714
713
712
711
710
709
708
705
704
2. Febr. 7h a.
2. Febr. 1h p.
F. überall
2. Febr. 9h p.
F. überall
3. Febr. 7h a.
F. in Elm Linthal & Glarus.

Tafel II.

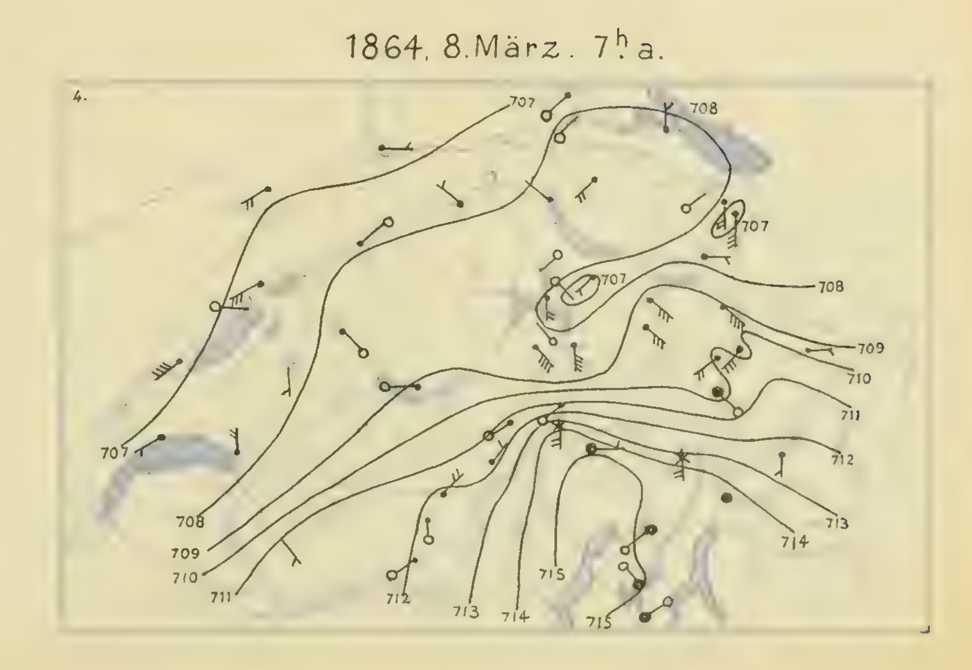


Linth-colonie.
Glarus
Linthal Elm
0
1
2
3
Myriameter
1885
30 Jan. 7h a
30. Jan. 1h p.
F in Elm
30. Jan. 9h p.
F in Elm & Glarus
31. Jan. 7h a.
Föhn an allen 4 Orten.
31. Jan. 1h p.
31. Jan. 9h p.
F. in Elm Linthal & Glarus
1 Febr. 7h a.
F in Elm
1. Febr. 1h p.
F. überall
1. Febr. 9h p.
2. Febr 7h a
2. Febr. 1h p.
F überall
2. Febr. 9h p
F. überall
3. Febr. 7h a.
F. in Elm Linthal & Glarus
3 Febr. 1h p.
3. Febr. 9h p.

1864. 7. März. 7h a.



1864. 7 März. 1h p.



1864. 7. März. 9h p.

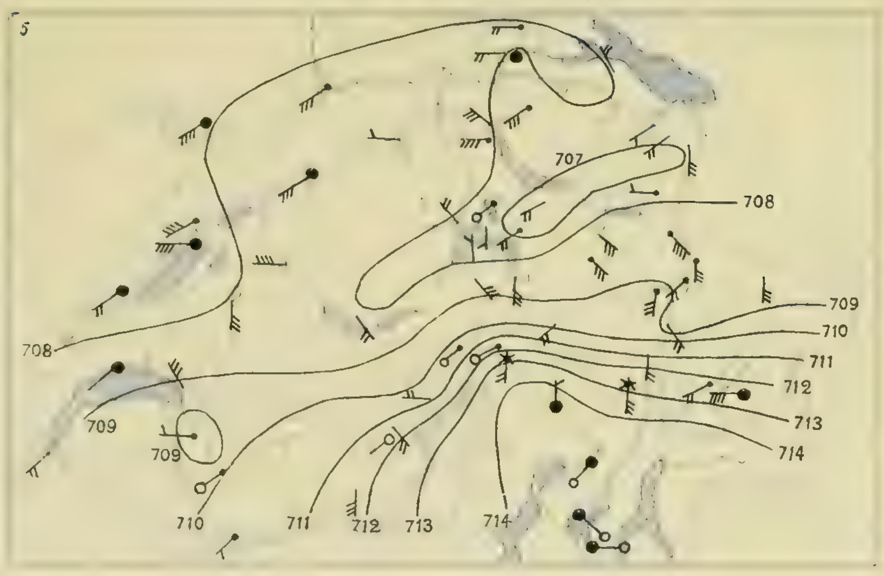
3.

1864. 8. März. 7h a.

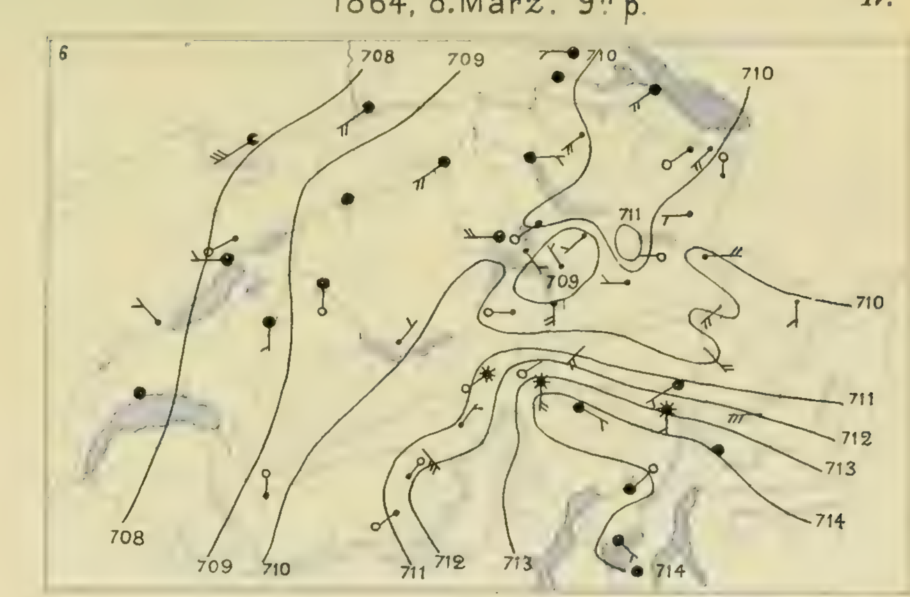
4.



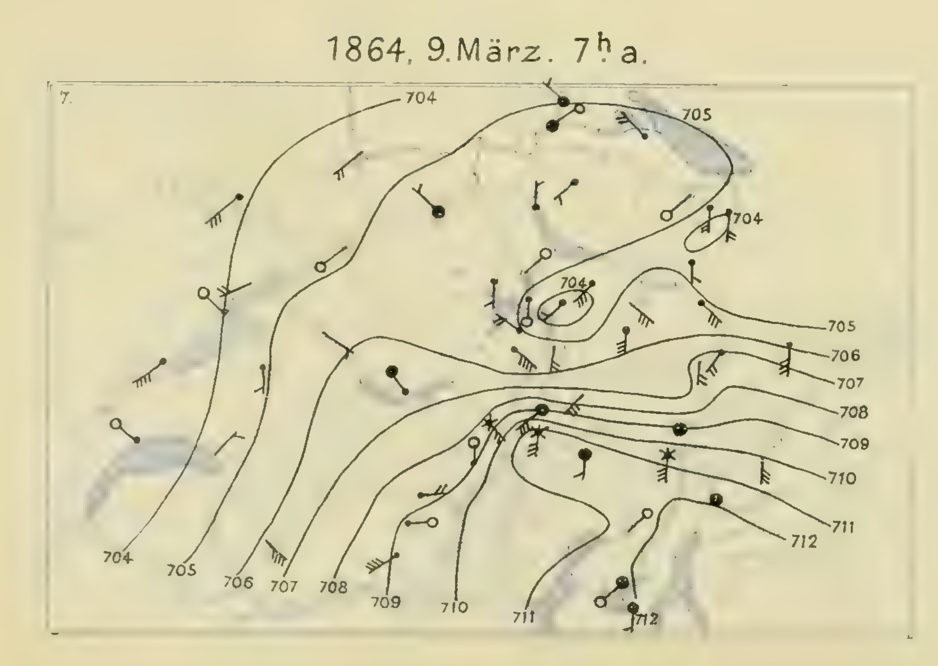
1864, 8. März. 1h p



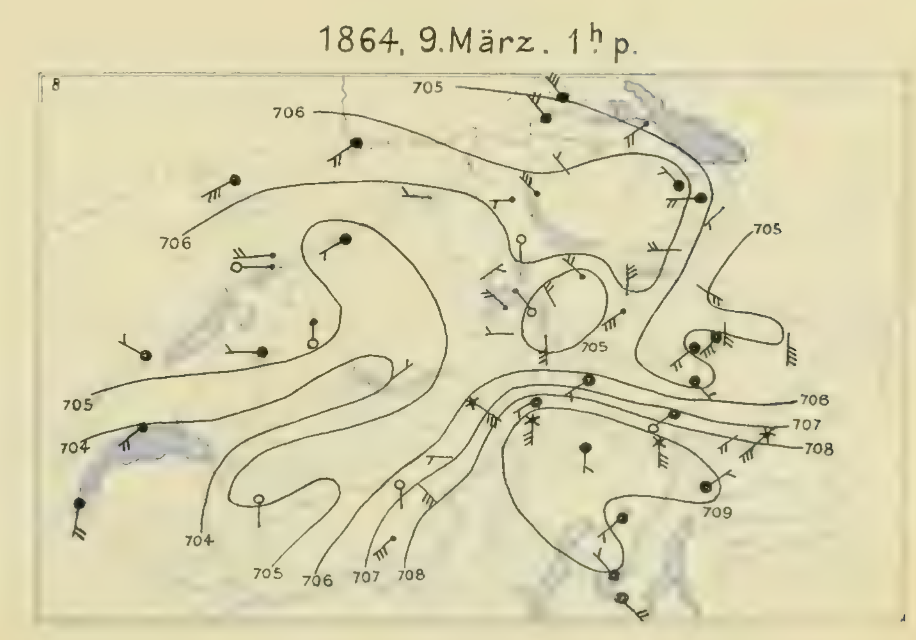
1864, 8. März. 9h p.

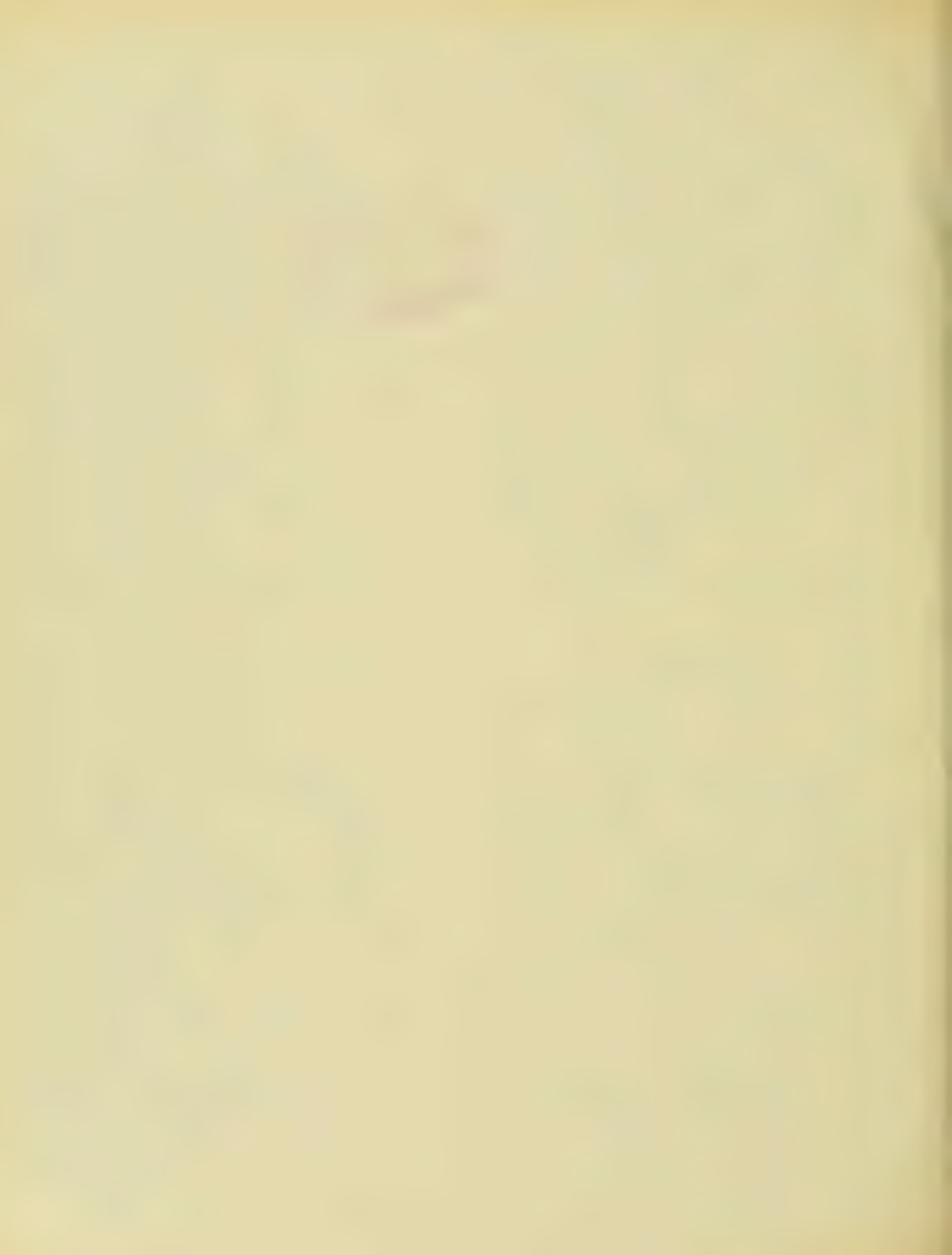


1864, 9. März. 7h a.



1864, 9. März. 1h p.

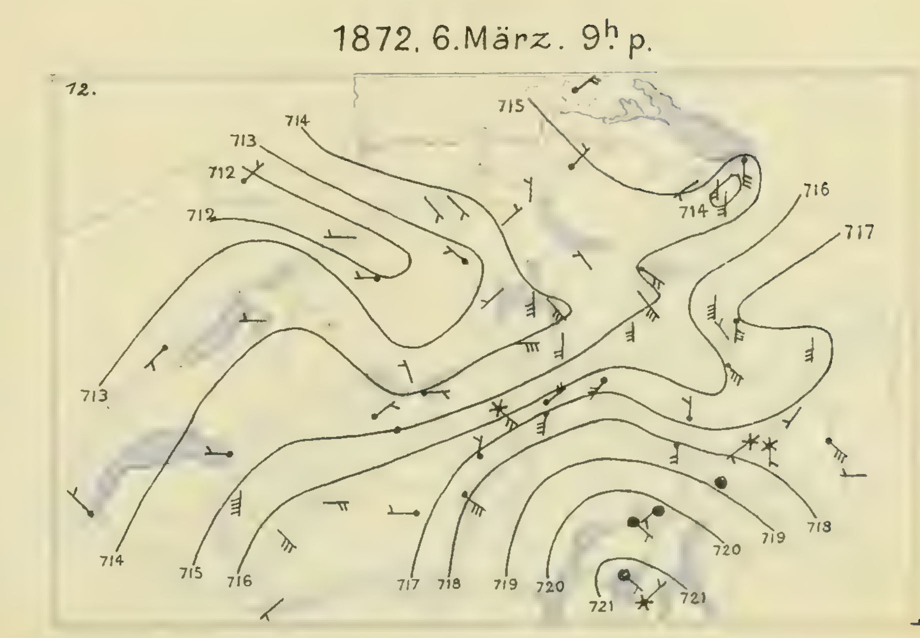




1864. 9. März. 9h p.

9.

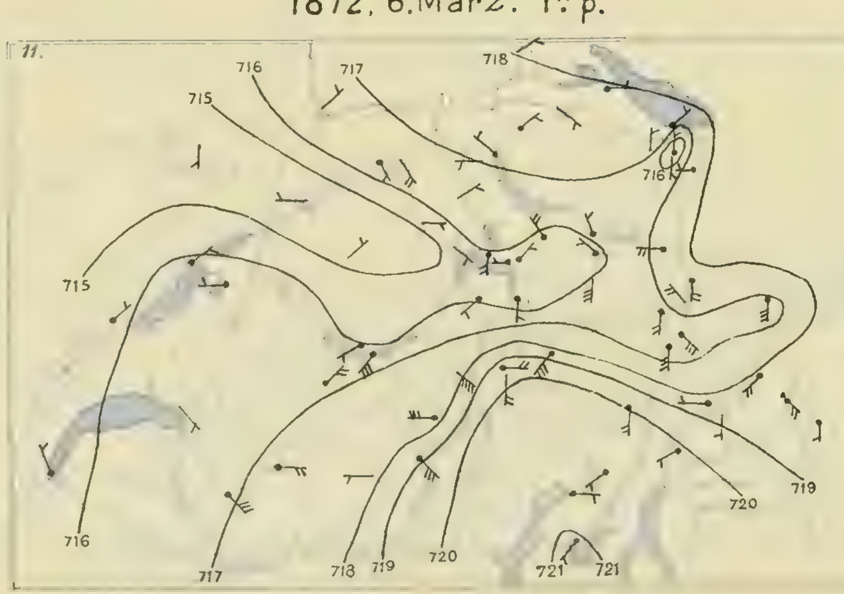
1872, 6. März. 7h a.

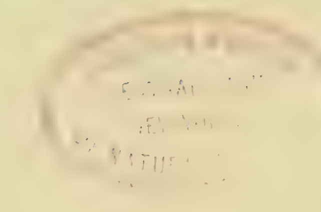


1872, 6. März. 1h p.

11.

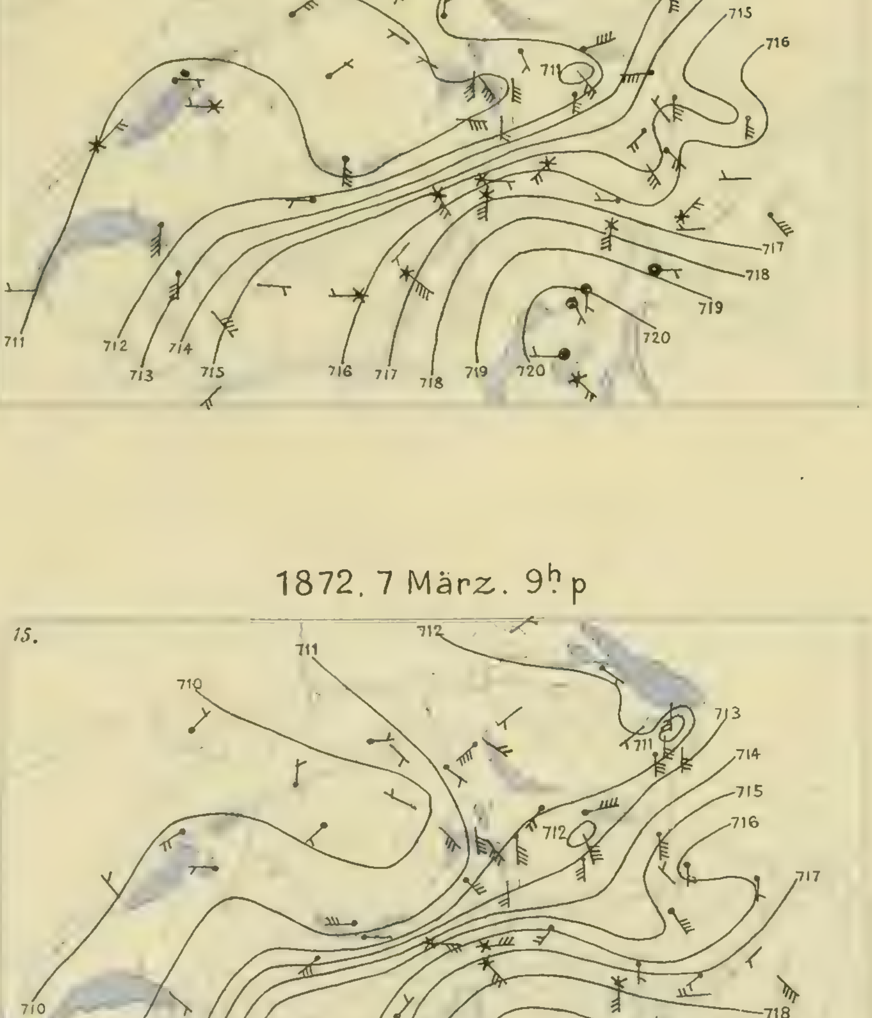
1872, 6. März. 9h p.





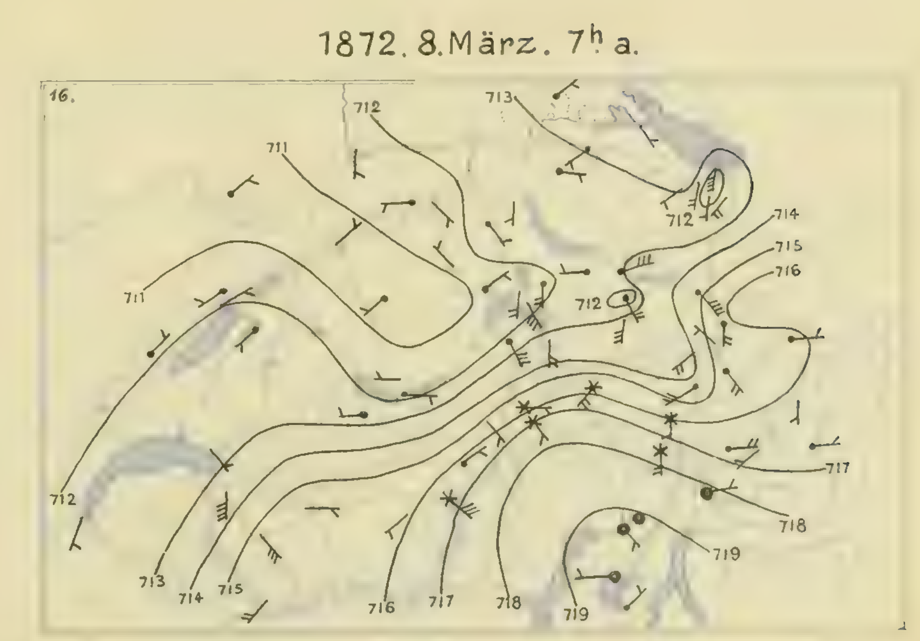
1872. 7. März. 7h a.

1872. 7. März. 1h p.



1872. 7 März. 9h p

1872. 8. März. 7h a.

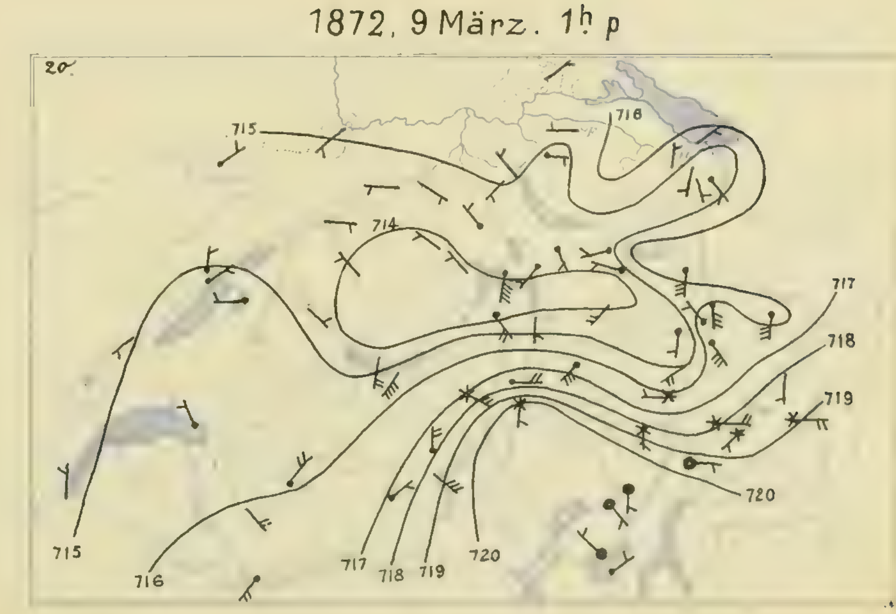




1872, 8. März. 1h p.

17.

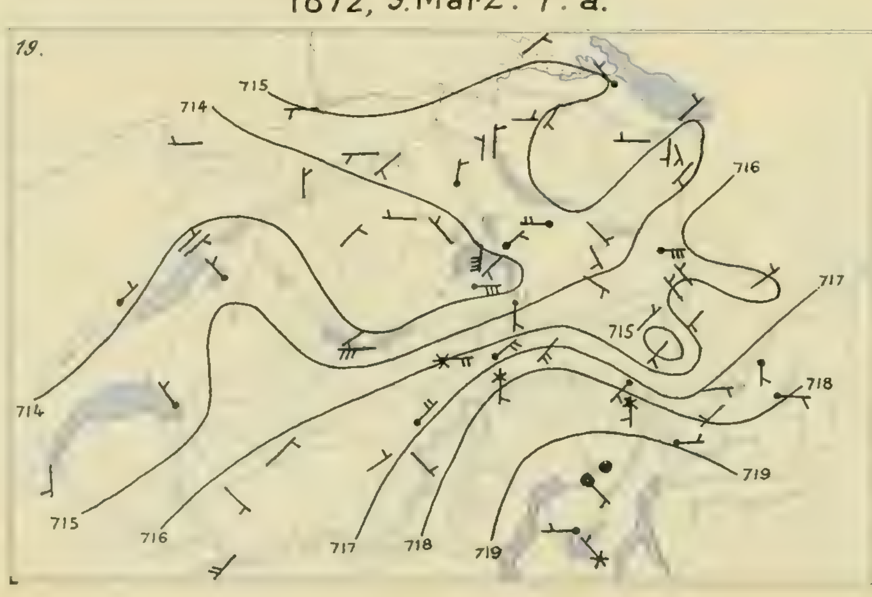
1872, 8. März. 9h p.

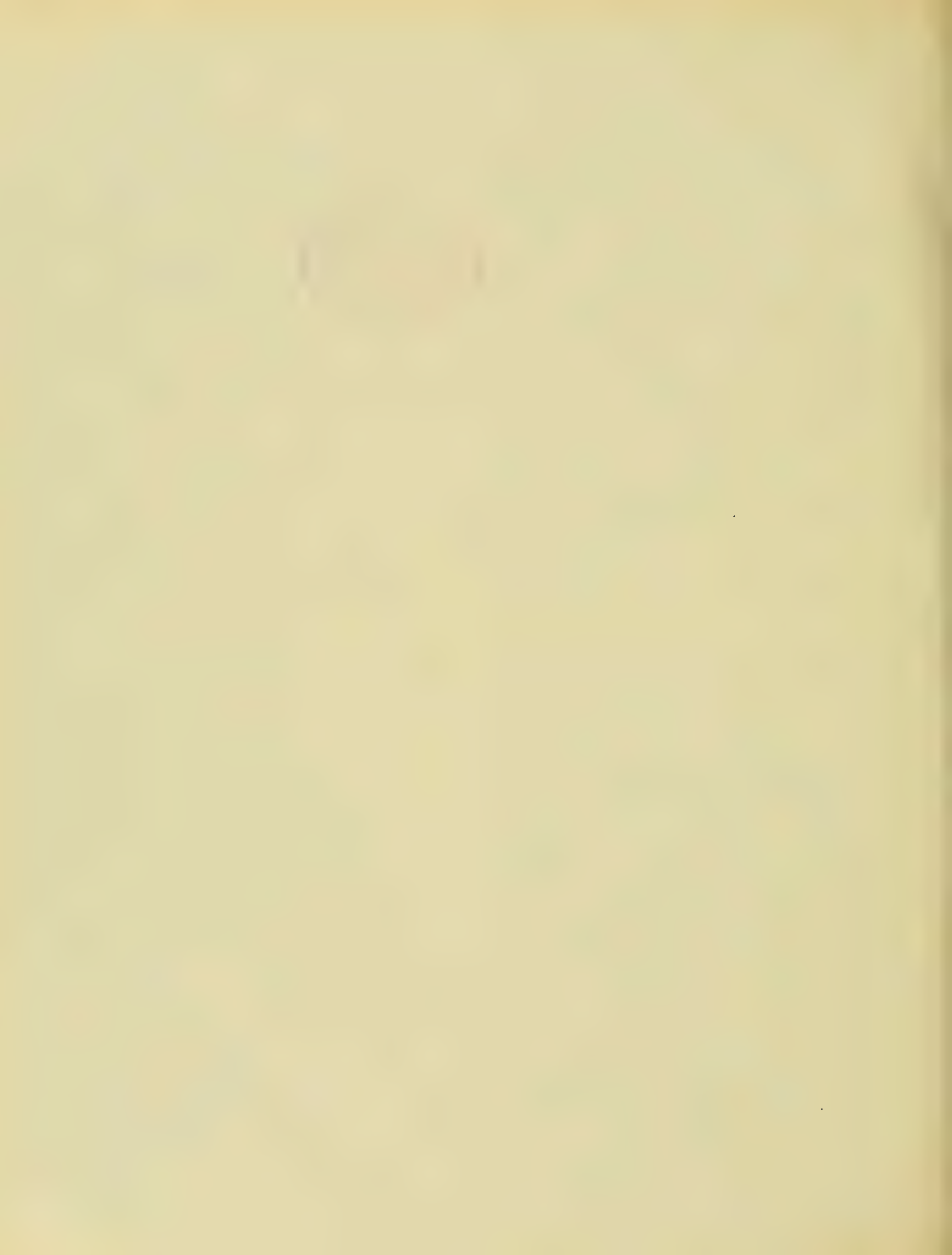


1872, 9. März. 7h a.

19.

1872, 9 März. 1h p





1872, 9 März. 9h. p

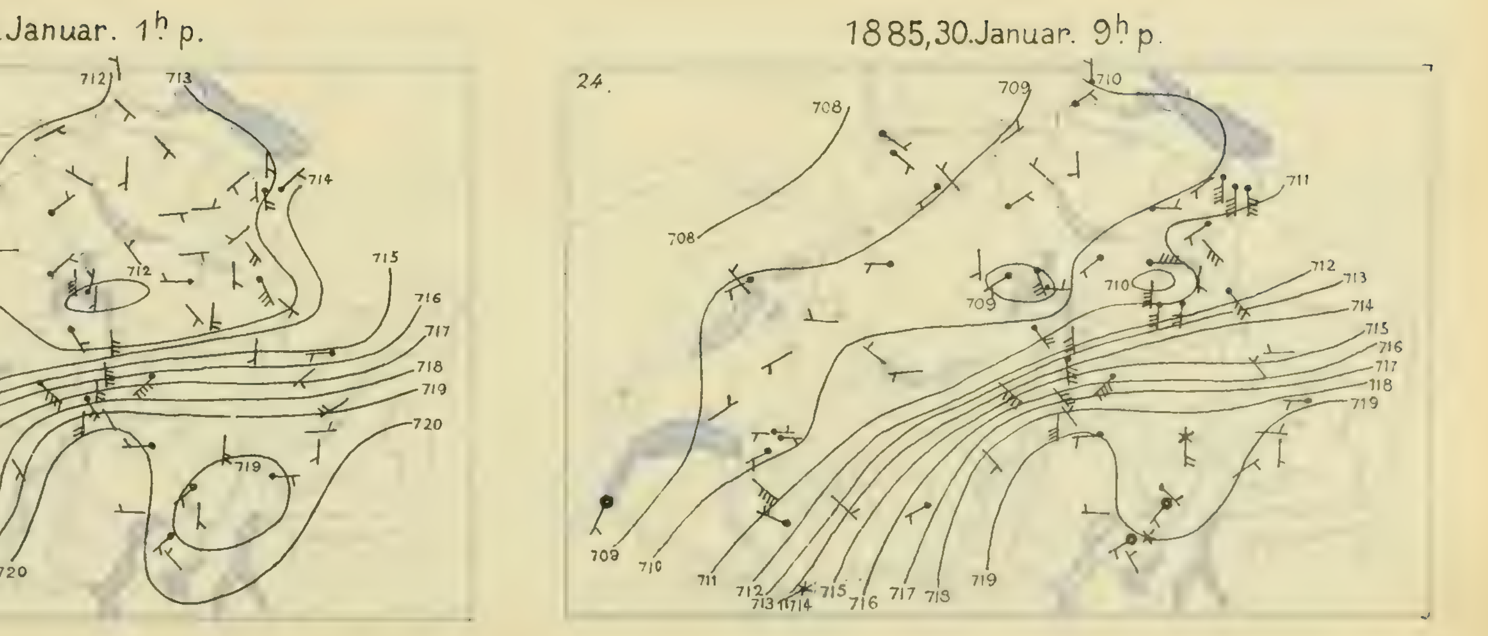
21.

1885, 30. Januar. 1h. p.

23.

1885, 30. Januar. 7h. p.

1885, 30. Januar. 9h. p.





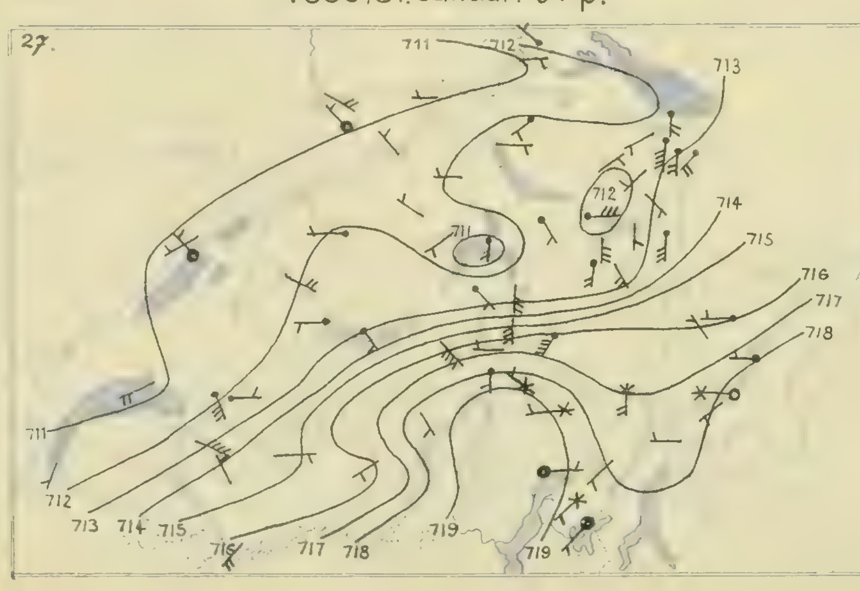
1885, 31. Januar. 7h a.

25.

1885, 31. Januar. 1h p.

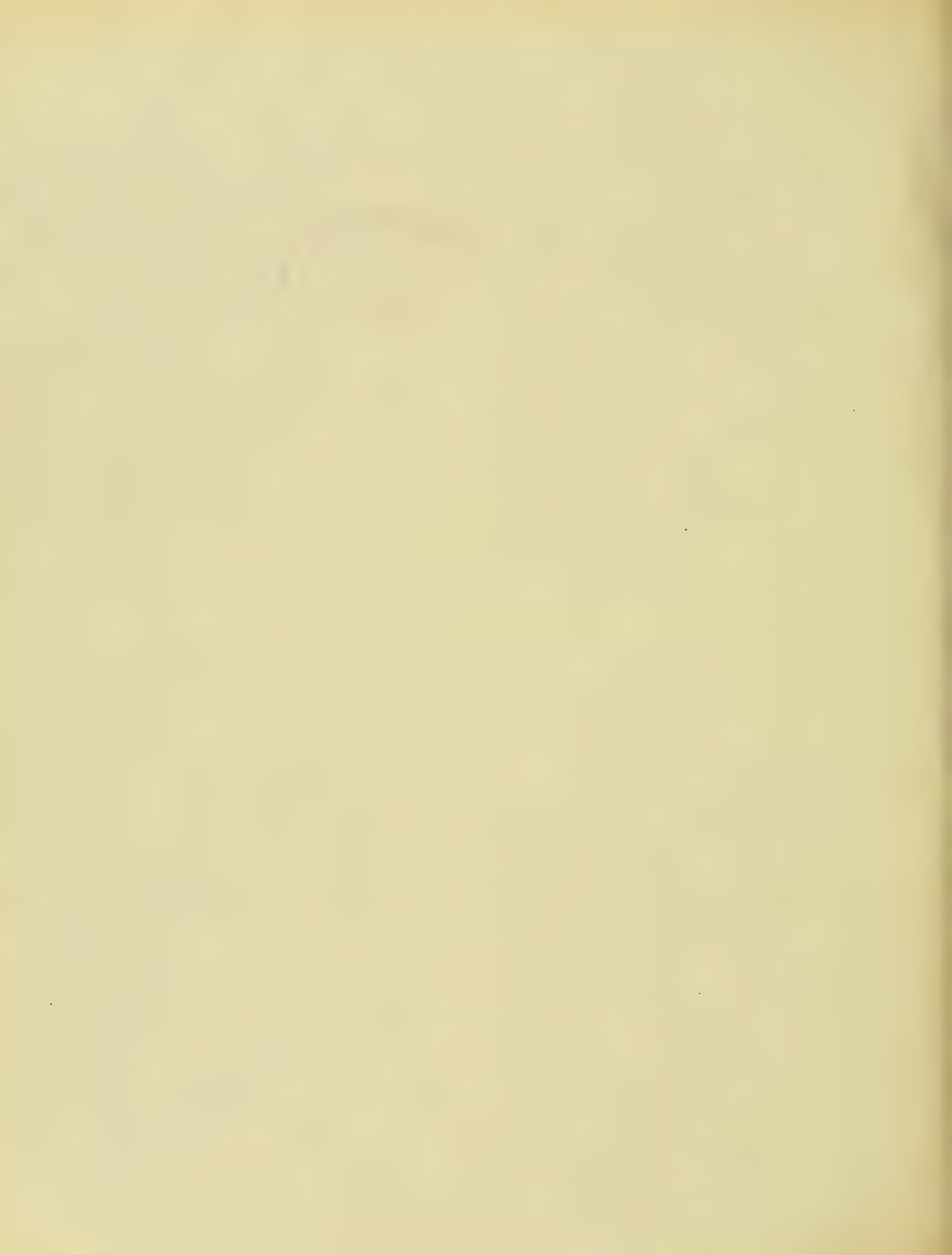
26.

1885, 31. Januar. 9h p.



1885, 1. Februar. 7h a.

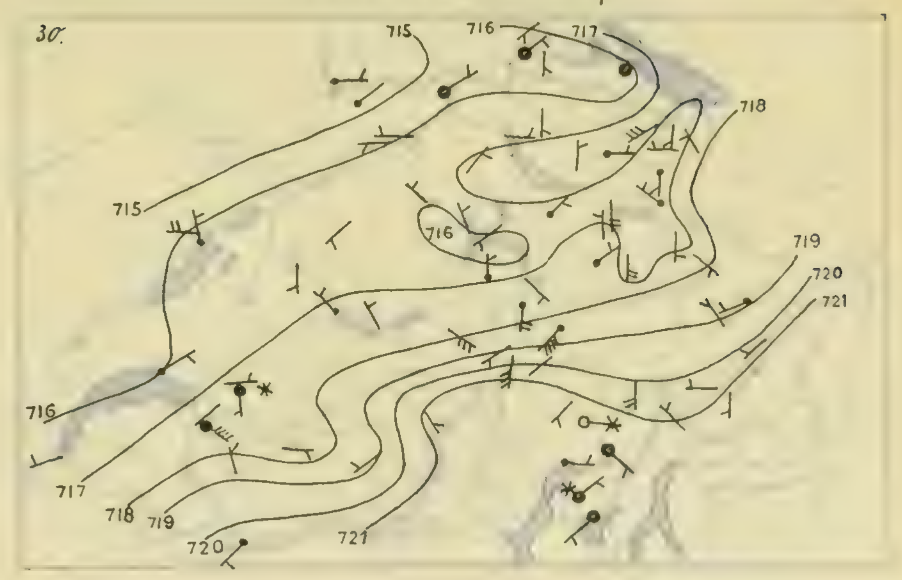
28.



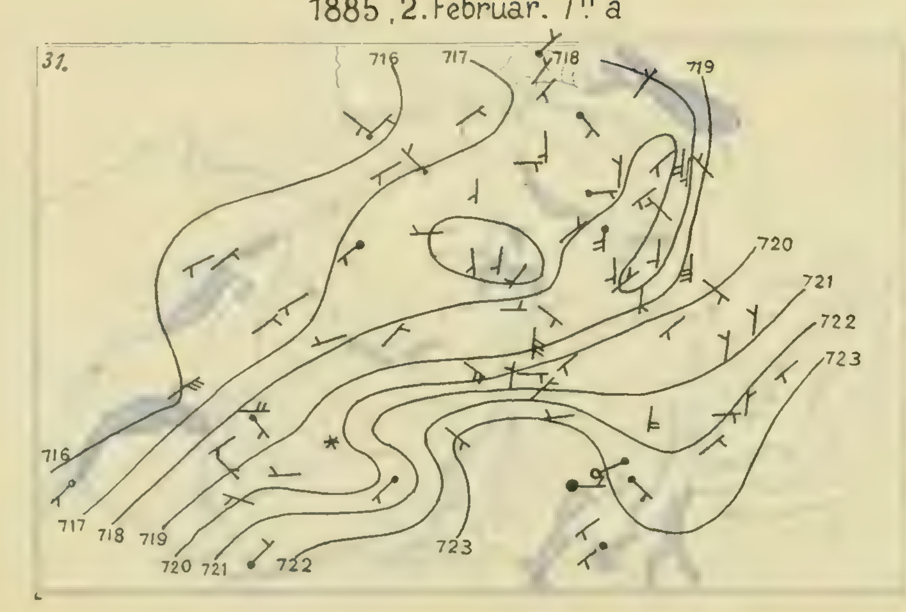
1885, 1. Februar. 1h p

29.

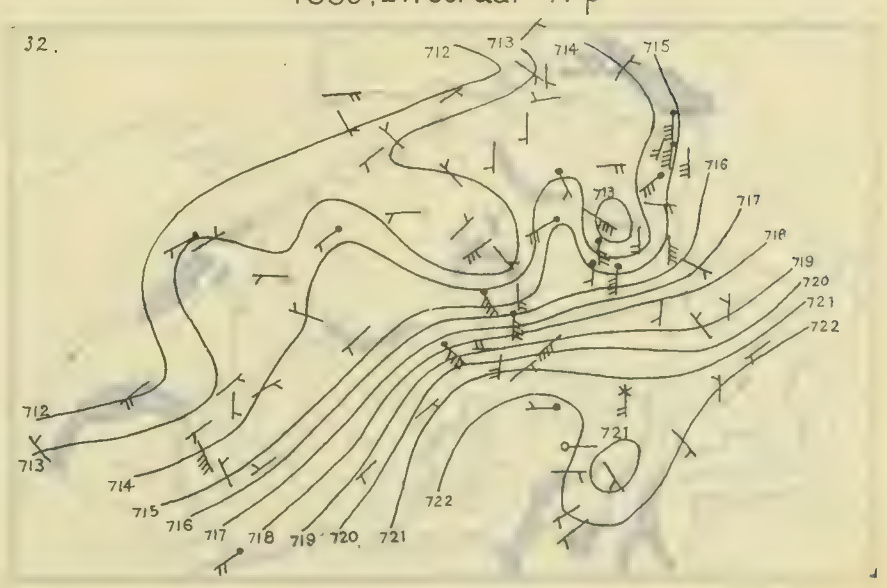
1885, 1. Februar. 9h p.



1885, 2. Februar. 7h a



1885, 2. Februar 1h p

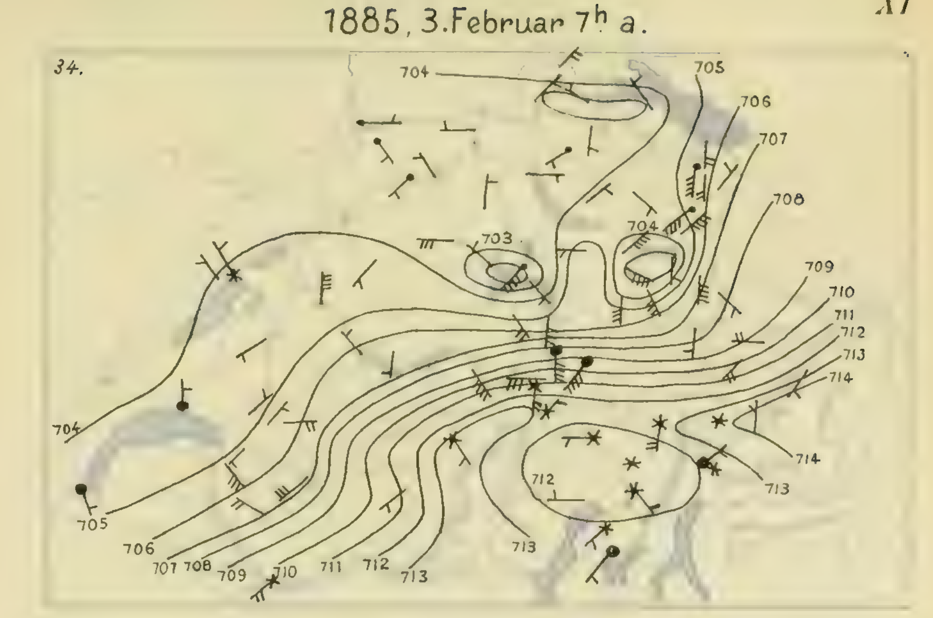




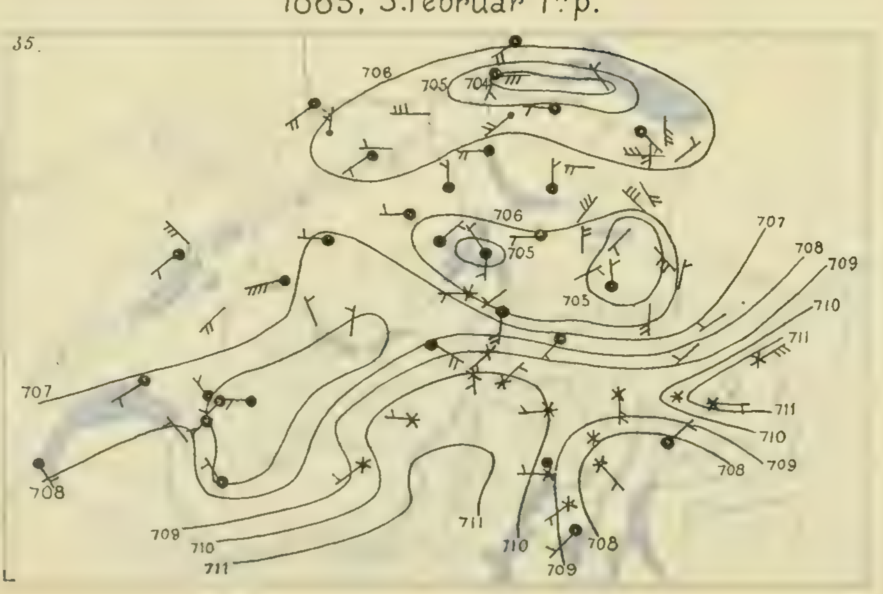
1885, 2. Februar 9h p.

33.

1885, 3. Februar 7h a.



1885, 3. Februar 1h p.



1885, 3. Februar 9h p.

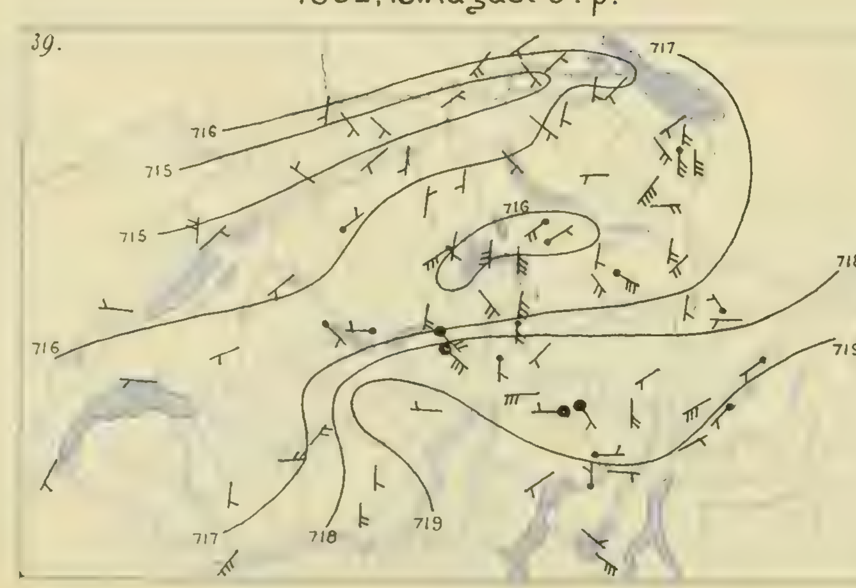
36.



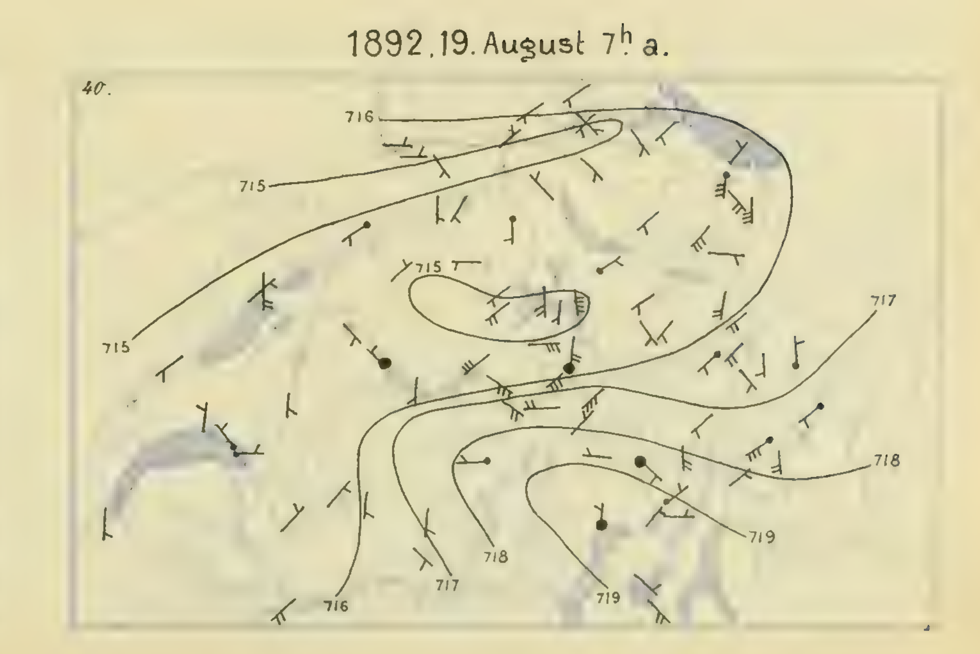
1892, 18. August 7h. a.

1892, 18. August 1h. p.

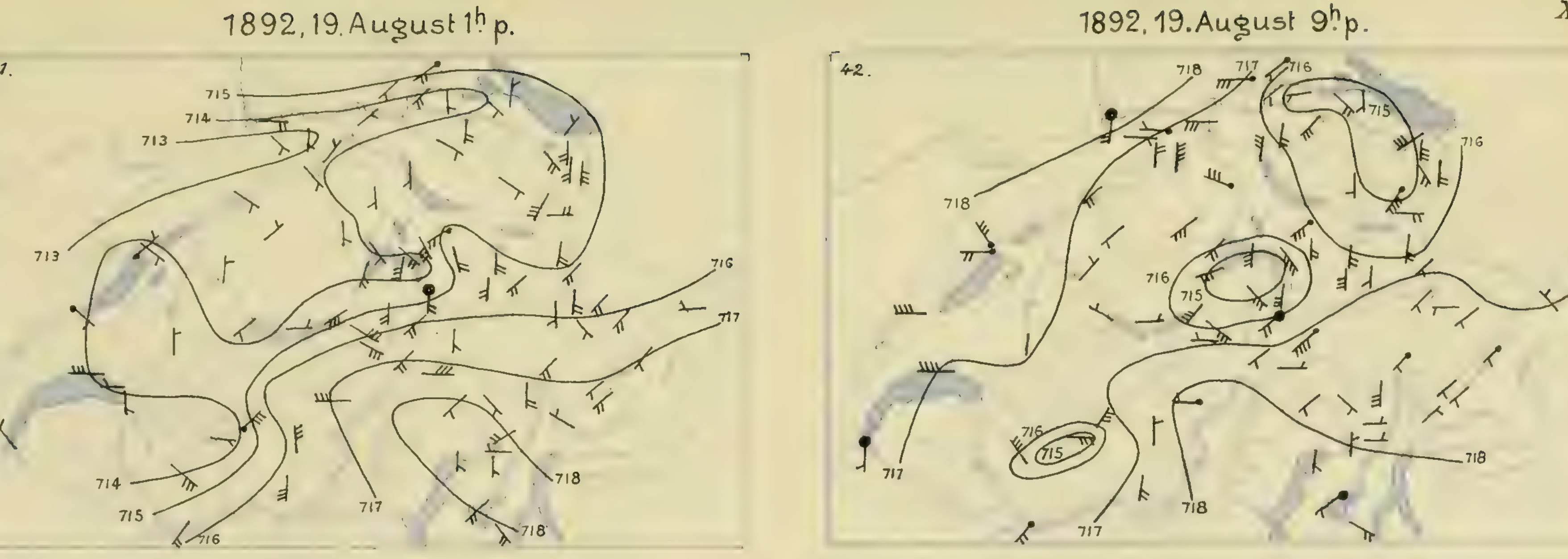
1892, 18. August 9h. p.



1892, 19. August 7h. a.







1892, 19. August 1h p.

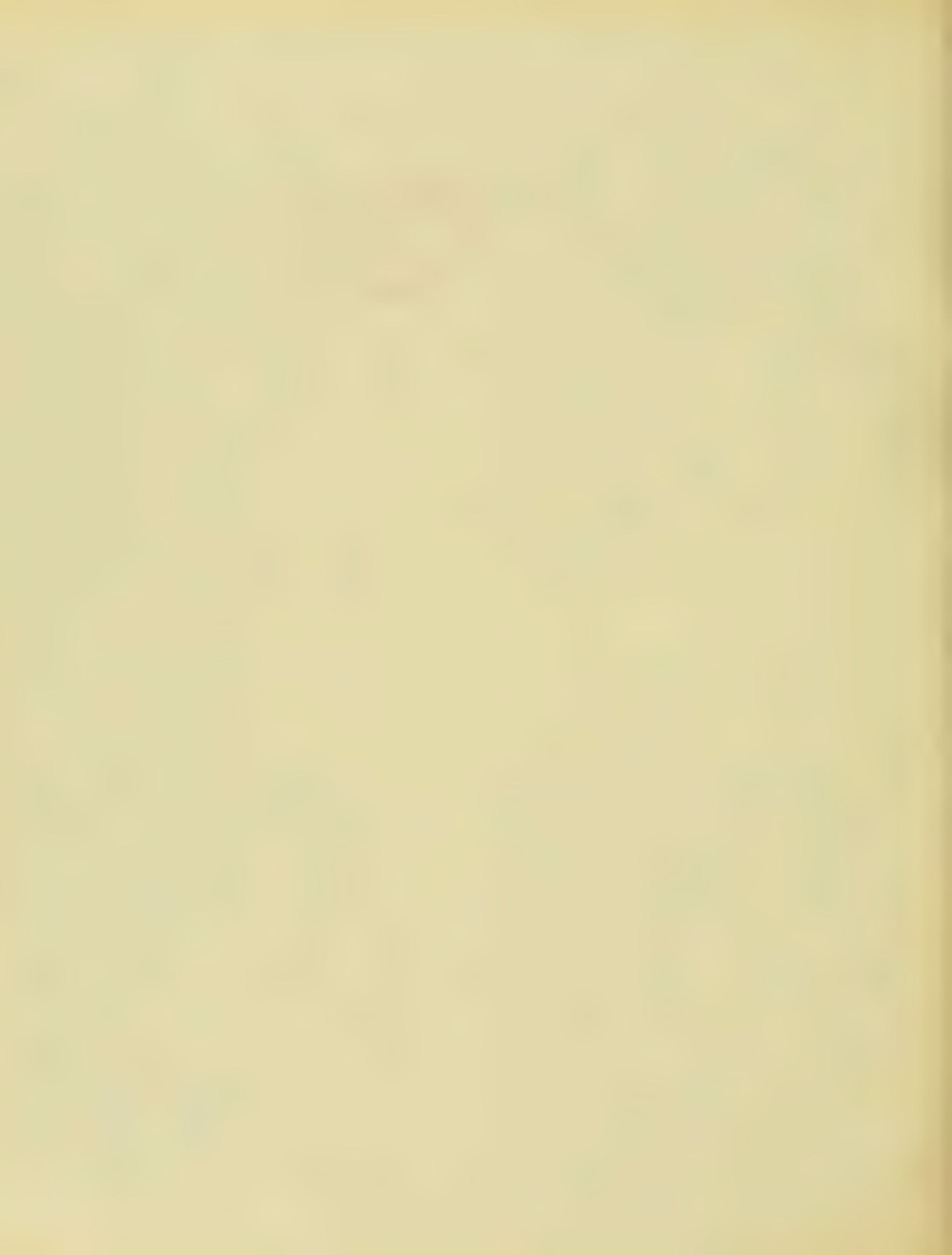
1892, 19. August 9h p.

43.

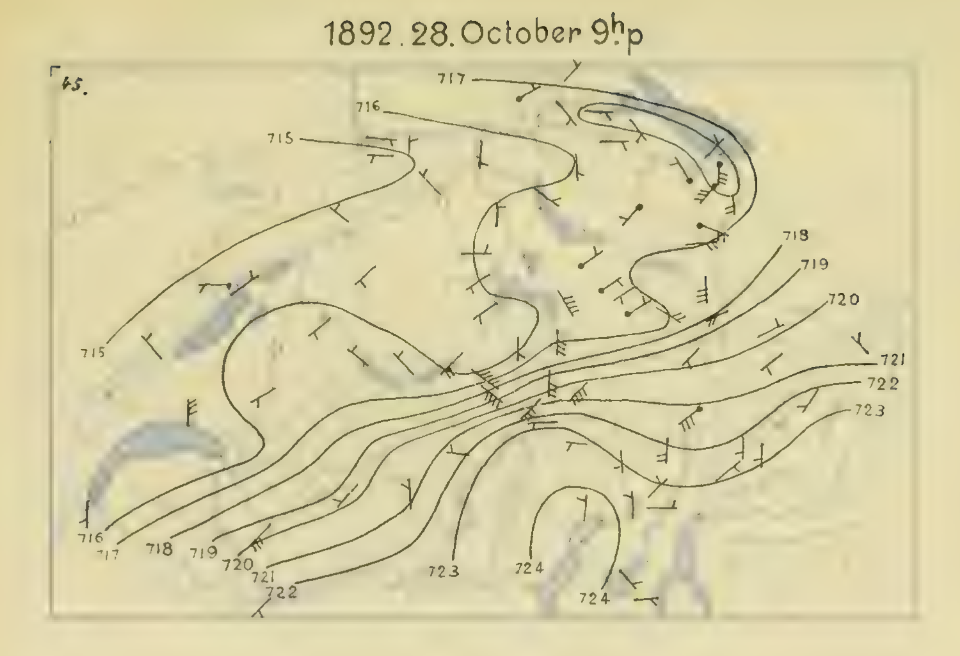
1892, 28. October 7h a.

44.

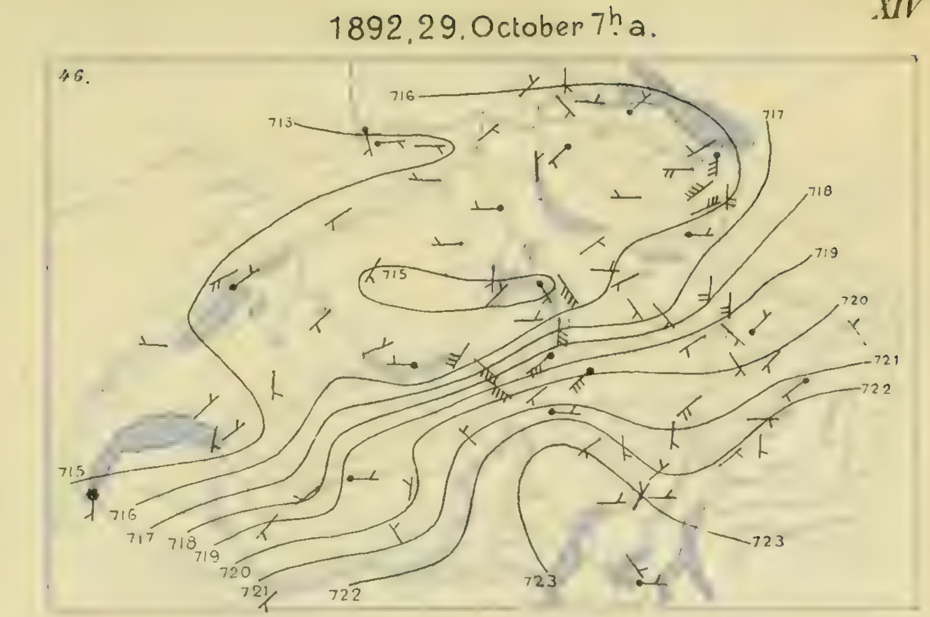
1892, 28. October 1h p.



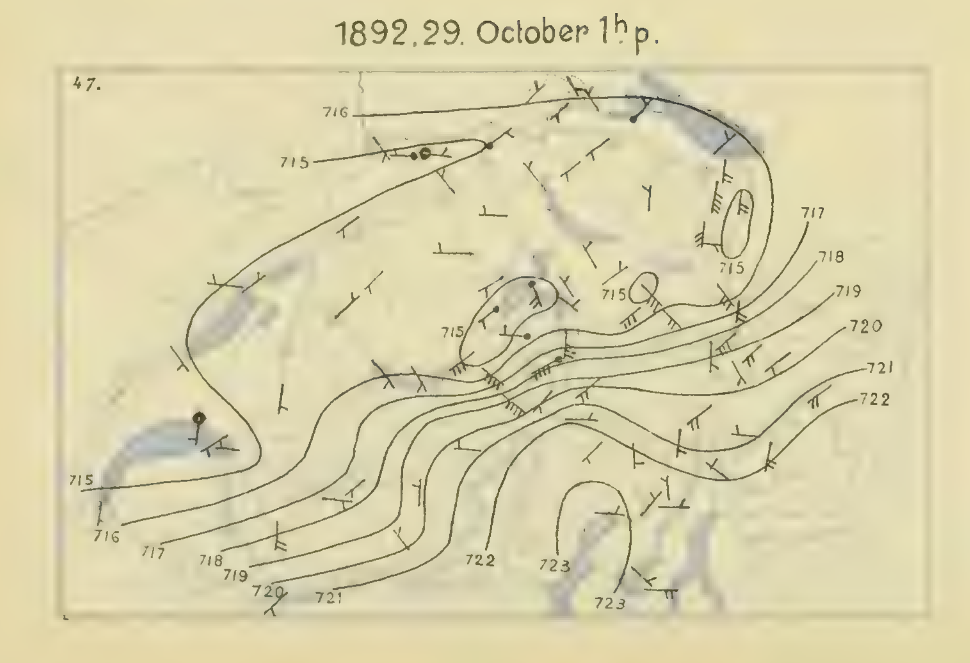
1892. 28. October 9h p



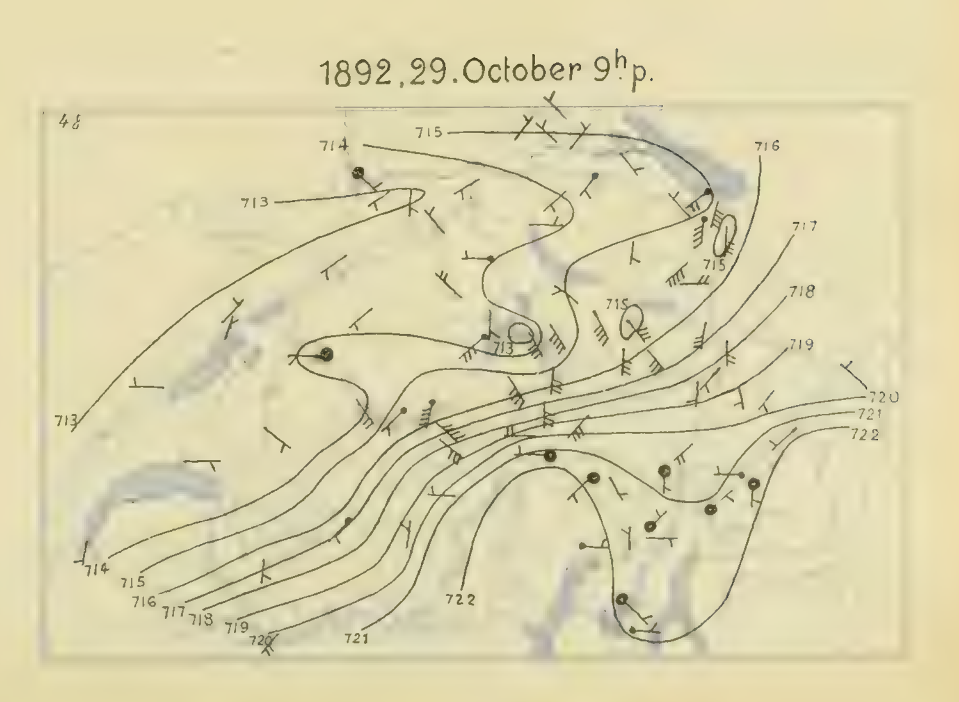
1892, 29. October 7h a.

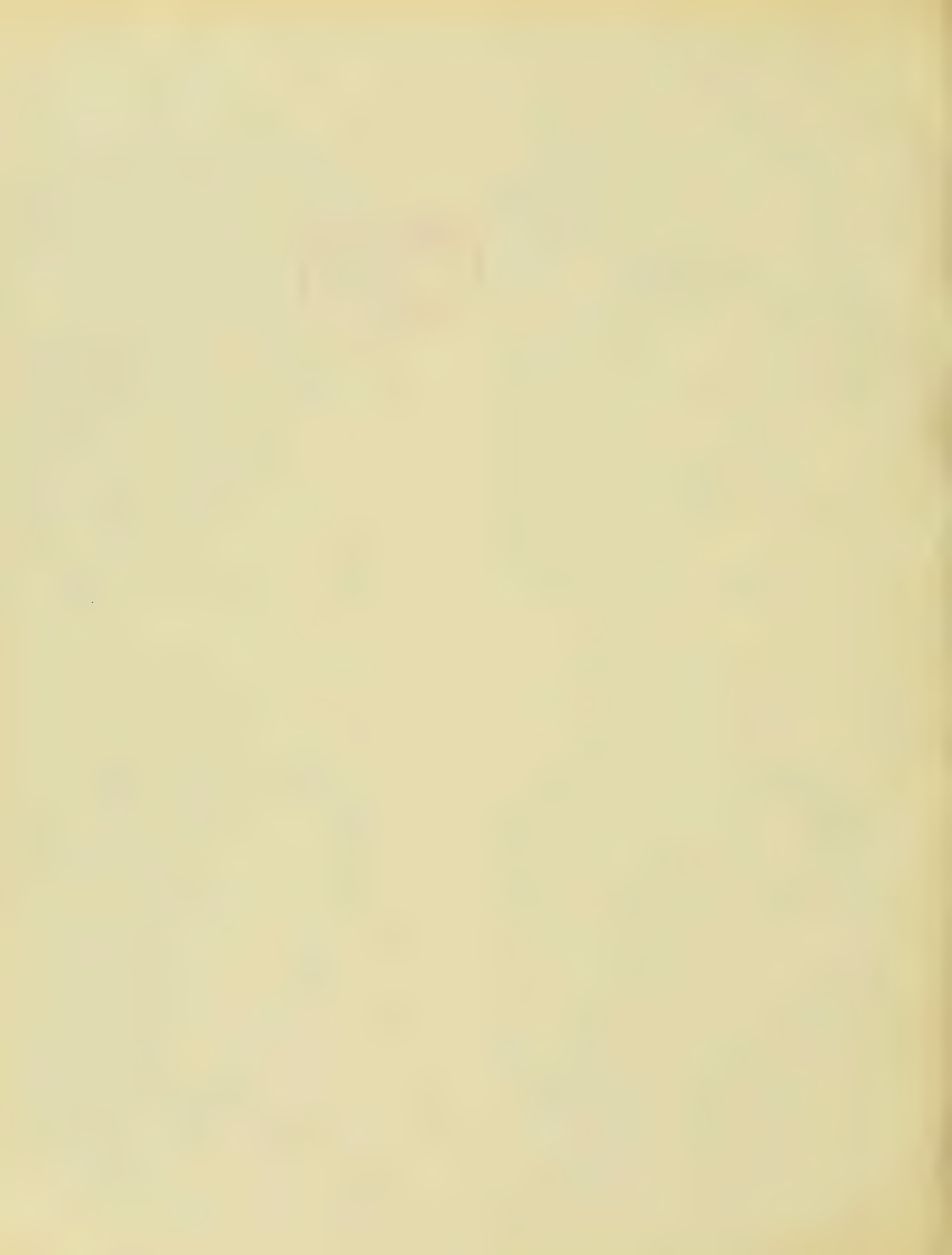


1892, 29. October 1h p.



1892, 29. October 9h p.

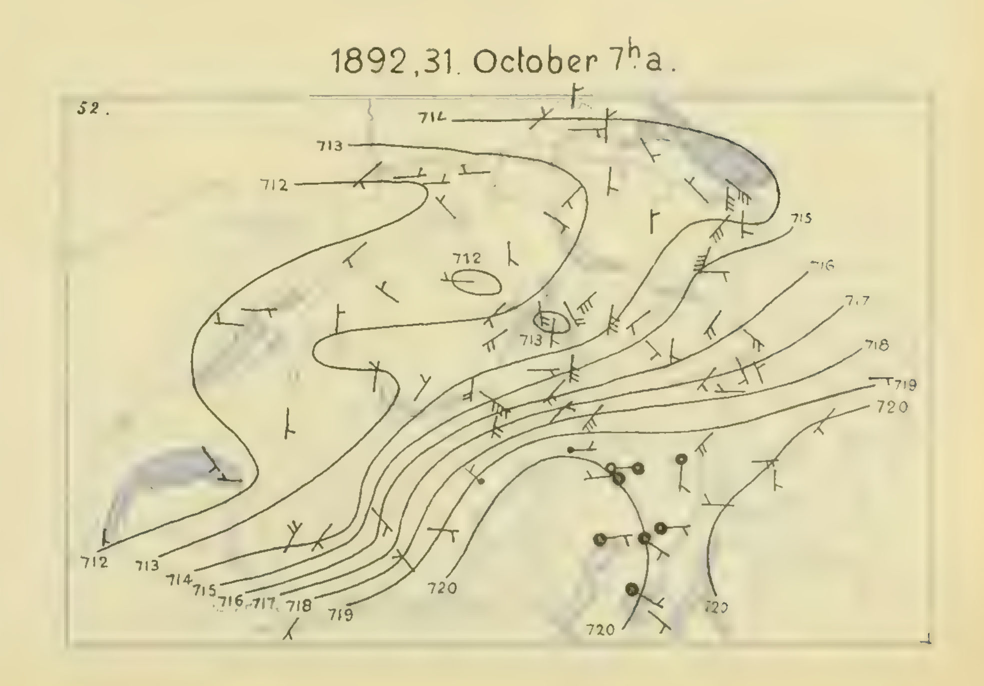




1892,30. October 7h.a.

49.

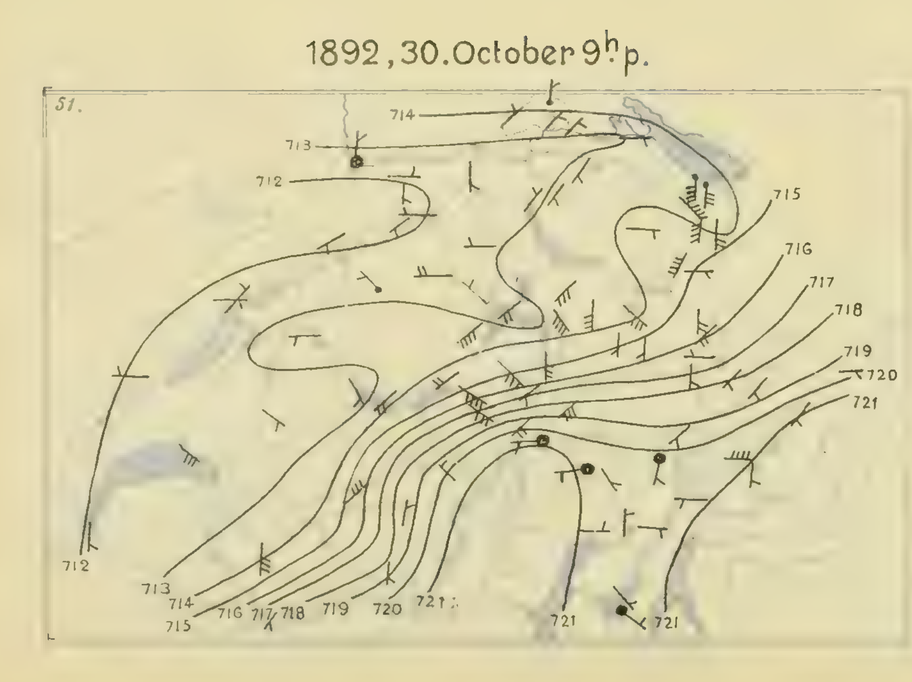
1892,30. October 1h.p.

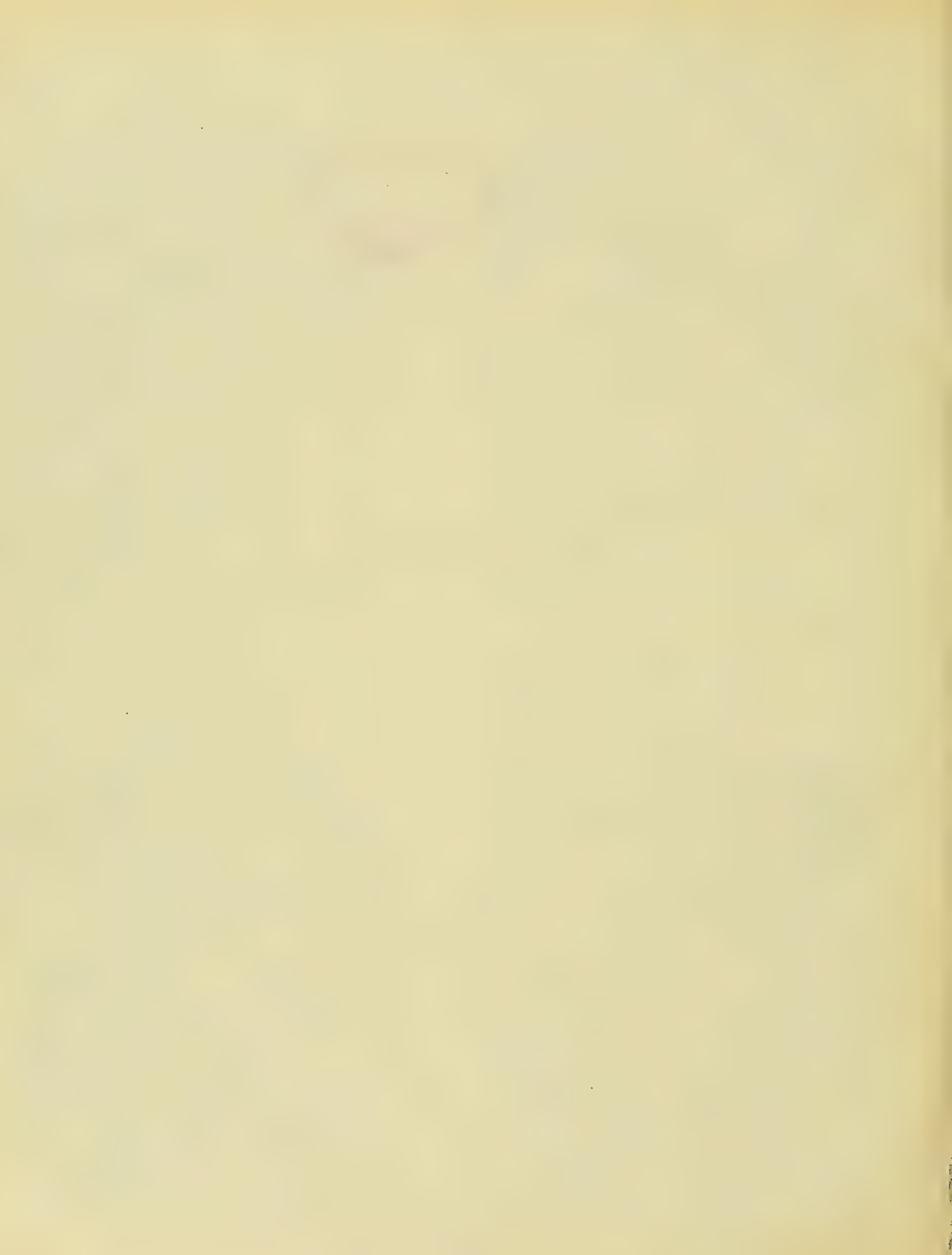


1892,30. October 9h.p.

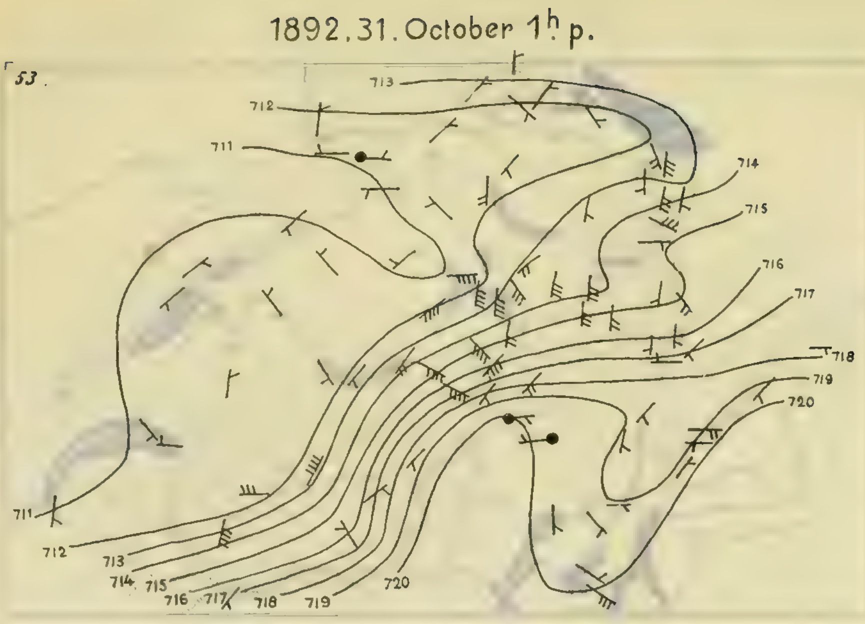
51.

1892,31. October 7h.a.

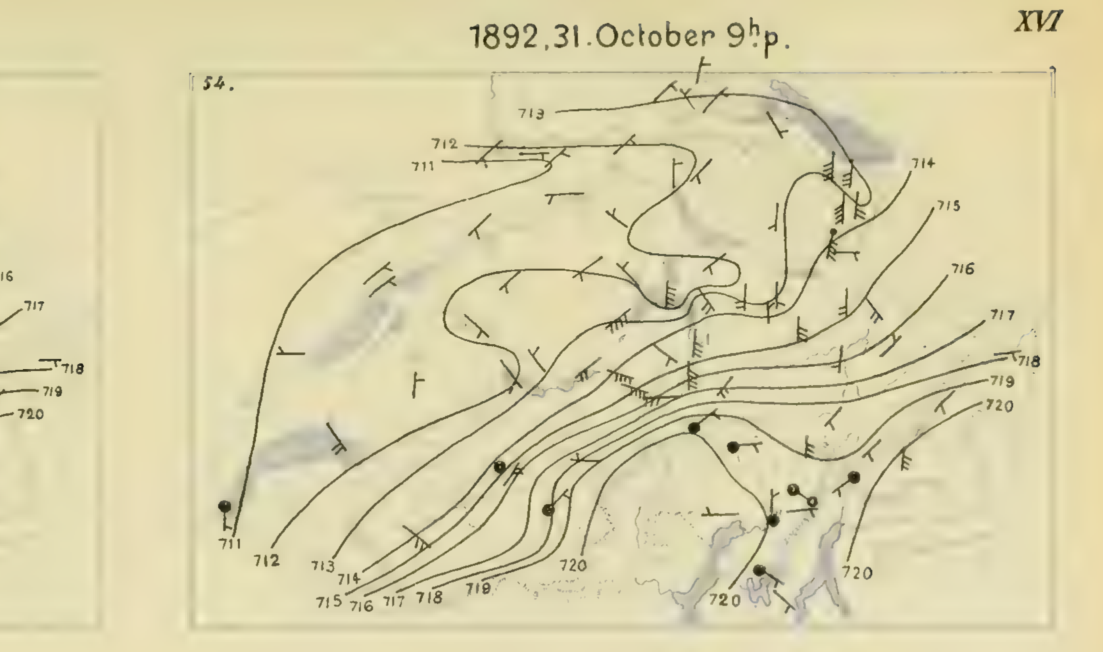




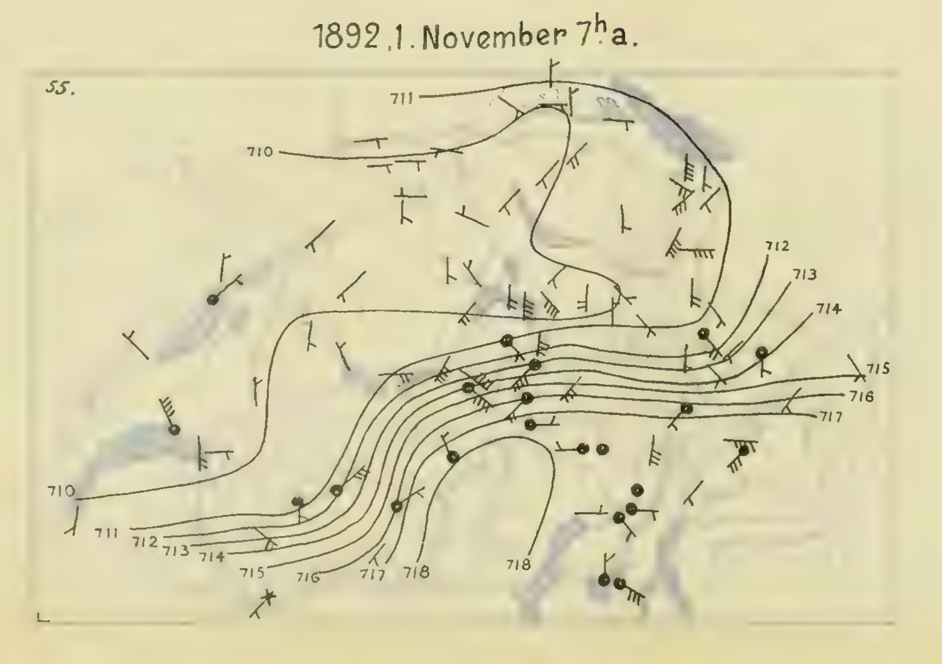
1892. 31. October 1h p.



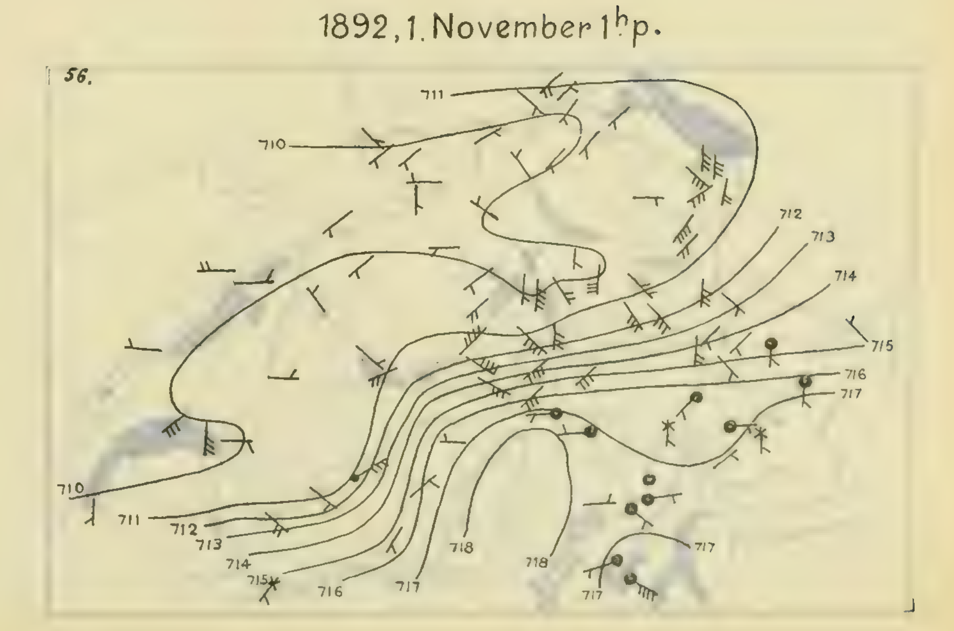
1892, 31. October 9h p.

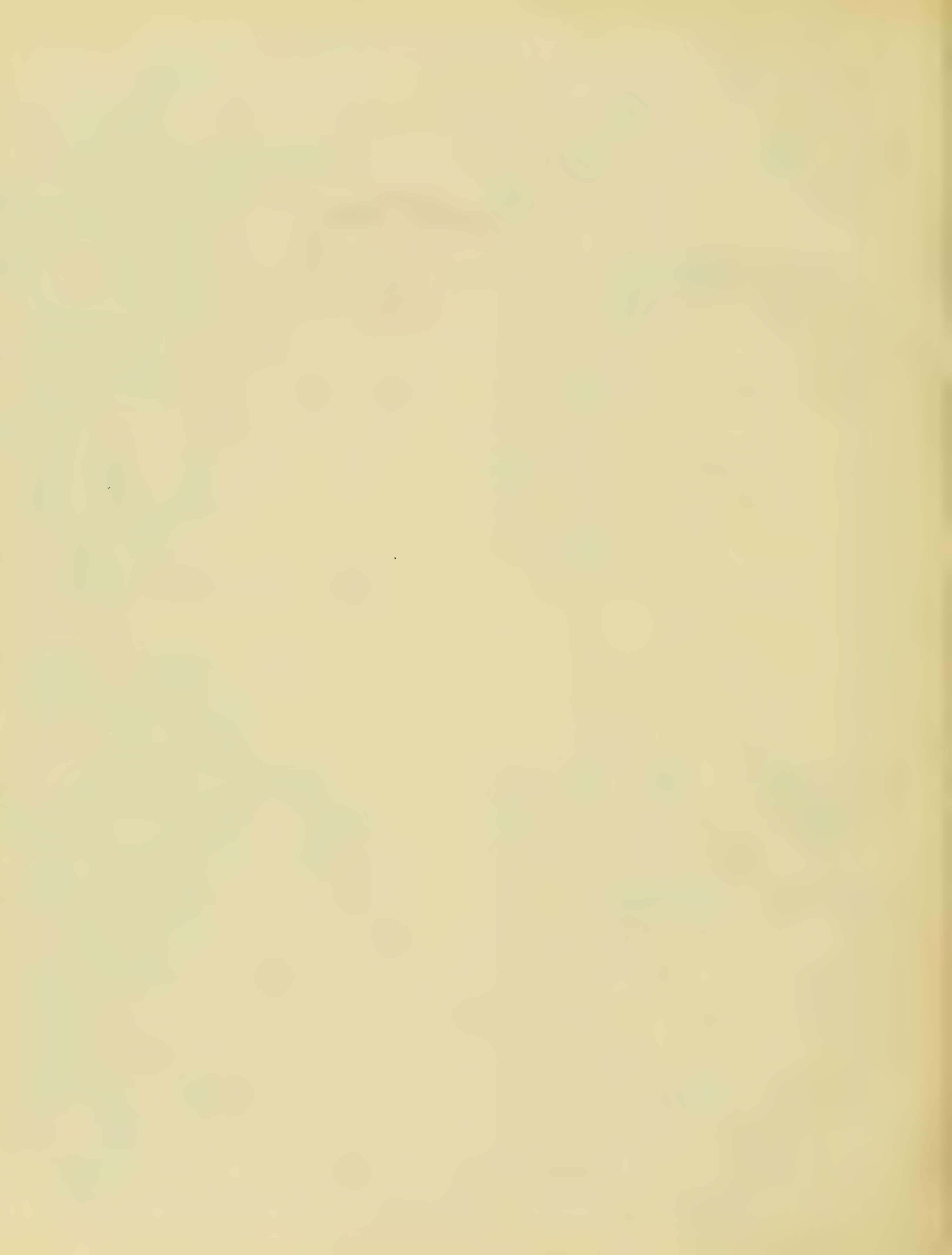


1892. 1. November 7h a.

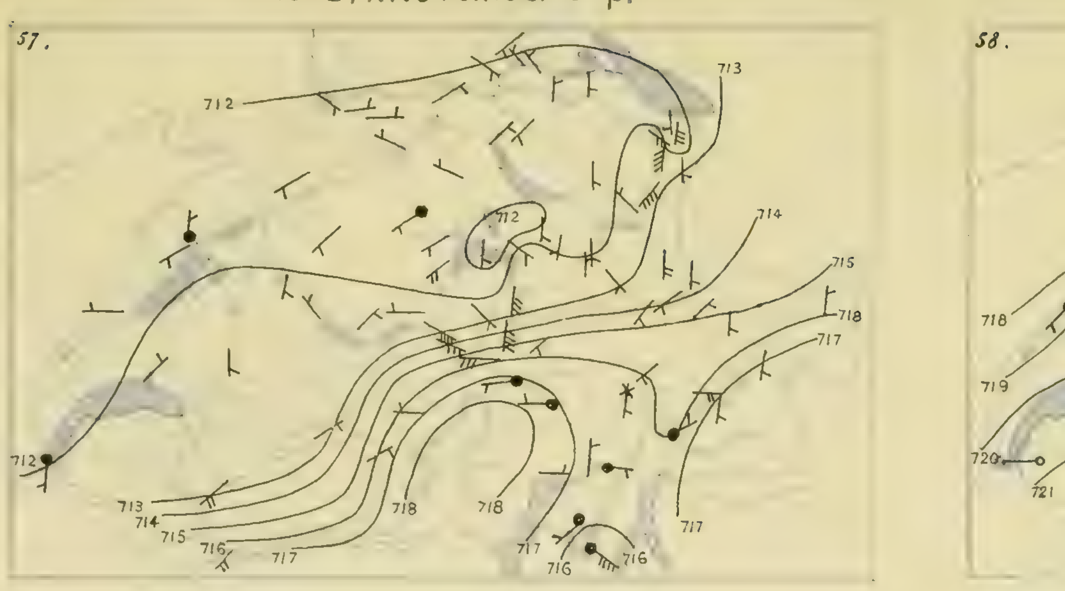


1892, 1. November 1h p.





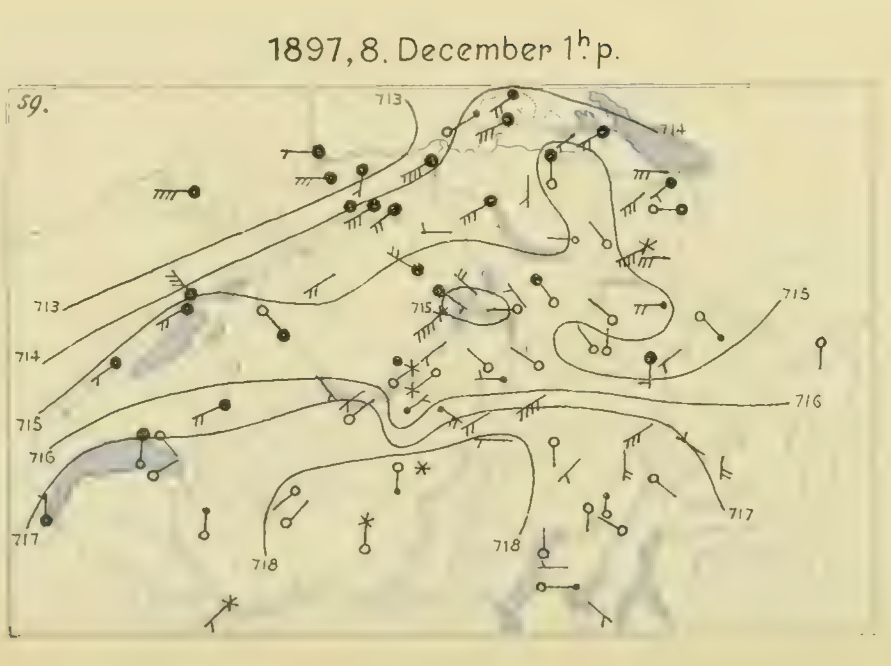
1892, 1. November 9h p.



1897. 8. December 7h a.

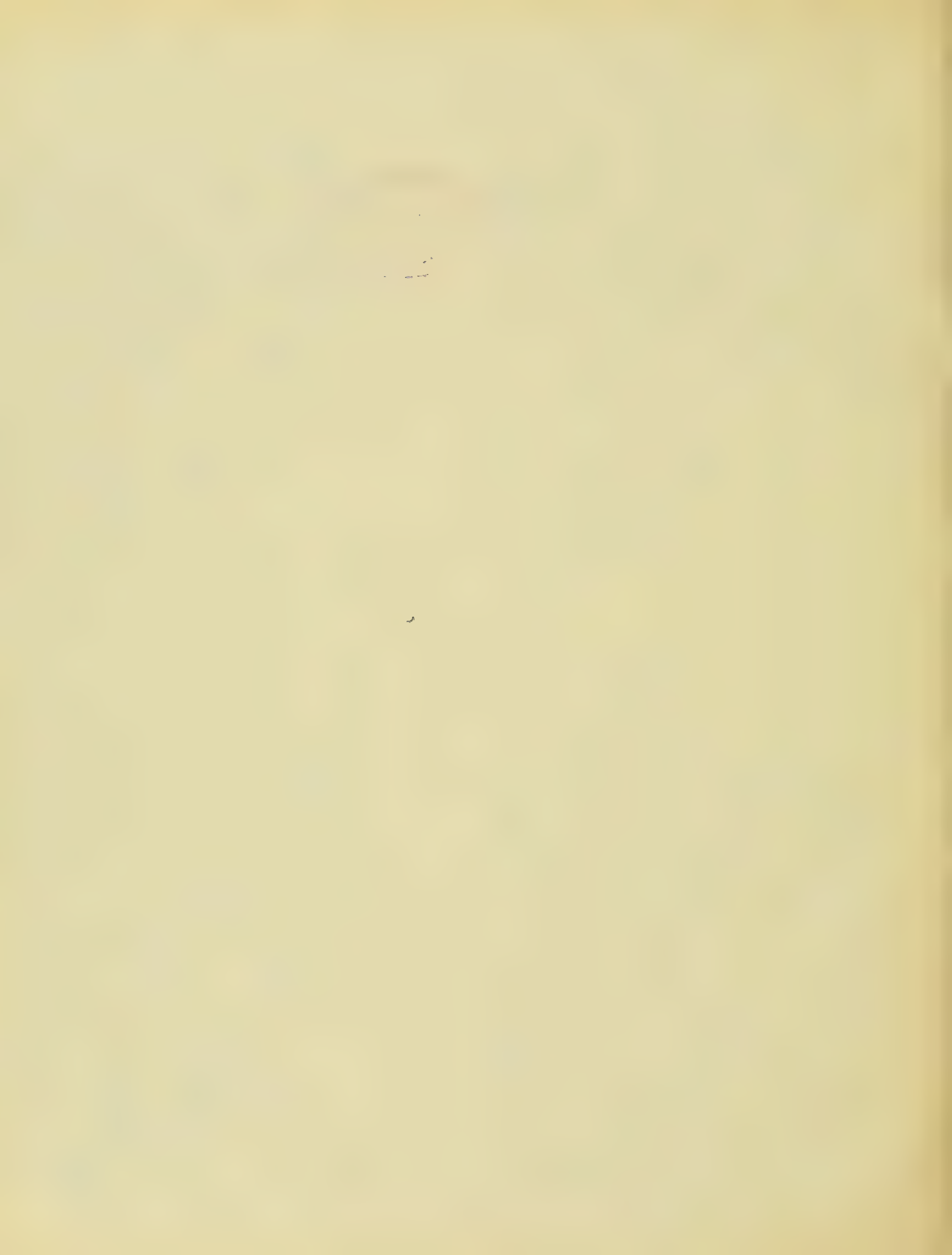
58.

1897, 8. December 1h p.



1897, 8. December 9h p

60.



1885. 2. Februar 9h p.

61.

Jsothermen in 500m.

12,5

2,5

1885, 2. Februar 9h p

Relative Feuchtigkeit

60

1897. 8. December 1h p.



1897, 8 December 1h p





Neue Denkschriften

der

allgemeinen schweizerischen Gesellschaft

für die

gesammten Naturwissenschaften.

NOUVEAUX MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ HELVÉTIQUE

DES

SCIENCES NATURELLES.

Band XXXVIII. Vol. XXXVIII.

Auf Kosten der Gesellschaft und mit Subvention des Bundes

gedruckt von Zürcher & Furrer in Zürich.

Commissions-Verlag von **Georg & Cie.** in **Basel, Genève & Lyon.**

1901.

Band I. 1837. 38½ Bog. 9 Taf.

Schinz, H. R. Fauna helvetica. Wirbeltiere.
Charpentier, J. de Fauna helvetica. Mollusques.
Studer, B. Gebirgsmasse Davos.
Otth, A. Froschgattung Discoglossus.
Tschudi, J. Schweizerische Echsen.

Band II. 1838. 47 Bog. 9 Taf.

Schinz, H. R. Arten der wilden Ziegen.
Stähelin, C. Badquellen zu Meltingen, Eptingen, Bubendorf.
Merian, P.; Trechsel, F.; Meyer, D. Meteorologische Beobachtungen in Basel, Bern und St. Gallen.
Gressly, A. Observations géologiques sur le Jura soleurois. 1re partie.
Heer, O. Käfer der Schweiz. I. Theil. 1. Lieferung.
— „ „ „ II. „ 1. „

Band III. 1839. 62½ Bog. 27 Taf.

Escher v. d. L., A. Contactverhältnisse zwischen Feldspathgestein und Kalk.
Escher v. d. L., A. und **Studer, B.** Geologie von Mittel-Bünden.
Agassiz, L. Echinodermes fossiles de la Suisse. 1re partie. Spatangoides.
Moritzi, A. Gefässpflanzen Graubündens.

Band IV. 1840. 46¼ Bog. 22 Taf.

Heer, O. Käfer der Schweiz. I. Theil. 2. Lieferung.
Agassiz, L. Echinodermes fossiles de la Suisse. 2e partie. Cidarides.
Vogt, C. Zur Nevrologie der Reptilien.
Gressly, A. Jura soleurois. 2e partie.

Band V. 1841. 54½ Bog. 17 Taf.

De Candolle, A. P. und **Alph.** Monstruosités végétales.
Nägeli, C. Cirsien der Schweiz.
Blanchet, R. Sur quelques insectes qui nuisent à la vigne.
Gressly, A. Jura soleurois. 3e et dernière partie.
Heer, O. Käfer der Schweiz. I. Theil. 3. Lieferung.

Band VI. 1842. 26¼ Bog. 20 Taf.

Neuwyler, M. Generationsorgane von Unio und Anodonta.
Valentin, G. Zur Anatomie des Zitteraals.
Nicolet, H. Podurelles.
Martins, Ch. Hypsométrie des Alpes pennines.
Lusser, F. Nachträgliche Bemerkungen zum geognostischen Durchschnitt vom Gotthard bis Arth (Alte Denkschriften Band I. 1).

Band VII. 1845. 21½ Bog. 21 Taf.

Vogt, C. Zur Naturgeschichte der schweizerischen Crustaceen.
Vogt, C. Anatomie der Lingula anatina.
Agassiz, L. Iconographie des coquilles tertiaires, etc.
Brunner, C. Polyporus tuberaster, Pietra Fungaja.
Sacc, F. Parties constituantes de la nourriture, etc.
Sacc, F. Propriétés de l'huile de lin.
Studer, B. Hauteurs barométriques dans le Piémont, en Valais, en Savoie.
Brunner, C. Ultramarin.

Band VIII. 1847. 50½ Bog. 17 Taf.

Kölliker, A. Bildung der Samenfädchen in Bläschen.
Mousson, A. Thermen von Aix in Savoyen.
Raabe, J. Ueber die Factorielle etc.
Koch, H. und **Kölliker, A.** Zur Entwicklungsgeschichte von Eunice.
Heer, O. Insektenfauna der Tertiärgebilde von Oeningen und Radoboj in Croatien. (I. Abtheilung.)

Band IX. 1847. 51½ Bog. 13 Taf.

Schweizer, E. Doppelsalze der chromsauren Kali mit etc.
Nägeli, C. Die neuern Algensysteme.
Bremi, J. Zur Monographie der Gallmücken (Cecidomya).
Deschwanden, J. W. v. Ueber Locomotiven für geneigte Bahnen.

Band X. 1849. 47½ Bog. 13 Taf.

Amsler, J. Vertheilung des Magnetismus.
De Candolle, Alph. Sur le genre Gärtnera.
Sacc, F. Poules nourries avec de l'orge.
Braun, A. Schweizerische Characeen.
Hofmeister, H. Witterungsverhältnisse von Lenzburg (1839—1845).
Brunner, C., Sohn. Cohäsion der Flüssigkeiten.
Nägeli, C. Gattungen einzelliger Algen.

Band XI. 1850. 55¼ Bog. 22 Taf.

Zweite Folge: I. Band.

Heer, O. Insektenfauna von Radoboj und Oeningen 2. Abtheilung.
Rütimeyer, L. Ueber das schweizerische Nummuliten-terrain etc.
Sacc, F. Fonction de l'acide pectique, etc.
— — Analyse des graines de pavot blanc.
Henry, Delcroz, Trechsel. Observations astronomiques pour . . . la latitude de Berne.

Band XII. 1852. 72½ Bog. 17 Taf.

Amsler, J. Wärmeleitung in festen Körpern.
Brunner, C. Environs du lac de Lugano.
Girard, Ch. Révision du genre Cottus.
Quiquerez, A. Terrain sidérolithique du Jura bernois.
Brunner, C. Elementaranalyse organischer Substanzen.
Frick, R. Schlesische Grünsteine.
Bruch, C. Zur Entwicklungsgeschichte des Knochen-systems.
Meyer-Dür, R. Fauna helvetica. Schmetterlinge 1. Tagfalter.

Band XIII. 1853. 86½ Bog. 36 Taf.

De la Harpe, J. C. Lépidoptères. IV. Phalénides et 1er Supplément.
Mousson, A. Whewellsche Streifen.
Stähelin, Chr. Messung von Kräften vermittelst der Bifilarsuspension.
Heer, O. Insektenfauna der Tertiärgebilde von Oeningen und Radoboj III. Abtheilung.
Escher v. d. L., A. Gebirgsarten im Vorarlberg.

Band XIV. 1855. 64¾ Bog. 20 Taf.

Zschokke, Th. Ueberschwemmungen von 1852.
Pestalozzi, H. Höhenänderungen des Zürichsee's.
Renevier, E. Perte du Rhône.
Denzler, H. Untere Schneegrenze während des Jahres.
Greppin, J. B. Terrains modernes du Jura bernois.
De la Harpe. IV. Phalénides. 2e Supplément.
— — V. Pyrales.
Mousson, A. Veränderungen des galvanischen Leitungs-widerstandes.
Volger, H. O. Epidot und Granat.

Band XV. 1857. 60 1/2 Bog. 30 Taf.

Brunner-v. Wattenwyl, C. Stockhornmasse.
Heer, O. Fossile Pflanzen von St. Jorge in Madeira.
Greppin, J. B. Complément aux terrains modernes du Jura bernois.
Hartung G. Lanzarote und Fuertaventura.
Lebert H. Pilzkrankheit der Fliegen.
Mœsch, C. Flözgebirge im Aargau. I. Theil.
Wild, H. Nobili'sche Farbenringe.
Rütimeyer, L. Anthracotherium magnum et hippoideum.

Band XVI. 1858. 52 Bog. 23 Taf.

Müller, Jean. Famille des Résédacées.
De la Harpe, J. C. Faune Suisse. Lépidoptères. VIe partie. Tortricides.
Gaudin, Ch.-Th. et Strozzi, C. 1er Mémoire sur quelques gisements de feuilles fossiles de la Toscane.

Band XVII. 1860. 68 Bog. 53 Taf. u. Kart.

Gräffe, Ed. Radiaten und Würmer in Nizza.
Ooster, W. A. Céphalopodes fossiles des Alpes Suisses. Description des espèces remarquables. Ie, IIe, IIIe partie.
Zschokke, Th. Gebirgsschichten im Tunnel zu Aarau.
Gaudin, Ch. et Strozzi, C. Contributions à la flore fossile italienne. 2e et 3e mémoire. (Val d'Arno, Travertins de Massa.)
Theobald, G. Unterengadin. Geognostische Skizze.
Meyer-Dür. Die schweizerische Orthopteren-Fauna.
Gaudin, Ch. et Strozzi, C. Contributions à la flore fossile italienne. 4e mémoire. Travertins Toscans par Ch. Gaudin et C. Strozzi. 5e mémoire. Tufs volcaniques de Lipari par Ch. Gaudin et le Baron Piraino de Mandralisca.
Kaufmann, F. Mittel- und ostschweizerische subalpine Molasse.

Band XVIII. 1861. 58 Bog. 62 Taf.

Thurmann, Jul. Lethæa Bruntrutana ou Etudes paléontologiques, etc. Oeuvre posthume, terminée par A. Etallon, 1re partie: page 1—145.
Venetz, Ign., père. Extension des anciens glaciers. Oeuvre posthume, rédigée en 1857.
Ooster, W. A. Céphalopodes fossiles des Alpes Suisses. IVe partie.
Ooster, W. A. Céphalopodes fossiles des Alpes Suisses. Ve partie. Suite de la description des figures au T. XVII.

Band XIX. 1862. 76 1/2 Bog. 47 Taf.

Rütimeyer, L. Fauna der Pfahlbauten in der Schweiz.
Thurmann, J. et Etallon, A. Lethæa Bruntrutana. 2e partie: page 147—354.
Rütimeyer, L. Eocäne Säugethiere aus dem schweizerischen Jura.
Schläfli, A. Zur Klimatologie des Thales von Janina.

Band XX. 1864. 64 1/2 Bog. 33 Taf.

Thurmann, J. et Etallon, A. Lethæa Bruntrutana. 3e et dernière partie: page 355—500.
De la Harpe, J. 3 Suppléments au Phalénides, Pyrales, Tortricides.
Gaudin, Ch. et Strozzi, C. Contributions à la flore fossile italienne. 6e mémoire.
Schläfli, A. Zur physikalischen Geographie von Unter-Mesopotamien.
Cramer, C. Physiologisch-systematische Untersuchungen über die Ceramiaceen.

Band XXI. 1865. 63 1/4 Bog. 11 Taf.

Dritte Folge: I. Band.

Heusser, J. Ch. und Claraz, G. Beiträge zur geognostischen und physikalischen Kenntniss der Provinz Buenos Aires. 1. Abtheilung.
— — Description physique et géognostique de la Province argentine de Buenos Aires. 2e partie.
Heer, O. Fossile Pflanzen von Vancouver und Britisch-Columbien.
Stöhr, E. Die Kupfererze an der Mürtschenalp.
Quiquerez, A. Rapport sur la question d'épuisement des minérais de fer du Jura bernois.
Dietrich, K. Insektenfauna des Kantons Zürich: Käfer.

Band XXII. 1867. 74 3/4 Bog. 20 Taf.

Capellini, J. et Heer, O. Les Phyllites crétacées du Nebrasca.
Rütimeyer, L. Versuch einer natürlichen Geschichte des Rindes etc. 1. und 2. Abtheilung.
Heer, O. Fossile Hymenopteren aus Oeningen und Radoboj.
Lang, Fr. und Rütimeyer, L. Die fossilen Schildkröten von Solothurn.
Fick, A. Untersuchungen über Muskel-Arbeit.
Christ, H. Ueber die Verbreitung der Pflanzen der alpinen Region der europäischen Alpenkette.
Prym, Fr. Zur Theorie der Funktionen in einer zweiblättrigen Fläche.

Band XXIII. 1869. 83 1/4 Bog. 26 Taf.

Gerlach, H. Die penninischen Alpen.
Heer, O. Beiträge zur Kreideflora. I.
Wild, H. Zur Reform der schweizerischen Urmaasse.
Stierlin, G. und Gautard, V. v. Die Käferfauna der Schweiz. I. Theil, p. 1—216.
Loriol, P. de und Gilliéron, V. Monographie de l'étage urgonien inférieur du Landeron.

Band XXIV. 1871. 43 Bog. 11 Taf.

Stierlin, G. und Gautard, V. v. Die Käferfauna der Schweiz. II. Theil, p. 217—372.
Heer, O. Beiträge zur Kreideflora. II.
Bernoulli, G. Uebersicht der bis jetzt bekannten Arten von Theobroma.
Schneider, G. Dysopes Cestonii in Basel.
Pfeffer, W. Bryogeographische Studien aus den rhätischen Alpen.

Band XXV. 1873. 47 1/2 Bog. 23 Taf.

Mousson, A. Révision de la faune malacologique des Canaries.
Rütimeyer, L. Die fossilen Schildkröten von Solothurn und der übrigen Juraformation.

Band XXVI. 1874. 60 Bog. 2 Taf.

Forel, A. Les Fourmis de la Suisse. Systématique. Notices anatomiques et physiologiques. Architecture. Distribution géographique. Nouvelles expériences et observations de mœurs.

Band XXVII. 1876 und 1377. 59 Bog. 9 Taf.

Favre, E. Recherches géologiques dans la partie centrale de la chaîne du Caucase.
Heer, O. Ueber fossile Früchte der Oase Chargeh.
Lebert, H. Die Spinnen der Schweiz.

Band XXVIII. 1883. 44½ Bog. 16 Taf.

Heer, O. Beiträge zur fossilen Flora von Sumatra.
Cramer, C. Ueber die geschlechtslose Vermehrung des Farn-Prothallium, namentlich durch Gemmen, resp. Conidien.
Kollmann, J. Die statistischen Erhebungen über die Farbe der Augen, der Haare und der Haut in den Schulen der Schweiz.
Rothpletz, A. Das Diluvium um Paris und seine Stellung im Pleistocän.
Keller, C. Die Fauna im Suezkanal.
Stierlin, G. Zweiter Nachtrag zur Fauna Coleopterorum helvetica.

Band XXIX. 1885. 61½ Bog. 9 Taf.

Mathey, F. Coupes géologiques des tunnels du Doubs.
Heer, O. Ueber die nivale Flora der Schweiz.
Beust, Fr. Untersuchung über fossile Hölzer aus Grönland.
Forel, F.-A. La faune profonde des lacs suisses. Mémoire couronné.
Du Plessis-Gouret, G. Essai sur la faune profonde des lacs suisses. Mémoire couronné.

Band XXX. 1888—1890. 64 Bog. 9 Taf.

Früh, J. J. Beiträge zur Kenntnis der Nagelfluh der Schweiz.
Cramer, C. Ueber die verticillierten Siphoneen, besonders Neomeris und Cymopolia.
Franzoni, A. Le Piante fanerogame della Svizzera insubrica enumerate secondo il metodo Decandolliano. Opera postuma ordinata e annotata da *L. Lenticchia.*

Band XXXI. 1890. 61½ Bog.

Favre, E. Faune des Coléoptères du Valais et des régions limitrophes, avec Introduction par *Ed. Bugnion.*

Band XXXII. 1890—91. 33 Bog. 12 Taf.

Fischer, Ed. Untersuchungen zur vergleichenden Entwicklungsgeschichte und Systematik der Phalloideen.
Cramer, C. Ueber die verticillierten Siphoneen, besonders Neomeris und Bornetella.
Riggenbach, A. Die Niederschlagsverhältnisse von Basel.

Band XXXIII. 1893—98. 21½ Bog. 20 Taf.

Emden, R. Ueber das Gletscherkorn.
Nägeli, C. v. Ueber oligodynamische Erscheinungen in lebenden Zellen.
Fischer, Ed. Neue Untersuchungen zur vergleichenden Entwicklungsgeschichte und Systematik der Phalloideen.
Baltzer, A. Studien am Unter-Grindelwaldgletscher über Glacialerosion, Längen- und Dickenveränderung in den Jahren 1892—97.

Band XXXIV. 1895. 66 Bog.

Jaccard, J. Catalogue de la flore valaisanne.

Band XXXV. 1896. 44 Bog. 25 Taf. u. 1 Karte.

Nüesch, J. Das Schweizersbild, eine Niederlassung aus paläolithischer und neolithischer Zeit. Mit Beiträgen von *A. Bächtold, J. Früh, A. Gutzwiller, A. Hedinger, J. Kollmann, J. Meister, A. Nehring, A. Penck, O. Schötensack, Th. Studer.*

Band XXXVI. 1899—1900. 54 Bog. 21 Taf.

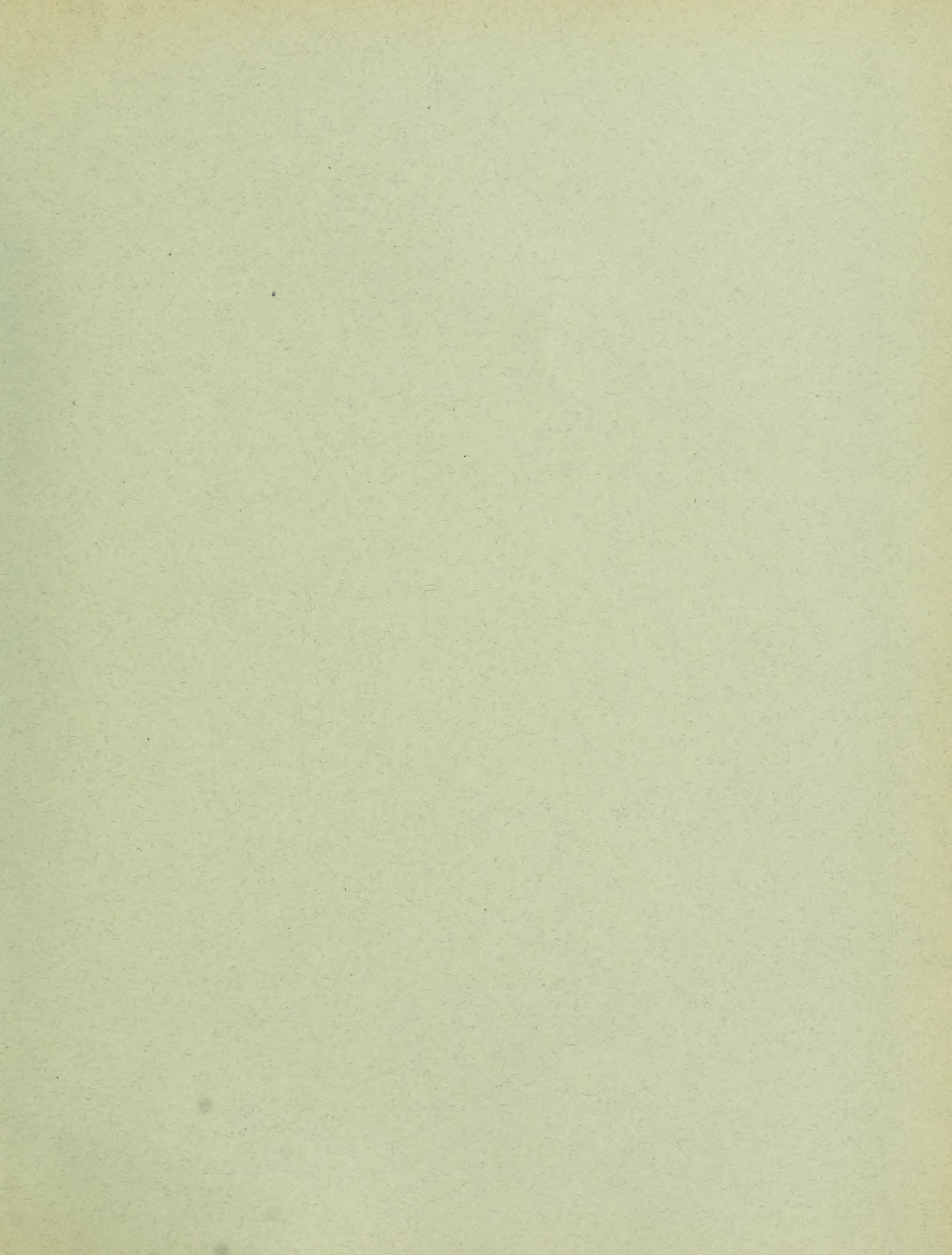
Standfuss, M. Experimentelle zoologische Studien mit Lepidopteren.
Christ, H. Monographie des Genus Elaphoglossum.
Fischer, Ed. Untersuchungen zur vergleichenden Entwicklungsgeschichte und Systematik der Phalloideen. III. Serie.
Hugi, E. Die Klippenregion von Giswyl.

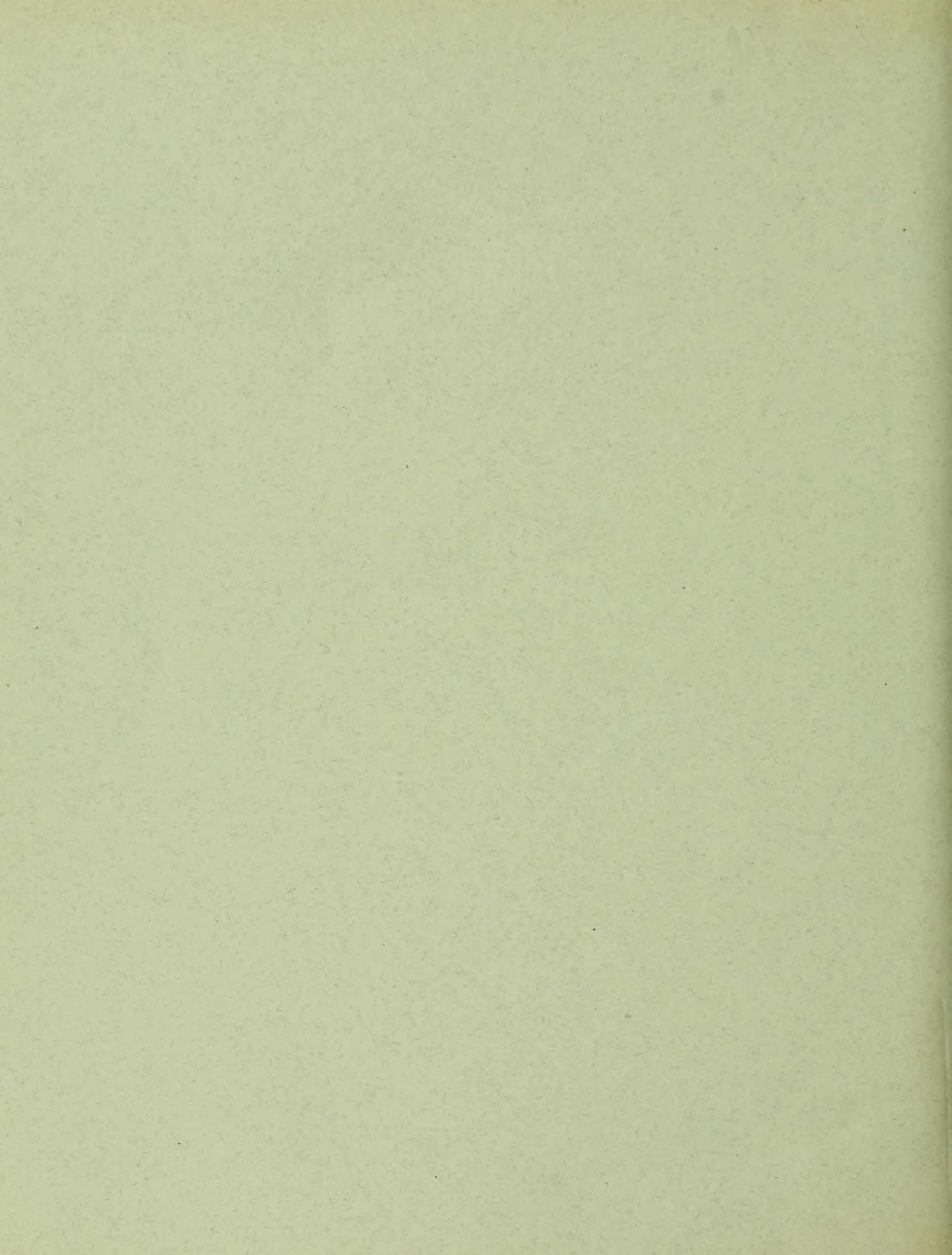
Band XXXVII. 1900. 51 Bog. 8 Taf. u. 4 Karten.

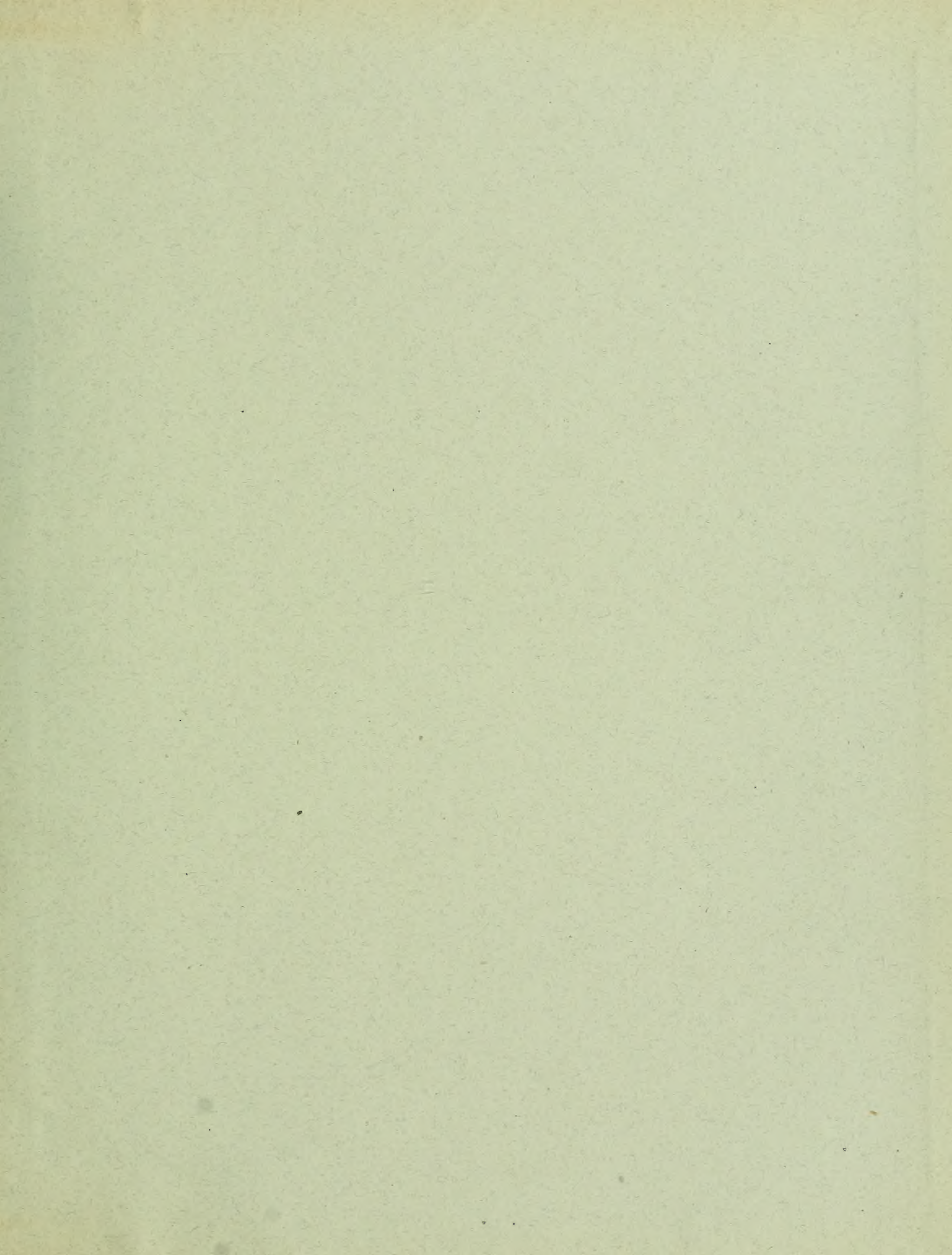
Zschokke, F. Die Tierwelt in den Hochgebirgsseen.












AMNH LIBRARY
100125523